Václav Doležal

O jedné přibližné konstrukci inversního operátoru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 2, 173--177

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108744

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

O JEDNÉ PŘIBLIŽNÉ KONSTRUKCI INVERSNÍHO OPERÁTORU

VÁCLAV DOLEŽAL, Praha

(Došlo dne 5. prosince 1961)

Článek je věnován jedné přibližné metodě konstrukce inversního operátoru; uvažují se operátory, zavedené v práci [1].

V dalším bude předpokládáno, že čtenář je obeznámen s některými skutečnostmi z práce [1]. Tam bylo ukázáno, že konstrukce inversního operátoru k operátoru $A \in \mathfrak{A}_n^*$ redukuje se v podstatě na stanovení řešení rovnice $H(t, \tau) + W(t, \tau) + \int_\tau^t W(t, \xi) H(\xi, \tau) \,\mathrm{d}\xi = 0$; přitom pro řešení $H(t, \tau)$ platí vzorec $H(t, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i W^{\times i}$. Pro numerický výpočet není však tento tvar příliš výhodný. Uvažme totiž například ten případ, kdy

$$W(t, \tau) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, b_i(\tau)\,; \tag{1}$$

potom zřejmě $W^{\times 2}$ má rovněž tvar (1), ovšem se $2n^2$ členy, $W^{\times 3}$ se $4n^3$ členy atd.

Zde ukážeme, že je-li $W(t, \tau)$ analytickou funkcí, že pak je možno řešení $H(t, \tau)$ obdržet ve tvaru mocninné řady, jejíž koeficienty lze snadno stanovit; posléze všimneme si případu, kterak je touto metodou možno stanovit přibližně operátor A^{-1}, i když příslušná funkce $W(t, \tau)$ není analytická.

Buď $K_T = E[z : |z| < T]$, $\bar{K}_T$ její uzávěr; obdobnými metodami jako v [1] lze snadno dokázat, že platí tvrzení:

Věta 1. *Buď $W(z, \omega)$ analytická na $K_R \times K_R$; pak existuje jediná na $K_R \times K_R$ analytická funkce $H(z, \omega)$ tak, že platí*

$$H(z, \omega) + W(z, \omega) + \int_\omega^z W(z, \xi)\, H(\xi, \omega) \,\mathrm{d}\xi = 0 \tag{2}$$

(integrace se béře po úsečce spojující body z a ω). Nadto platí

a) $H(z, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i W^{\times i}(z, \omega)$, *přičemž řada konverguje stejnoměrně v každém*

$\bar{K}_{R'} \times \bar{K}_{R'}$, $R' < R$, *a kde* $W^{\times k}(z, \omega) = \int_\omega^z W(z, \xi) W^{\times(k-1)}(\xi, \omega) \, d\xi$, $k = 2, 3, \ldots$, $W^{\times 1} = W$.

b) $|H(z, \omega)| \leqq M \exp M|z - \omega|$ *pro* $(z, \omega) \in \bar{K}_T \times \bar{K}_T$, *kde*

$$M(T) = \max_{(z,\omega)\in\bar{K}_T\times\bar{K}_T} |W(z, \omega)| , \quad 0 < T < R .$$

Každý operátor $A \in \mathfrak{A}_n^*$ lze representovat rovnicí (srv. [1])

$$Ax = \{a(x^{(-n)} + [Wx^{(-n)}])\}^{(n+r(A))} , \tag{3}$$

kde $a \in \mathbf{F}_0$, $a \neq 0$ v $\langle 0, \infty)$, $W(t, \tau) \in \mathbf{W}_0$.

Nyní můžeme již vyslovit větu:

Věta 2. *Buď operátor* $A \in \mathfrak{A}_n^*$ *definován rovnicí* (3), *a nechť funkce* $W(z, \omega)$ *je analytická na* $K_R \times K_R$. *Nechť* $W(z, \omega)$ *je v* $K_R \times K_R$ *representována rozvojem*

$$W(z, \omega) = \sum_{i,k=0}^{\infty} b_{ik} z^i \omega^k , \tag{4}$$

a definujme čísla a_{ik}, $i, k = 0, 1, 2, \ldots$ *rovnicemi*

$$b_{ik} + a_{ik} + \sum_{\varrho+\sigma+\mu=i-1} \frac{1}{\sigma + \mu + 1} b_{\varrho\sigma} a_{\mu k} - \sum_{\sigma+\mu+\nu=k-1} \frac{1}{\sigma + \mu + 1} b_{i\sigma} a_{\mu\nu} = 0 . \tag{5}$$

Buď dále operátor $B_m \in \mathfrak{A}_{n+r(A)}^*$ $(m \geqq 0$ *celé*$)$ *definován rovnicí*

$$B_m x = \left\{\frac{1}{a} x^{(-n-h)} + \left[H_m\left(\frac{1}{a} x^{(-n-h)}\right)\right]\right\}^{(n)}, \quad h = r(A) , \tag{6}$$

kde

$$H_m(t, \tau) = \sum_{i,k=0}^{i+k=m} a_{ik} t^i \tau^k . \tag{7}$$

Pak platí

$$\|A^{-1} - B_m\|_n \leqq \alpha(t) \, M \frac{T^2}{T - t} \left(\frac{t}{T}\right)^{m+2} \exp 2MT \tag{8}$$

pro každé t, $0 < t < T < R$, *kde* $\alpha(t) = \max_{0\leqq\tau\leqq t} |a^{-1}(\tau)|$, $M = \max_{(z,\omega)\in\bar{K}_T\times\bar{K}_T} |W(z, \omega)|$.

Důkaz. Sestrojme k funkci $W(z, \omega)$ funkci $H(z, \omega)$ podle věty 1. $H(z, \omega)$ je rovněž analytická v $K_R \times K_R$ a platí pro ni odhad b). Nechť

$$H(z, \omega) = \sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik} z^i \omega^k . \tag{9}$$

Ježto je splněna rovnice (2) a řady (4), (9) konvergují stejnoměrně a absolutně v každém $\bar{K}_T \times \bar{K}_T \subset K_R \times K_R$, můžeme psát

$$W + H + W \times H = \sum_{i,k=0}^{\infty} (b_{ik} + a_{ik})\, z^i \omega^k + \int_{\omega}^{z} \Big(\sum_{\varrho,\sigma=0}^{\infty} b_{\varrho\sigma} z^\varrho \xi^\sigma \Big) \Big(\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} \xi^\mu \omega^\nu \Big)\, d\xi =$$

$$= \sum_{i,k=0}^{\infty} (b_{ik} + a_{ik})\, z^i \omega^k + \sum_{\varrho,\sigma,\mu,\nu}^{\infty} b_{\varrho\sigma} a_{\mu\nu} z^\varrho \omega^\nu \int_{\omega}^{z} \xi^{\sigma+\mu}\, d\xi =$$

$$= \sum_{i,k=0}^{\infty} (b_{ik} + a_{ik})\, z^i \omega^k + \sum_{\varrho,\sigma,\mu,\nu}^{\infty} \frac{1}{\sigma + \mu + 1}\, b_{\varrho\sigma} a_{\mu\nu} z^{\varrho+\sigma+\mu+1} \omega^\nu -$$

$$- \sum_{\varrho,\sigma,\mu,\nu}^{\infty} \frac{1}{\sigma + \mu + 1}\, b_{\varrho\sigma} a_{\mu\nu} z^\varrho \omega^{\sigma+\mu+\nu+1} = 0\,.$$

Odtud podle unicity rozvoje plyne ihned vzorec (5). Zvolme nyní čísla $0 < t < T < R$; označíme-li $N = \max\limits_{(z,\omega)\in \bar{K}_T \times \bar{K}_T} |H(z, \omega)|$ a použijeme-li známé nerovnosti $|a_{ik}| \leqq N T^{-i-k}$, můžeme psát pro každé $(z, \omega) \in \bar{K}_t \times \bar{K}_t$:

$$(10) \qquad |H(z, \omega) - H_m(z, \omega)| = \Big| \sum_{i+k=m+1}^{\infty} a_{ik} z^i \omega^k \Big| \leqq \sum_{i=m+1}^{\infty} (i + 1)\, N \left(\frac{t}{T}\right)^i .$$

Ježto rovnice (2) je splněna pro reálná z, ω, zejména pro ta, pro něž $0 \leqq \omega \leqq z < R$, značí to, že $H(t, \tau) \equiv \tilde{H}(t, \tau)$ pro $0 \leqq \tau \leqq t < R$, kde $\tilde{H}(t, \tau)$ je řešením rovnice

$$(11) \qquad \tilde{H}(t, \tau) + W(t, \tau) + \int_{\tau}^{t} W(t, u)\, \tilde{H}(u, \tau)\, du = 0\,; \quad 0 \leqq \tau \leqq t < \infty\,.$$

Avšak zároveň platí (srv. [1])

$$(12) \qquad A^{-1} x = \left\{ \frac{1}{a}\, x^{(-n-h)} + \left[\tilde{H} \left(\frac{1}{a}\, x^{(-n-h)} \right) \right] \right\}^{(n)} .$$

Definujeme-li tedy operátor B_m rovnicí (6), můžeme pro každé t splňující nerovnost $0 \leqq t \leqq T < R$ psát (klademe $x^{(-n-h)} = X$, kde X je regulární distribuce):

$$(13) \qquad (A^{-1} - B_m)\, x = \left\{ \int_0^t \{H(t, \tau) - H_m(t, \tau)\}\, a^{-1}(\tau)\, X(\tau)\, d\tau \right\}^{(n)} .$$

Odtud podle definice „normy" distribuce s pomocí (10) plyne:

$$\|(A^{-1} - B_m)\, x\|_n = \int_0^t \left| \int_0^\tau \{H(\tau, \sigma) - H_m(\tau, \sigma)\}\, a^{-1}(\sigma)\, X(\sigma)\, d\sigma \right| d\tau \leqq$$

$$\leqq \int_0^t \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} (i + 1)\, N \left(\frac{\tau}{T}\right)^i \right) \alpha(\tau) \int_0^\tau |X(\sigma)|\, d\sigma\, d\tau \leqq$$

$$\leqq \alpha(t) \int_0^t |X(\sigma)|\, d\sigma \,.\, \int_0^t \sum_{i=m+1}^{\infty} (i + 1)\, N \left(\frac{\tau}{T}\right)^i d\tau = \alpha(t)\, N\, \frac{T^2}{T - t} \left(\frac{t}{T}\right)^{m+2} \|x\|_{n+h}\,.$$

Odtud však již podle definice „normy" operátoru plyne okamžitě odhad (8).

Z právě dokázané věty vyplývá, že operátor A^{-1} můžeme „aproximovat" operátory s polynomiálními jádry s libovolnou přesností. Všimněme si zároveň, že z rovnice (5) lze čísla a_{ik} stanovit postupným výpočtem. Vskutku, nechť jsou už určena všechna čísla a_{ik} pro $i + k \leqq n - 1$; potom z (5) plyne, je-li tam $i + k = n$, že v prvé sumě je $\mu \leqq i - 1$, a tedy $\mu + k \leqq n - 1$. Obdobně ve druhé sumě je $\mu + \nu \leqq k - 1 \leqq \leqq n - 1$, c. b. d.

Poznámka. Klademe-li v rovnici (2) $z = \omega$, je $H(z, z) + W(z, z) = 0$. Odtud pomocí (4), (9) plyne $\sum_{i=0}^{m} (b_{i,m-i} + a_{i,m-i}) = 0$; $m = 0, 1, 2, \ldots$ Této okolnosti lze využít ke kontrole numerického výpočtu.

Všimněme si nakonec případu, kdy v representaci (3) operátoru $A \in \mathfrak{A}_n^*$ funkce $W(t, \tau)$ není obecně analytická. Zvolíme-li $T > 0$ a $\varepsilon > 0$, pak podle Weierstrassovy věty existuje polynom $P(t, \tau)$ tak, že pro každé $0 \leqq \tau \leqq t \leqq T$ bude $|W(t, \tau) - P(t, \tau)| < \varepsilon$. Položíme-li pak $\bar{A}x = \{a(x^{(-n)} + [Px^{(-n)}])\}^{(n+r(A))}$ a sestrojíme-li k operátoru $\bar{A}$ operátor B_m výše popsaným způsobem, potom platí

$$\|A^{-1} - B_m\|_n \leqq \|A^{-1} - \bar{A}^{-1}\|_n + \|\bar{A}^{-1} - B_m\|_n . \tag{14}$$

Pro „normu" $A^{-1} - \bar{A}^{-1}$ pak platí odhad $\|A^{-1} - \bar{A}^{-1}\|_n \leqq M\varepsilon t$, $0 \leqq t \leqq T$, kde konstanta M závisí pouze na A a T. (Srv. [1], věta 21.) Zvolíme-li tedy ε dostatečně malé a m velké, bude A^{-1} „aproximován" operátorem B_m s libovolnou přesností.

Literatura

[1] *Doležal V.*: O jistých lineárních operátorech, Čas. pro pěst. mat., *87* (1962), č. 2, 198—224.

Резюме

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ ПОСТРОЕНИИ ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА

ВАЦЛАВ ДОЛЕЖАЛ (Václav Doležal), Прага

В статье приводится приближенный метод построения обратного оператора; рассматриваются операторы, введенные в работе [1]. Показано, что каждый обратный оператор можно аппроксимировать с любой точностью операторами с полиномиальным ядром.

Zusammenfassung

ÜBER EINE APPROXIMATIVE KONSTRUKTION DES INVERSEN OPERATORS

VÁCLAV DOLEŽAL, Praha

Im Artikel wird eine approximative Methode der Konstruktion des inversen Operators angegeben; es werden die in Arbeit [1] eingeführten Operatoren betrachtet. Es wird gezeigt, dass jeder inverse operator durch Operatoren mit polynomialen Kernen beliebig genau approximiert werden kann.