Časopis pro pěstování matematiky

Miroslav Šisler

Příspěvek k iteračním metodám řešení soustav lineárních rovnic s nesymetrickou maticí speciálního typu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 3, 337--343

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108753`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

PŘÍSPĚVEK K ITERAČNÍM METODÁM ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC S NESYMETRICKOU MATICÍ SPECIÁLNÍHO TYPU

MIROSLAV ŠISLER, Praha

(Došlo dne 19. června 1964)

V článku jsou udány postačující podmínky pro konvergenci jisté iterační metody pro řešení soustavy lineárních rovnic s nesymetrickou maticí.

Buď dána soustava lineárních rovnic

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{1}$$

kde $\mathbf{A}$ je regulární čtvercová matice o n řádcích, $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$ jsou sloupcové vektory o n složkách. Podstata iteračních metod tkví v tom, že matici $\mathbf{A}$ rozložíme na tvar

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{C}\,, \tag{2}$$

kde $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ jsou jisté matice, $\mathbf{B}$ je regulární. Posloupnost aproximací $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ pak definujeme vzorcem

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{x}_\nu + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\,. \tag{3}$$

V literatuře je udána řada postačujících podmínek pro to, aby matice $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}$ měla vlastní čísla v modulu menší než 1, tj. aby posloupnost definovaná vztahem (3) konvergovala k řešení $\mathbf{a}$ soustavy (1). Na matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ se kladou různé požadavky, zpravidla to bývá požadavek, aby $\mathbf{A}$ byla symetrická (hermitovská) a positivně definitní či požadavek dominantní diagonály[1]) (viz např. Jakobiho a Gauss-Seidelova metoda). Symetrii a positivní definitnost matice $\mathbf{A}$ lze sice snadno dosáhnout vynásobením soustavy (1) zleva maticí $\mathbf{A}'$ (transponovanou k $\mathbf{A}$), zvyšuje se tím však značně počet aritmetických operací a může vzniknout i systematická chyba, která se průběhem výpočtu neodstraní. Proto jsou zajímavé iterační metody, které je možno přímo užít i v případě nesymetrické matice $\mathbf{A}$. V [1] jsou udány některé posta-

[1]) Matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ má dominantní diagonálu, platí-li

$$a_{ii} \geqq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|\,,\; i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

čující podmínky konvergence posloupnosti (3), je-li $\boldsymbol{A}^{-1} \geqq 0$ či $\boldsymbol{A}^{-1} > 0$ (matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ musí tedy mít vesměs nezáporné či kladné prvky).

V tomto článku udáme další postačující podmínky pro konvergenci posloupnosti (3), je-li $\boldsymbol{A}$ nesymetrická matice.

Věta 1. *Pro čtvercové matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ nechť platí rovnost*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q} - 2\boldsymbol{P}\,, \tag{4}$$

přičemž matice $-(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*)$ [2]) je kladně resp. záporně definitní, $\boldsymbol{Q}$ je kladně resp. záporně definitní hermitovská matice a $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A}$ je regulární. Potom je matice $\boldsymbol{P}$ regulární a matice $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P})$ má vlastní čísla v modulu menší než 1.

Důkaz. Matice $\boldsymbol{P}$ je regulární, neboť je $\boldsymbol{P} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A})$, kde $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A}$ je regulární. Máme nyní dokázat, že je-li λ_i kořenem rovnice

$$\det(\lambda\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}) = 0\,, \tag{5}$$

je $|\lambda_i| < 1$.

Buď λ_i kořenem rovnice (5). Potom existuje vektor $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{o}$ tak, že

$$\lambda_i \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{o}$$

čili

$$\lambda_i(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) + (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) - (\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) = 0\,. \tag{6}$$

Protože je $\boldsymbol{P} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A})$, je postupně

$$\lambda_i(\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) + (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) - (\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) = 0\,,$$

$$\lambda_i(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) - \lambda_i(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) + 2(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) - (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) = 0\,,$$

$$(\lambda_i + 1)(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) - (\lambda_i - 1)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) = 0\,. \tag{7}$$

Platí tedy také (přechodem k číslům komplexně sdruženým ve vztahu (7))

$$(\bar{\lambda}_i + 1)\,\overline{(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i)} - (\bar{\lambda}_i - 1)\,\overline{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i)} = 0\,,$$

$$(\bar{\lambda}_i + 1)(\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) - (\bar{\lambda}_i - 1)(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) = 0\,. \tag{8}$$

Protože je podle předpokladu matice $\boldsymbol{Q}$ hermitovská, je $\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{Q}$, takže platí podle (8)

$$(\bar{\lambda}_i + 1)(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) - (\bar{\lambda}_i - 1)(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) = 0\,. \tag{9}$$

Vynásobíme-li vztah (7) číslem $(\bar{\lambda}_i - 1)$ a vztah (9) číslem $(\lambda_i - 1)$ a takto vzniklé rovnice sečteme, dostaneme vztah

$$[(\lambda_i + 1)(\bar{\lambda}_i - 1) + (\bar{\lambda}_i + 1)(\lambda_i - 1)]\,(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) -$$
$$- |\lambda_i - 1|^2\,[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) + (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i)] = 0\,.$$

---

[2]) $\boldsymbol{A}^*$ značí matici hermitovsky sdruženou k matici $\boldsymbol{A}$.

Úpravou této rovnice dostaneme rovnici

$$(10) \qquad 2(|\lambda_i|^2 - 1)(\mathbf{Q}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = |\lambda_i - 1|^2 ((\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i).$$

Je zřejmé, že nemůže být $\lambda_i = 1$. Kdyby totiž bylo $\lambda_i = 1$, bylo by podle (5)

$$\det(\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}) = \det \mathbf{Q} = 0,$$

což není možné, neboť $\mathbf{Q}$ je podle předpokladu kladně resp. záporně definitní matice. Je tedy $\lambda_i \neq 1$. Jsou-li tedy matice $-(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$ a $\mathbf{Q}$ obě positivně definitní, je $((\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) < 0$ a $(\mathbf{Q}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) > 0$, takže z rovnice (10) plyne, že je $|\lambda_i|^2 - 1 < 0$, tj. $|\lambda_i|^2 < 1$. Je tedy $|\lambda_i| < 1$, což jsme měli dokázat.

Jestliže naopak jsou matice $-(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$ a $\mathbf{Q}$ obě záporně definitní, je $((\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) > 0$ a $(\mathbf{Q}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) < 0$, takže podle (10) opět plyne, že $|\lambda_i|^2 - 1 < 0$ čili $|\lambda_i|^2 < 1$, $|\lambda_i| < 1$.

Tím je věta 1 dokázána.

Věta 2. *Matice $-(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$ buď kladně resp. záporně definitní. Potom existuje rozklad (4) matice $\mathbf{A}$ tak, že $\mathbf{P}$ je regulární trojúhelníková matice a že vlastní čísla matice $\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{P})$ jsou v modulu menší než 1.*

Důkaz. Matici $\mathbf{A}$ pišme ve tvaru $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$, kde $\mathbf{A}_0$ je diagonální matice s diagonálními prvky rovnými diagonálním prvkům matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}_1$ je trojúhelníková matice tvořená prvky matice $\mathbf{A}$ ležícími pod hlavní diagonálou. Buď dále $\mathbf{D}$ reálná diagonální matice. Položme nyní $\mathbf{Q} = \mathbf{D} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^*$. Matice $\mathbf{Q}$ vyhovuje zřejmě předpokladům věty 1, neboť je hermitovská a v případě, že prvky matice $\mathbf{D}$ jsou vesměs kladná resp. záporná čísla o dostatečně velké absolutní hodnotě, je matice $\mathbf{Q}$ positivně resp. záporně definitní. Ze vztahu

$$\mathbf{Q} - \mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^* - \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 = (\mathbf{D} - \mathbf{A}_0) + (\mathbf{A}_1^* - \mathbf{A}_2)$$

dále zřejmě plyne, že matice $\mathbf{Q} - \mathbf{A}$ je trojúhelníková. Matice $\mathbf{Q} - \mathbf{A}$ je kromě toho regulární, neboť diagonální matice $\mathbf{D} - \mathbf{A}_0$ má vesměs nenulové prvky, pokud prvky matice $\mathbf{D}$ mají dostatečně velkou absolutní hodnotu. Odtud plyne, že i matice $\mathbf{P}$ je trojúhelníková a regulární, neboť platí podle (4) $\mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q} - \mathbf{A})$. Jsou tedy splněny předpoklady věty 1, takže matice $\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{P})$ má vlastní čísla v modulu menší než 1, přičemž $\mathbf{P}$ je regulární trojúhelníková matice.

Poznámka k větě 1. Zvláště jednoduché jsou předpoklady věty 1 v případě, že matice $\mathbf{A}$ je speciálního tvaru

$$(11) \qquad \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{S},$$

kde $\mathbf{A}_0$ značí stejnou diagonální matici jako výše, $\mathbf{S}$ je antisymetrická matice, tj. platí rovnost $\mathbf{S} = -\mathbf{S}^*$. Potom je totiž

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}_0^* + \mathbf{S}^* = \bar{\mathbf{A}}_0 - \mathbf{S},\text{[3]} \quad \mathbf{A} + \mathbf{A}^* = \mathbf{A}_0 + \mathbf{S} + \bar{\mathbf{A}}_0 - \mathbf{S} = \mathbf{A}_0 + \bar{\mathbf{A}}_0.$$

[3]) $\bar{\mathbf{A}}_0$ značí komplexně sdruženou matici k $\mathbf{A}_0$.

Ve větě 1 pak stačí předpokládat, že reálné části diagonálních prvků matice $\mathbf{A}$ jsou vesměs záporná resp. kladná čísla.

Matici $\mathbf{A}$ nyní rozložme na tvar (2), kde $\mathbf{B} = -\mathbf{P}$ ($\mathbf{B}$ je tedy regulární) a $\mathbf{C} = -(\mathbf{Q} - \mathbf{P})$. Iterační metoda je pak definována vztahem

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{P})\,\mathbf{x}_\nu - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}\,. \tag{12}$$

Platí pak tato věta:

Věta 3. *Buď* $\mathbf{x}_0$ *libovolný vektor,* $\mathbf{a}$ *řešení soustavy* (1) *a matice* $\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ *nechť splňují předpoklady věty* 1. *Potom konverguje posloupnost aproximací* $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ *definovaná vztahem* (12) *k řešení* $\mathbf{a}$; *přitom existuje norma vektoru a jí odpovídající norma matice tak, že platí tyto odhady chyby*:

$$d_{\nu+1} \leqq q d_\nu\,, \tag{13}$$

$$\delta_{\nu+1} \leqq q \delta_\nu\,, \tag{14}$$

$$\delta_\nu \leqq \frac{1}{1-q}\, d_\nu\,, \tag{15}$$

$$\delta_{\nu+1} \leqq \frac{q}{1-q}\, d_\nu\,, \tag{16}$$

kde $0 < q < 1$, $d_\nu = \|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu\|$, $\delta_\nu = \|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}\|$ a $\nu = 0, 1, 2, \ldots$.

Důkaz: Protože jsou podle věty 1 všechna vlastní čísla matice $\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{P})$ v modulu menší než 1, konverguje podle známé věty posloupnost aproximací definovaná vztahem (12), kde $\mathbf{x}_0$ je libovolný počáteční vektor. Ze vztahu (12) nyní snadno plynou pro $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ vztahy

$$\mathbf{x}_{\nu+2} - \mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{P})(\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu)\,, \tag{17}$$

$$\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{a} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{P})(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a})\,. \tag{18}$$

Protože jsou vlastní čísla matice $\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{P})$ v absolutní hodnotě menší než 1, existuje jak známo norma vektoru a jí odpovídající norma matice taková, že je $\|\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{P})\| = q < 1$. Ze (17) a (18) nyní ihned plynou odhady (13) a (14).

Podle trojúhelníkové nerovnosti dále platí

$$\delta_\nu \leqq \delta_{\nu+1} + d_\nu\,.$$

Je tedy postupně

$$\delta_\nu \leqq q\delta_\nu + d_\nu\,, \quad \delta_\nu \leqq \frac{1}{1-q}\, d_\nu\,. \tag{15}$$

Z odhadu (15) a (13) dále plyne

$$\delta_{\nu+1} \leqq \frac{1}{1-q} d_{\nu+1} \leqq \frac{q}{1-q} d_\nu ,$$

což je odhad (16). Tím je věta 3 dokázána.

Na závěr učiňme několik poznámek k numerickému výpočtu. Podle (12) lze postupné aproximace počítat ze vzorce

$$\mathbf{P}\mathbf{x}_{\nu+1} = (\mathbf{Q} - \mathbf{P})\, \mathbf{x}_\nu - \mathbf{b} \tag{19}$$

nebo ze vzorce

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu) = \mathbf{A}\mathbf{x}_\nu - \mathbf{b} , \tag{20}$$

který ihned plyne ze vzorce (19). Z věty 2 je patrno, že vždy lze rozložit matici $\mathbf{A}$ podle (4) tak, že $\mathbf{P}$ je trojúhelníková regulární matice, takže jednotlivé iterace lze snadno počítat ze vzorce (20). V případě, že matice $\mathbf{A}$ je tvaru (11), je při výše uvedené volbě matice $\mathbf{P}$ i matice $\mathbf{Q} - \mathbf{P}$ trojúhelníková, takže lze s výhodou užít vzorce (19). (Je totiž

$$\mathbf{Q} - \mathbf{P} = \mathbf{Q} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{Q} - \mathbf{A}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{Q} + \mathbf{A}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^* + \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{A}_0) + \mathbf{A}_1 ,$$

neboť $\mathbf{A}_2 = -\mathbf{A}_1^*$.)

K odhadu chyby v případě, že při zvolené normě je $q = \|\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{P})\| < 1$, poznamenejme, že není třeba počítat obtížně číslo $q = \|\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{P})\|$, neboť se dá očekávat, že pro dostatečně velké ν je $q \approx d_{\nu+1}/d_\nu$. Nastane-li tedy při praktickém výpočtu případ, že podíly $d_{\nu+1}/d_\nu$ se pro dostatečně velké ν málo mění a jsou stále menší než 1, usuzujeme, že nastal výše zmíněný případ a podle (15) a (16) pak přibližně platí odhady

$$\delta_\nu \approx \frac{1}{1 - (d_\nu/d_{\nu-1})} d_\nu = \frac{d_{\nu-1} d_\nu}{d_{\nu-1} - d_\nu} \tag{21}$$

a

$$\delta_{\nu+1} \approx \frac{d_\nu/d_{\nu-1}}{1 - (d_\nu/d_{\nu-1})} d_\nu = \frac{d_\nu^2}{d_{\nu-1} - d_\nu} . \tag{22}$$

Literatura

[1] *R. S. Varga:* Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, Inc., 1962.

Резюме

ВЗНОС К ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

МИРОСЛАВ ШИСЛЕР (Miroslav Šisler), Прага

В работе приводится достаточное условие для сходимости одного итерационного метода для решения системы линейных уравнений $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{A}$ — несимметрическая матрица специального типа.

Теоремы 1 и 2 содержат, в сущности, это утверждение: Пусть $\boldsymbol{A}$ — квадратная матрица и $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*$ — отрицательно или положительно определенная матрица. Если матрица $\boldsymbol{A}$ написана в виде $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q} - 2\boldsymbol{P}$, где $\boldsymbol{Q}$ — положительно или отрицательно определенная эрмитова матрица и $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A}$ — неособенная матрица, то матрица $\boldsymbol{P}$ неособенная, и модули особенных значений матрицы $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P})$ все меньше единицы. Матрицу $\boldsymbol{A}$ даже можно разложить выше указанным способом так, что матрица $\boldsymbol{P}$ треугольная.

В доказательстве теоремы 2 показан тоже метод нахождения какого-нибудь разложения. Если мы напишем матрицу $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ в виде $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$, где $\boldsymbol{A}_0$ — диагональная матрица с элементами a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$ и $\boldsymbol{A}_1 = (b_{ij})$ — треугольная матрица, для которой $b_{ij} = a_{ij}$, $i > j$ и $b_{ij} = 0$, $i \leqq j$, то можно положить, например, $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_1^*$ и $\boldsymbol{P} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A})$, где $\boldsymbol{D}$ — диагональная матрица с положительными или отрицательными элементами с достаточно большими модулями.

Содержание теоремы 3 является утверждение, что итерационный метод, определенный формулой (12), сходится к решению $\boldsymbol{a}$ системы $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ для любого начального вектора $\boldsymbol{x}_0$. Для погрешности даются формулы (13), (14), (15), (16), (21), (22), где $\delta_\nu = \|\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}\|$, $d_\nu = \|\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu\|$. Вместе с тем мы должны выбрать такую норму матрицы, для которой $q = \|\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P})\| < 1$. Из формулы (12) вытекает непосредственно формула (20), из которой следует, что мы при каждом шаге решаем только систему линейных уравнений с треугольной матрицей.

Специальным случаем несимметрической матрицы $\boldsymbol{A}$ является матрица вида $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{S}$, где $\boldsymbol{A}_0$ — диагональная и $\boldsymbol{S}$ — кососимметрическая матрица. Тогда можно предположение, касающееся матрицы $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*$ в теореме 1 заменить предположением, что действительные части диагональных элементов матрицы $\boldsymbol{A}$ все отрицательны или положительны.

Zusammenfassung

BEITRAG ZU DEN ITERATIONSVERFAHREN FÜR DIE LÖSUNG DER SYSTEME LINEARER GLEICHUNGEN MIT NICHTSYMMETRISCHER MATRIX VOM SPEZIELLEN TYPUS

MIROSLAV ŠISLER, Praha

In der Arbeit wird eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz eines Iterationsverfahrens zur Lösung eines Systems linearer Gleichungen $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ angegeben, wo $\mathbf{A}$ eine nichtsymmetrische Matrix vom speziellen Typus ist. Der Satz 1 und 2 enthält diese Behaptungen: Es sei $\mathbf{A}$ eine quadratische Matrix und $\mathbf{A} + \mathbf{A}^*$ eine negativ bzw. positiv definite Matrix. Falls man die Matrix $\mathbf{A}$ in der Form $\mathbf{A} = \mathbf{Q} - 2\mathbf{P}$ ausdrückt, wo $\mathbf{Q}$ eine positiv bzw. negativ definite Hermitesche Matrix und $\mathbf{Q} - \mathbf{A}$ eine nichtsinguläre Matrix ist, dann ist die Matrix $\mathbf{P}$ nichtsingulär und alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{P})$ sind im Absolutbetrag kleiner als 1. Die Matrix $\mathbf{A}$ kann man sogar so zerlegen, dass $\mathbf{P}$ eine Dreiecksmatrix ist.

Der Beweis des Satzes 2 enthält auch die Methode für die Verwirklichung einer solcher Zerlegung. Falls man die Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ in der Form $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ schreibt, wo $\mathbf{A}_0$ die Diagonalmatrix mit den Elementen a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, und $\mathbf{A}_1 = (b_{ij})$ die Dreiecksmatrix, für die $b_{ij} = a_{ij}$, $i > j$, und $b_{ij} = 0$, $i \leqq j$, gilt, bezeichnet, kann man z.B. $\mathbf{Q} = \mathbf{D} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^*$ und $\mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q} - \mathbf{A})$ wählen. Dabei ist $\mathbf{D}$ eine Diagonalmatrix mit positiven bzw. negativen Elementen von genügend grössen Absolutbetrag.

Der Satz 2 ethält die Behauptung, dass das durch die Formel (12) definierte Iterationsverfahren bei beliebigem Anfangsvektor $\mathbf{x}_0$ zur Lösung $\mathbf{a}$ des Systems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konvergiert. Es gelten dabei die Fehlerabschätzungen (13), (14), (15), (16), (21), (22), wo $\delta_\nu = \|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}\|$, $d_\nu = \|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu\|$ ist. Man wählt dabei eine solche Norm des Vektors und die entsprechende Norm der Matrix, dass die Ungleichung $q = \|\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{P})\| < 1$ gilt.

Aus der Formel (12) folgt sofort die Formel (20), sodass man bei jedem Schritt ein System linearer Gleichungen mit einer Dreiecksmatrix löst.

Wenn die nichtsymmetrische Matrix $\mathbf{A}$ von spezieller Form $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{S}$ ist, wo $\mathbf{A}_0$ eine Diagonalmatrix und $\mathbf{S}$ eine schiefsymmetrische Matrix ist, kann man die Voraussetzung über die Matrix $\mathbf{A} + \mathbf{A}^*$ im Satze 1 durch die Voraussetzung ersetzen, dass die alle reellen Teile der Diagonalelemente der Matrix $\mathbf{A}$ negative bzw. positive Zahlen sind.