Časopis pro pěstování matematiky

František Zítek

Sur certains problèmes combinatoires et leurs applications

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 3, 261--272

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108754`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 90 * PRAHA 21. 8. 1965 * ČÍSLO 3

SUR CERTAINS PROBLÈMES COMBINATOIRES ET LEURS APPLICATIONS

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Reçu le 31 janvier 1964)

L'article apporte la solution, obtenue par des méthodes élémentaires, de quelques problèmes combinatoires assez simples qui se sont présentés en connexion avec les applications de l'analyse combinatoire en linguistique.

1. INTRODUCTION

L'inspiration première du présent travail provient des applications de méthodes mathématiques en linguistique. En essayant de résoudre certains problèmes de l'étude quantitative de l'homonymie morphologique dans les systèmes des langues, M. S. STATI, linguiste roumain, s'est heurté dans son travail [7] à une série de problèmes relevant de l'analyse combinatoire élémentaire. Les solutions qu'il en donne dans [7] ne sont malheureusement ni complètes ni tout à fait exactes, comme l'a d'ailleurs montré dèjà M. P. NOVÁK dans son article [3]. Une analyse détaillée de ces problèmes a ensuite révélé leur connexion intime avec les problèmes traités par M. J. RIGUET dans son mémoire [5], formant le Complément V de la monographie bien connue [1]. Le présent travail a pour but de compléter les résultats de M. J. Riguet par la solution de certains problèmes apparentés et de faire voir leur rapports aux problèmes linguistiques mentionnés. Il est cependant clair que la linguistique n'est pas le seul domaine qui puisse susciter ces problèmes combinatoires. Déjà dans notre communication présentée au Séminaire sur la théorie des graphes à Liblice au mois de mai 1961, nous avons signalé la possibilité d'interpréter certains de ces problèmes en termes de la théorie des graphes. Nous rappellerons ici quelques exemples simples de cette interprétation.

Notre article se rattache étroitement au travail [5] dont nous supposerons connus les résultats principaux. En général, nous nous en servirons même sans le rappeler explicitement. Tant que ce sera utile, nous garderons aussi le système de notation de M. Riguet.

Lorsque X est un ensemble fini, $|X|$ désigne le nombre de ses éléments; pour les ensembles X infinis dénombrables nous écrivons $|X| = \infty$. Nous désignons par P l'ensemble des entiers positifs. Lorsque a et $b \geqq a$ sont deux éléments de P, nous appelons *intervalle* et nous désignons par $\langle a, b\rangle$ l'ensemble des entiers n tels que $a \leqq n \leqq b$.

Soit X un ensemble non vide. Nous appellerons *mots* les suites finies d'éléments de X (cf. [5]). Un tel mot sera donc essentiellement une application d'un intervalle $\langle 1, l\rangle$ dans X. Nous dirons alors que l est la *longueur* du mot en question. L'ensemble de tous les mots de X de longueur l (c'est-à-dire l'ensemble de toutes les applications de l'intervalle $\langle 1, l\rangle$ dans X) sera désigné par $S_l(X)$; le symbole $M_l(X)$ dénotera alors l'ensemble de toutes les applications de l'intervalle $\langle 1, l\rangle$ *sur* X. Nous avons évidemment $M_l(X) \subset S_l(X)$ et

(1) $$S_l(X) = \bigcup_{Y \subset X, Y \neq ()} M_l(Y)\,.$$

Il est clair que pour $l < |X|$ l'ensemble $M_l(X)$ sera nécessairement vide. D'habitude, nous identifions l'ensemble $S_1(X)$ avec X lui-même; pour $l \in P$ nous avons en général $|S_l(X)| = |X|^l$.

Nous empruntons à [5] également les notions de *degré* et de *type* d'un mot. Le degré d'un mot $m \in M_l(X)$, c'est l'application δm de l'ensemble X dans P, définie par la relation[1])

(2) $$\delta m(x) = |\{j : j \in \langle 1, l\rangle, m(j) = x\}|\,.$$

Par le type d'un mot m nous comprenons alors l'application $\mathfrak{a}$ de l'ensemble $\{\delta m(x) : x \in X\}$ dans P, définie par la relation

(3) $$\mathfrak{a}(\lambda) = |\{x : x \in X, \delta m(x) = \lambda\}|\,.$$

Il est aisé de voir (cf. [5]) que nous obtenons le type $\mathfrak{a}$ d'un mot m à partir de son degré δm par la même opération, par laquelle nous avons obtenu δm à partir de m, de sorte que $\mathfrak{a} = \delta\delta m$. Les applications de cette espèce, appelées *partitions*, s'écrivent d'habitude sous la forme $\mathfrak{a} = (\lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2} \ldots \lambda_s^{\alpha_s})$, où les entiers $\lambda_i \in P$, $i = 1, 2, \ldots, s$ forment le domaine de l'application $\mathfrak{a}$ et $\alpha_i = \mathfrak{a}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Dans la suite, nous aurons besoin des suivantes fonctions de partition (on a toujours $\mathfrak{a} = (\lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2} \ldots \lambda_s^{\alpha_s})$:

(4) $$d(\mathfrak{a}) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s\,; \quad w(\mathfrak{a}) = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \ldots + \alpha_s\lambda_s\,,$$

(5) $$v(\mathfrak{a}) = \alpha_1!\,\alpha_2! \ldots \alpha_s!$$

[1]) Nous dénotons en général par $\{x : V(x)\}$ l'ensemble des x jouissant de la propriété V.

et (cf. [5]) de

$$(6) \qquad c(\mathfrak{a}) = \frac{w(\mathfrak{a})!}{(\lambda_1!)^{\alpha_1}(\lambda_2!)^{\alpha_2}\dots(\lambda_s!)^{\alpha_s}},$$

$$k(\mathfrak{a}) = c(\delta\mathfrak{a}) = \frac{d(\mathfrak{a})!}{v(\mathfrak{a})}, \quad e(\mathfrak{a}) = \frac{c(\mathfrak{a})\,k(\mathfrak{a})}{d(\mathfrak{a})!} = \frac{c(\mathfrak{a})}{v(\mathfrak{a})}.$$

Le nombre $d(\mathfrak{a})$ est appelé *dimension* et $w(\mathfrak{a})$ *poids* de la partition $\mathfrak{a}$.

Lorsque $m \in M_l(X)$, l'application inverse m^{-1} est une application de l'ensemble X dans la famille de tous les sous-ensembles de l'intervalle $\langle 1, l\rangle$; il est aisé de voir alors que l'application composée des deux, $m^{-1}m$, est une équivalence sur $\langle 1, l\rangle$. Cela subsiste même si nous avons seulement $m \in S_l(X)$, dans ce cas, l'application m^{-1} peut ne pas être définie sur l'ensemble X entier. Le système de toutes les équivalences possibles sur $\langle 1, l\rangle$ sera noté par $\mathscr{E}_l$. Deux mots m_1 et m_2 de $S_l(X)$ (de même longueur l) seront dits *équivalents*, lorsque $m_1^{-1}m_1 = m_2^{-1}m_2$. Cela signifie e.a. qu'il existe une permutation π de l'ensemble X telle que $m_2(j) = \pi m_1(j)$ pour tout $j \in \in \langle 1, l\rangle$. La relation d'équivalence qui vient ainsi d'être définie dans $S_l(X)$, engendre une décomposition de l'ensemble $S_l(X)$ en classes d'équivalence deux à deux disjointes; nous noterons $\mathscr{C}_l(X)$ l'ensemble de ces classes.

Supposons maintenant que l'ensemble X est *ordonné,* c'est-à-dire que l'on a défini pour ses éléments une relation irréflexive, transitive et exhaustive, soit $\prec$. Cela nous permet d'ordonner (ordre lexicographique) aussi l'ensemble $S_l(X)$, l'entier l étant fixé. A l'intérieur de chaque classe $C \in \mathscr{C}_l(X)$, nous prenons maintenant le mot $m \in C$ qui est *premier* au sens de cet ordre lexicographique; soit $R_l(X)$ l'ensemble des mots ainsi choisis. On a évidemment

$$(7) \qquad |R_l(X)| = |\mathscr{C}_l(X)| = |\{\varrho\colon \varrho \in \mathscr{E}_l,\ \varrho = m^{-1}m,\ m \in S_l(X)\}| \leqq |\mathscr{E}_l|\,;$$

avec $|R_l(X)| = |\mathscr{E}_l|$ si $|X| \geqq l$, et $|R_l(X)| < |\mathscr{E}_l|$ si $|X| < l$.

A chaque équivalence $\varrho \in \mathscr{E}_l$ on associe une partition $\mathfrak{p}[\varrho] = (\lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}\dots\lambda_s^{\alpha_s})$ de la façon suivante: les nombres λ_i, $i = 1, 2, \dots, s$, sont précisément tous les entiers de la forme $|\varrho(j)|$, $j = 1, 2, \dots, l$, et $\alpha_i = |\{\varrho(j)\colon |\varrho(j)| = \lambda_i\}|$, $i = 1, 2, \dots, s$ (cf. aussi [5]). Il est aisé de voir que pour $\varrho = m^{-1}m$, $m \in M_l(X)$, la partition $\mathfrak{p}[\varrho]$ est exactement le type $\delta\delta m$ du mot m. Il en résulte aussi que deux mots équivalents ont toujours le même type. On a alors évidemment $l = w(\mathfrak{p}[\varrho])$.

Dans ce qui suit, nous nous occuperons surtout des problèmes d'énumération des éléments de certains ensembles de mots, de partitions, ou d'équivalences et nous établirons certains rapports entre ces nombres. On trouve certaines relations de ce genre déjà dans [5], p. ex.: étant donné une partition $\mathfrak{a}$ et un ensemble X, $|X| = = d(\mathfrak{a})$ [2]), nous avons les relations

[2]) Etant donné $\mathfrak{a}$, les nombres $l = w(\mathfrak{a})$ et $n = d(\mathfrak{a})$ sont bien déterminés; si nous cherchons donc p. ex. des mots du type $\mathfrak{a}$, ce seront forcément des mots appartenant à un ensemble $M_l(X)$ où $|X| = n$.

(8) $$|\{v\colon v = \delta m,\ m \in M_l(X),\ \delta v = \mathfrak{a}\}| = k(\mathfrak{a})\,,$$

(9) $$|\{\varrho\colon \varrho \in \mathscr{E}_l,\ \mathfrak{p}[\varrho] = \mathfrak{a}\}| = e(\mathfrak{a})\,.$$

Ensuite, étant donné un ensemble X et une application v de X dans P, $|X| = d(\delta v)$, nous avons

(10) $$|\{m\colon m \in M_l(X),\ \delta m = v\}| = c(\delta v)$$

où évidemment $l = w(\delta v)$. Par contre, étant donné une équivalence $\varrho \in \mathscr{E}_l$ et un ensemble X, $|X| = d(\mathfrak{p}[\varrho])$, on a

(11) $$|\{m\colon m \in M_l(X),\ m^{-1}m = \varrho\}| = d(\mathfrak{p}[\varrho])!$$

Il en résulte alors que pour $\mathfrak{a}$ et X, $|X| = d(\mathfrak{a})$, donnés, on a

(12) $$|\{m\colon m \in M_l(X),\ \delta\delta m = \mathfrak{a}\}| = |\{m\colon m \in M_l(X),\ \mathfrak{p}[m^{-1}m] = \mathfrak{a}\}| = \\ = d(\mathfrak{a})!\, e(\mathfrak{a}) = c(\mathfrak{a})\, k(\mathfrak{a})\,.$$

De même, étant donné $\varrho \in \mathscr{E}_l$, v, X, $|X| = d(\delta v)$, $l = w(\delta v)$, on a

(13) $$|\{m\colon m \in M_l(X),\ \delta m = v,\ m^{-1}m = \varrho\}| = v(\delta v) = v(\mathfrak{p}[\varrho])\,.$$

Il est également facile d'obtenir des résultats analogues pour le cas où l'ensemble $M_l(X)$ sera remplacé par $S_l(X)$. Ainsi p. ex. au lieu de (11) nous aurons alors pour $\varrho \in \mathscr{E}_l$, X, $|X| = n \geqq b = d(\mathfrak{p}[\varrho])$, la relation

(14) $$|\{m\colon m \in S_l(X),\ m^{-1}m = \varrho\}| = \binom{n}{b} b! = \frac{n!}{(n-b)!}\,,$$

etc.

Etant donné deux entiers l, n, $0 < n \leqq l$, écrivons

(15) $$p_l(n) = |\{\mathfrak{a}\colon d(\mathfrak{a}) = n,\ w(\mathfrak{a}) = l\}|\,.$$

Pour les nombres $p_l(n)$ on connaît bien des formules de récurrence (cf. p. ex. [6], chap. 6, §§ 2–4, p. 111–123, ou [4], p. 190 sqq). Voici une de ces formules

(16) $$p_l(n) = \sum_{j=1}^{r} p_{l-n}(j)\,,$$

où $n < l$, $r = \min(n, l - n)$; on a évidemment $p_n(n) = 1$. [3]) Il résulte de (15) pour $l > 0$

(17) $$|\{\mathfrak{a}\colon w(\mathfrak{a}) = l\}| = p_l = \sum_{n=1}^{l} p_l(n)\,.$$

---

[3]) La formule (16) est facile à établir, p. ex. à l'aide des graphes de Ferrer (voir [6], chap. 6).

Nous allons maintenant regarder de plus près les nombres figurant dans la relation (7). Pour $0 < n \leqq l \leqq |X|$ posons

$$r_l(n) = |\{m \colon m \in R_l(X),\ d(\mathfrak{p}[m^{-1}m]) = n\}| \tag{18}$$

et

$$r_l = |R_l(X)| = \sum_{n=1}^{l} r_l(n) = |\mathscr{E}_l|\,. \tag{19}$$

Soit $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_z\}$ avec $x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_z$ et soit $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ pour $1 \leqq n \leqq z$. Lorsque $1 < n \leqq l$, nous avons

$$\{m \colon m \in R_l(X),\ d(\mathfrak{p}[m^{-1}m]) = n\} = R_l(X) \cap M_l(X) = R_l(X_n) - R_l(X_{n-1})\,. \tag{20}$$

En posant $R_l(X_0) = \emptyset$, la relation (20) subsistera même pour $n = 1$. Nous aurons donc

$$r_l(n) = |R_l(X_n) - R_l(X_{n-1})|\,, \tag{21}$$

or comme évidemment $R_l(X_{n-1}) \subset R_l(X_n)$ pour $1 \leqq n \leqq l$, nous voyons que

$$r_l(n) = |R_l(X_n)| - |R_l(X_{n-1})|\,. \tag{22}$$

Il résulte des relations (20) et (10) que l'on a

$$|M_l(X)| = n!\, r_l(n)\,; \tag{23}$$

en le comparant avec (12), nous obtenons

$$r_l(n) = \sum e(\mathfrak{a}) = (n!)^{-1} \sum k(\mathfrak{a})\, c(\mathfrak{a})\,, \tag{24}$$

la sommation étant étendue à toutes les partitions $\mathfrak{a}$ de poids $w(\mathfrak{a}) = l$ et de dimension $d(\mathfrak{a}) = n$, (le nombre de termes à additionner est donc $p_l(n)$).

Les expressions que nous venons d'obtenir pour les nombres $r_l(n)$ et r_l permettent d'établir certaines relations de récurrence. Lorsque p. ex. $m \in R_l(X)$, alors forcément $m(1) = x_1$: dans le mot m l'élément x_1 figure une fois au moins. S'il y figure encore k fois ($k = 0, 1, \ldots, l - 1$), il peut occuper au total $\binom{l-1}{k}$ différentes combinaisons de positions; les $l - k - 1$ positions qui restent sont alors occupées par les éléments $x_2, x_3, \ldots$ seulement. Ecartons du mot m tous les x_1, nous pouvons représenter le reste comme un nouveau mot $m_1' \in S_{l-k-1}(X)$; si $k = l - 1$, alors, bien entendu, $S_0(X) = \emptyset$. Si $k < l - 1$, nous pouvons trouver dans $R_{l-k-1}(X)$ le mot m_1 équivalent à m_1'; nous obtenons m_1 à partir de m_1' en appliquant à X la permutation π: $\pi x_i = x_{i-1}$, pour $i = 2, 3, \ldots, z$, $\pi x_1 = x_z$. Pour $l \geqq 1$ nous obtenons ainsi la relation de récurrence

$$r_l = \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l-1}{k} r_{l-k-1} = \sum_{j=0}^{l-1} \binom{l-1}{j} r_j\,, \tag{25}$$

où nous posons $r_0 = 1$. Avec les valeurs initiales $r_1 = 1$, ou $r_0 = 1$, la formule (25) permet de calculer facilement les valeurs de r_l successivement pour $l = 1, 2, 3, \ldots$.

Tout comme dans le cas de $r_0 = 1$, nous adopterons aussi pour les nombres $r_l(n)$ la convention utile de $r_l(0) = 0$ pour $l > 0$, $r_0(0) = 1$, qui rendra plus simples les formules obtenues. Nous pourrons ainsi écrire dans (19) $r_l = \sum_{n=0}^{l} r_l(n)$ pour $l \geqq 0$.

En ce qui concerne les nombres $r_l(n)$, une relation de récurrence peut être établie comme suit: soit $l \geqq n > 1$ et soit $m \in [R_l(X_n) - R_l(X_{n-1})]$. Soit m' le mot de $R_{l-1}(X)$ défini par la relation $m'(j) = m(j)$ pour $j = 1, 2, \ldots, l - 1$. Nous avons alors évidemment ou bien $m' \in [R_{l-1}(X_n) - R_{l-1}(X_{n-1})]$, ou bien $m' \in R_{l-1}(X_{n-1})$. Dans le premier cas $m(l)$ est un des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dans le deuxième cas $m(l) = x_n$ nécessairement. (Lorsque $l = n$, le premier cas ne peut pas se présenter.) Il en découle donc la relation

$$r_l(n) = n r_{l-1}(n) + r_{l-1}(n - 1)\,, \tag{26}$$

où, bien entendu, $r_{n-1}(n) = 0$; si nous adoptons la convention mentionnée ci-dessus, (26) aura lieu même pour $l \geqq n \geqq 1$.

Jusqu'à présent nous avons toujours supposé $|X| \geqq l$; les formules établies sont donc valables aussi pour $|X| = \infty$, (alors pour tout $l \in P$). Le problème de l'énumération des éléments de l'ensemble $R_l(X)$, dans le cas où $|X| < l$, est résolu en principe par la relation (22) permettant de calculer successivement les nombres $r_{l,n} = |R_l(X_n)|$. De plus, il est encore possible d'établir directement la formule de récurrence

$$r_{l,n} = \sum_{j=0}^{l-1} \binom{l - 1}{j} r_{j,n-1}\,, \tag{27}$$

(avec la convention usuelle de $r_{0,n} = 1$); on peut y procéder d'une manière analogue à celle de l'établissement de la formule (25). La formule (27) avec les valeurs initiales évidentes $r_{l,1} = 1$, $(r_{0,n} = 1)$, permet de calculer successivement les nombres $r_{l,n}$. Nous obtenons p. ex. $r_{l,2} = 2^{l-1}$ pour $l \geqq 2$, puis $r_{l,3} = 1 + \frac{1}{2}(3^{l-1} - 1)$ pour $l \geqq 3$, etc.

Revenons encore aux mots à degré donné. Soit v une application de l'ensemble X_q $(q > 1)$ dans P: $v(x_j) = n_j$, $j = 1, 2, \ldots, q$, de sorte que $d(\delta v) = q$, $w(\delta v) = \sum_{j=1}^{q} n_j$. Soit $m \in R_l(X_q)$, $l = w(\delta v)$, $\delta m = v$. Soit m'_1 le mot de l'ensemble $S_{l-n_1}(X_q)$ que nous obtenons à partir de m en écartant de m tous les x_1 (il y en a $n_1 \geqq 1$ en m, en particulier $m(1) = x_1$). La permutation bien connue π: $\pi x_i = x_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots, q$, $\pi x_1 = x_q$ transforme m'_1 en $\pi m'_1 = m_1 \in R_{l-n_1}(X_{q-1})$. Le degré du mot m_1, c'est évidemment l'application $\delta m_1 = v_1$: $v_1(x_j) = n_{j+1}, j = 1, 2, \ldots, q - 1$, pour laquelle $d(\delta v_1) = q - 1$, $w(\delta v_1) = l - n_1$. Ce raisonnement nous fait voir que pour v: $v(x_j) =$

$= n_j$, $j = 1, 2, \ldots, q$, donné, on a

$$(28) \qquad |\{m\colon m \in R_l(X_q),\ l = w(\delta v),\ q = d(\delta v),\ \delta m = v\}| =$$

$$= \prod_{j=1}^{q} \binom{n_j + n_{j+1} + \ldots + n_q - 1}{n_j - 1} = \frac{(\sum_{j=1}^{q} n_j)!}{\prod_{j=1}^{q} [(n_j - 1)! \sum_{i=j}^{q} n_i]} .$$

Nous pouvons y ajouter encore les égalités bien connues (cf. [6], chap. 6, § 6, p. 124):

$$(29) \qquad |\{v\colon w(\delta v) = l,\ d(\delta v) = q\}| = \binom{l-1}{q-1},$$

et

$$(30) \qquad |\{v\colon w(\delta v) = l\}| = 2^{l-1} .$$

3. CONNEXIONS AVEC LA THÉORIE DES GRAPHES

Dans ce court paragraphe qui a le caractère purement illustratif, nous supposons une connaissance préalable des notions fondamentales de la théorie des graphes. Pour toutes les définitions nécessaires et pour tous les résultats supposés connus, nous renvoyons le lecteur à la monographie [1] dont nous reprenons ici même la notation.

A présent, nous allons formuler quelques problèmes simples de la théorie des graphes qui ont un rapport étroit aux résultats combinatoires du paragraphe précédent, et parfois aussi aux problèmes linguistiques du paragraphe suivant.

Soit $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_z\}$ un ensemble fini, $z \in P$. Combien existe-t-il de graphes transitifs (non-orientés) $G = (X, U)$ (voir [1], chap. 2)?

Tout graphe transitif (X, U) induit une relation d'équivalence sur l'intervalle $\langle 1, z \rangle$: deux nombres $i, j \in \langle 1, z \rangle$ sont équivalents si, et seulement si, le graphe contient l'arête $[x_i, x_j] \in U$. Cette correspondance est alors biunivoque; le nombre de graphes transitifs est donc donné par r_z. Nous voyons en même temps, que les nombres $r_z(n)$, $n = 1, 2, \ldots, z$ nous donnent précisément le nombre de graphes transitifs (X, U) qui ont exactement n composantes.

Nous avons supposé ici que les éléments $x_i \in X$ peuvent être distingués l'un de l'autre; nous savons donc distinguer deux graphes qui ne diffèrent que par une permutation des sommets. Si nous identifions tous ces graphes, le nombre de graphes transitifs différents sera alors p_z, ou $p_z(n)$, n étant le nombre (fixé) de composantes du graphe.

Soient maintenant X et Y deux ensembles finis, $|X| = p$, $|Y| = q$, $p, q \in P$, et soit donné un graphe simple $G = (X, Y, \Gamma)$. Soit $A = \{a_0, a_1\}$ un ensemble comportant deux éléments. Nous associons au graphe G une suite $\{m_1, m_2, \ldots, m_p\}$ de mots de

$S_q(A)$ de la façon suivante: à chaque sommet x_j ($j = 1, 2, \ldots, p$) nous faisons correspondre le mot $m_j \in S_q(A)$ tel que $m_j(i) = a_0$ ($i = 1, 2, \ldots, q$) si et seulement si $y_i \notin \Gamma x_j$ et $m_j(i) = a_1$ si $y_i \in \Gamma x_j$. Il sera alors possible d'exploiter les résultats du paragraphe précédent pour calculer le nombre de graphes simples aux propriétés données, bien que cela ne résolve pas encore tous les problèmes de ce type.

La correspondance qui existe entre les graphes simples d'une part et les suites de mots d'autre part peut encore être généralisée au cas des multigraphes (simples) où il peut y avoir plusieurs arêtes venant d'un sommet $x \in X$ à un sommet $y \in Y$; si dans un tel multigraphe deux sommets sont joints par n arêtes au plus, nous disons que c'est un n-graphe. Il suffit alors de prendre un ensemble $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, avec $n + 1$ éléments, et d'associer au sommet $x \in X$ le mot $m \in S_q(A)$, $q = |Y|$, tel que $m(j) = a_i$, $j = 1, 2, \ldots, p$; $i = 0, 1, \ldots, n$ si, et seulement si, il existe exactement i arêtes venant du sommet x au sommet y_j.

Il y a encore d'autres possibilités de distinguer les arêtes d'un graphe; au lieu d'en augmenter le nombre, on peut p. ex. les colorier. Les éléments de l'ensemble A correspondront alors aux différentes couleurs. De plus, il est possible d'associer à nos graphes (ou multigraphes) des matrices d'un certain type (voir [1], chap. 14); la représentation à l'aide des mots de $S_q(A)$ pourra donc être exploitée aussi pour une étude de ces matrices.

En connexion avec les problèmes linguistiques dont nous parlerons dans le paragraphe suivant on a examiné aussi des graphes simples jouissant des propriétés suivantes: Nous dirons qu'un graphe simple $G = (X, Y, \Gamma)$ est *distinctif*, lorsque pour toute paire de sommets $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, nous avons aussi $\Gamma x_1 \neq \Gamma x_2$; d'une manière analogue, nous dirons que G est *inversement distinctif*, lorsque pour toute paire de sommets $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$, nous avons aussi $\Gamma^{-1} y_1 \neq \Gamma^{-1} y_2$. (Il est évident que le graphe G est inversement distinctif si et seulement si le graphe $G' = (Y, X, \Gamma^{-1})$ est distinctif, et vice versa.) Lorsque le graphe simple (X, Y, Γ) donné est distinctif, tous les mots $m_1, m_2, \ldots, m_p$, $p = |X|$, associés aux sommets $x \in X$, sont nécessairement différents entre eux. La représentation à l'aide de ces mots permet alors de résoudre certains problèmes intéressants pour les graphes de ce type. On peut montrer p. ex. (cf. [1], chap. 10) que la classe chromatique minimum d'un graphe simple (X, Y, Γ), $|X| = p$, $|Y| = q$, $p \geqq q$, qui est distinctif et inversement distinctif, est le plus petit entier k vérifiant l'inégalité $p < \sum_{j=0}^{k} \binom{q}{j}$.

Il serait d'ailleurs possible de généraliser la notion de graphe distinctif aux graphes qui ne sont pas simples, mais cela dépasse déjà les limites du présent article.

Les résultats présentés au paragraphe précédent peuvent également être utiles pour la résolution d'autres problèmes d'énumération dans la théorie des graphes; on peut ainsi déterminer le nombre de graphes jouissant des propriétés données (p. ex. le nombre de graphes connexes), etc.

4. PROBLÈMES LINGUISTIQUES

Dans le présent paragraphe nous voulons faire apparaître les rapports qu'ont les problèmes combinatoires étudiés dans le deuxième paragraphe aux questions linguistiques qui les ont provoqués. Nous ne nous proposons cependant pas de résoudre des problèmes spécifiquement linguistiques; nous ne voulons pas non plus juger ici de la valeur de nos résultats mathématiques pour la linguistique propre.

Nous allons commencer par expliquer sommairement les problèmes traités par M. S. Stati dans [7]. Il s'agit là de caractéristiques quantitatives de l'homonymie morphologique, c'est-à-dire de l'homonymie donnée par le fait que dans le système de la langue considérée, deux (ou plusieurs) catégories grammaticales (p. ex. deux cas dans la déclinaison des substantifs) sont dans certaines circonstances (p. ex. pour les substantifs appartenant à un certain paradigme) exprimées par la même forme flexionnaire (p. ex. la même terminaison); ces catégories sont alors dites homonymes. Considérons, à titre d'exemple, la déclinaison des substantifs latins au singulier[4]): nous avons donc six catégories — cas, exprimées par des terminaisons différentes, déterminées d'une part par la catégorie correspondante, d'autre part par le paradigme auquel appartient le substantif considéré. Nous voyons donc que p. ex. les substantifs de la première déclinaison (paradigme *femina*) ont au génitif et au datif la même terminaison *-ae*, de même le nominatif et le vocatif ont une forme identique: nous avons donc ici deux paires de catégories homonymes.

Du point de vue abstrait, nous pouvons représenter chaque paradigme par une application de l'intervalle $\langle 1, 6 \rangle$ dans l'ensemble F des formes flexionnaires correspondantes, donc par un mot $m \in S_6(F)$. Encore faut-il préciser ce que l'on entend par l'ensemble des formes F. Nous pouvons le comprendre au sens bien large — p. ex. comme le système de toutes les terminaisons possibles que peuvent avoir les mots latins, ou plus étroitement comme le système des terminaisons réellement existantes des substantifs latins; il y a encore d'autres possibilités. Le choix de l'ensemble F est un problème de nature surtout linguistique (plutôt que mathématique). En tout cas, il faut tenir compte que le nombre $|S_6(F)| = |F|^6$ (que M. Stati trouve également intéressant), dépend essentiellement du nombre $|F|$. D'ailleurs, même le nombre de paradigmes „admis" dans la pratique linguistique (et pédagogique) dépend de la finesse de distinction des différentes formes. Il est clair que l'on aboutit ici souvent à des compromis et inconséquences (un exemple classique étant fourni par le nominatif de la troisième déclinaison latine (paradigme *trabs*) où il y a une grande quantité de terminaisons possibles; M. Stati a rencontré les mêmes problèmes.

Pour l'étude de l'homonymie, c'est-à-dire des groupes de catégories homonymes, nous pouvons cependant simplifier notre situation si nous acceptons d'étudier d'abord les classes de paradigmes équivalents au sens suivant: deux paradigmes seront dits équivalents s'ils ont les mêmes groupes de catégories homonymes, c'est-à-dire

[4]) Nous revenons à cet exemple à plusieurs reprises sans répéter toujours tous les détails; c'est à lui aussi que se reportent toutes les données numériques citées ci-dessous.

si les mots de $S_6(F)$ qui leur sont associés sont équivalents au sens de la définition citée au paragraphe 2 (voir aussi [3] et [7], p. 23).[5]) Au lieu de $S_6(F)$, nous nous intéresserons seulement aux classes de $\mathscr{C}_6(F)$; leur nombre dépend de $|F|$ beaucoup moins que $|S_6(F)|$. Comme on peut supposer naturellement $|F| \geqq 6$, le système des classes $\mathscr{C}_6(F)$ pourra être remplacé par l'ensemble des mots de $R_6(X)$ où X est un ensemble abstrait, $|X| = 6$.

Nous obtenons ainsi le nombre concret de $|R_6(X)| = 203$: il pourrait donc y avoir 203 paradigmes de la déclinaison latine. Nous voyons tout de suite que la langue latine n'exploite qu'une petite partie des possibilités qui lui sont ouvertes. La représentation des paradigmes par les mots de $R_6(X)$ nous permet de trouver la solution de plusieurs problèmes concernant le nombre de différents groupes de paradigmes jouissant de certaines propriétés données, car ces problèmes sont ainsi réduits aux problèmes combinatoires étudiés dans le deuxième paragraphe.

Comme le signale déjà M. Stati dans [7], deux catégories distinctes ne peuvent pas être exprimées, dans le système morphologique d'une langue, toujours par la même forme flexionnaire, car il serait alors inutile, du point de vue morphologique, de les distinguer l'une de l'autre. Or, M. Stati en a tiré une conséquence un peu surprenante (cf. aussi [3]): d'après lui, une catégorie est considérée comme distincte de toutes les autres seulement s'il existe, dans le système en question, au moins un paradigme pour lequel cette catégorie est exprimée par une forme non-homonyme, différant de toutes les autres formes de ce paradigme. C'est évidemment une condition trop sévère, bien qu'elle soit accidentellement vérifiée pour la déclinaison latine (au singulier). En réalité, pour distinguer deux catégories l'une de l'autre, il suffit tout simplement qu'il existe un paradigme pour lequel ces deux catégories soient exprimées par deux formes différentes. A l'aide de la représentation par les mots, on montre facilement que, dans le cas général, on peut toujours trouver deux paradigmes qui suffisent pour assurer la distinction de toutes les catégories, et pourtant toutes ces catégories sont homonymes (les homonymies étant, bien entendu, différentes dans les deux paradigmes en question). Les cas exceptionnels, où ceci n'est pas possible, sont ceux où il y a 1, 2, 3 ou 5 catégories à distinguer. Le nombre minimum f de formes différentes figurant dans ces paradigmes vérifie alors l'inégalité $(f - 1)^2 < c \leqq f^2$, où c est le nombre de catégories.

La formule (1) de M. Stati (voir [7]) pour le nombre maximum de catégories homonymes a été établie sous les conditions plus restrictives mentionnées ci-dessus (mais, même dans ce cas, elle n'est pas vraie en général). Si nous adoptons nos conditions plus faibles concernant la discernabilité des catégories et si nous ne distinguons pas les paradigmes équivalents, nous voyons que le nombre maximum $K(p, c)$ de catégories homonymes figurant dans p paradigmes à c catégories est donné par les conditions suivantes:

---

[5]) Ainsi p. ex. les paradigmes *femina* et *res* sont (au singulier) équivalents l'un à l'autre, tandis que les paradigmes *trabs* et *canis* ne le sont pas.

(a) $K(1, c) = 0$; en effet, si nous n'avons qu'un seul paradigme, toutes les formes doivent être distinctes.

(b) Pour $c = 2$, nous avons $K(1, 2) = 0$, $K(2, 2) = 2$; pour $c = 3$, nous avons $K(1, 3) = 0$, $K(2, 3) = 4$, $K(3, 3) = 7$, $K(4, 3) = K(5, 3) = 9$.

(c) $K(2, 5) = 9$.

(d) Pour les autres valeurs de $c > 3$, $p \geqq 2$, nous avons $K(p, c) = pc$ tant que $p \leqq A_0(c)$, où $A_0(c)$ désigne le nombre d'équivalences sur $\langle 1, c \rangle$ telles que chacune de leurs classes contient deux éléments au moins. On a $A_0(1) = 0$, $A_0(2) = A_0(3) = 1$, $A_0(4) = 4$, $A_0(5) = 11$, $A_0(6) = 41$, etc.

(e) Si $p > r_c$, il n'est point possible de trouver p paradigmes non-équivalents.

(f) Pour les cas plus compliqués où $A_0(c) < p \leqq r_c$, nous ne préciserons pas explicitement la dépendance de $K(p, c)$ de la valeur de p; nous nous contentons de donner ici seulement la règle générale: lorsque p augmente d'une unité, $K(p, c)$ augmente de $c - 1$ pour $A_0(c) \leqq p < A_1(c)$, ensuite de $c - 2$ pour $A_1(c) \leqq p < A_2(c)$, etc, où $A_j(c)$ désigne le nombre d'équivalences sur $\langle 1, c \rangle$ telles que parmi leurs classes il y en a j au plus qui ne contiennent qu'un seul élément. (Evidemment, $A_c(c) = r_c$.) Les nombres $A_j(c)$ peuvent être déterminés p. ex. à l'aide des listes de partitions à poids $w(\mathfrak{a}) = c$ donné (voir p. ex. [6], chap. 4, § 1).

Des méthodes analogues peuvent être utilisées pour résoudre d'autres problèmes combinatoires de ce type, p. ex. le problème, considéré par M. Stati, de déterminer le nombre maximum de catégories homonymes si l'on se donne d'avance certaines conditions concernant la grandeur des groupes de catégories homonymes. Il semble néanmoins, que, pour les besoins pratiques, les méthodes ad hoc (énumération explicite) sont les plus efficaces. Il est d'ailleurs également possible de représenter ces problèmes à l'aide de graphes simples aux arêtes coloriées.

Les problèmes de caractéristiques quantitatives de l'homonymie morphologique sont aussi traités dans le travail [2] de M. S. Marcus, où cependant la flexion est comprise dans un sens plus complexe; M. Marcus considère aussi certains rapports syntagmatiques qui aident à éliminer ensuite l'homonymie. Dans notre communication [8], nous avons défini encore une autre caractéristique formelle de l'homonymie morphologique, et qui était fondée sur la notion d'entropie.

Littérature

[1] *C. Berge:* Théorie des graphes et ses applications. Paris 1958.

[2] *S. Marcus:* Description à l'aide de la théorie des ensembles de certains phénomènes morphologiques. Revue de math. pures et appliquées (R.P.R.), *6* (1961), 735—744.

[3] *P. Novák:* Ke kvantifikaci homonymie. Slovo a slovesnost, *23* (1962), 72—75.

[4] *J. Oderfeld, E. Pleszczyńska:* Pewne zastosowania partycji. Zastosowania Matematyki, *6* (1962), 189—198.

[5] *J. Riguet:* Notice sur quelques principes fondamentaux d'énumération. Voir [1], p. 254—268.

[6] *J. Riordan:* An Introduction to Combinatorial Analysis. New York 1958.
[7] *S. Stati:* Caracterul sistematic al omonimiei morfologice. Studii si cercetări lingvistice, *11* (1960), 25—31.
[8] *F. Zítek:* Quelques remarques au sujet de l'entropie du tchèque. Transactions of the Third Prague Conference on Information Theory, ..., Praha 1964, 841—846.

Výtah

O NĚKTERÝCH KOMBINATORICKÝCH ÚLOHÁCH A JEJICH APLIKACÍCH

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

V článku je řešeno několik elementárních kombinatorických úloh, které se vyskytly v souvislosti s aplikací matematických metod v lingvistice. Problematika této první části článku (§ 2) navazuje na Riguetovu stať [5] a doplňuje některé jeho výsledky; znalost hlavních myšlenek práce [5] se přitom předpokládá. Úlohy a jejich řešení jsou pak interpretovány jednak v pojmech teorie grafů (§ 3), jednak v pojmech lingvistických (§ 4). Jde tu především o otázky kvantitativního studia morfologické homonymie. V článku se zpřesňují některé výsledky Statiovy práce [7] a odvozují některé vzorce, např. pro maximální počet homonymních tvarů v daném počtu paradigmat.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯХ

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek), Прага

В статье решены некоторые элементарные комбинаторные задачи, которые появились в связи с применениями математических методов в языкознании. Проблематика первой части работы (§ 2) тесно связана со статьей [5] Риге: некоторые ее результаты здесь дополняются, причем предполагается, что основные идеи статьи [5] читателю известны. Задачи и их решения потом интерпретируются, с одной стороны, в понятиях теории графов (§ 3) и, с другой стороны, в понятиях языкознания (§ 4). Рассматриваются прежде всего вопросы количественного изучения морфологической омонимии. Даются уточнения некоторых результатов работы [7] С. Стати и выводятся некоторые формулы, напр., для максимального числа омонимных форм в данном числе парадигм.