Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

INFLEXNÍ BODY NĚKTERÝCH ROVINNÝCH KVARTIK

BOHUMIL BYDŽOVSKÝ, Veselí nad Lužnicí

(Došlo dne 1. září 1962)

Má-li rovinná kvartika inflexní body v počtu, který je násobkem čtyř, vzniká otázka, mohou-li inflexní body býti úplným průsekem kvartiky s křivkou vhodného stupně. Tato otázka je zde řešena pro dvě kvartiky rodu jedna, totiž pro kvartiku binodální (12 inflexních bodů) a pro kvartiku bikuspidální (8 inflexních bodů), a pro jednu kvartiku rodu nula, totiž kvartiku s dvěma obyčejnými uzly a jedním bodem úvratu (4 inflexní body). V prvních dvou případech jsou nalezeny geometrické podmínky pro to, aby inflexní body byly na kvartice vyťaty křivkou třetího, resp. druhého stupně, v případě třetím je ukázáno, že inflexní body kvartiky nemohou ležeti v přímce.

Užitím Plückerova vzorce pro inflexní body se zjistí, že je pět případů, kdy počet inflexních bodů kvartiky je násobkem jejího stupně. Jsou to:

kvartika bez singulárních bodů — má 24 inflexní body,

kvartika s jedním obyčejným bodem úvratu bez dalších singularit — má 16 singulárních bodů,

kvartika s dvěma obyčejnými uzly bez další singularity — má 12 inflexních bodů,

kvartika s dvěma obyčejnými body úvratu bez další singularity — má 8 inflexních bodů a konečně

kvartika s dvěma obyčejnými uzly a jedním (obyčejným) bodem úvratu — má 4 inflexní body.

Vzniká otázka, zda-li v těchto případech mohou býti inflexní body kvartiky úplným jejím průsekem s křivkou příslušného stupně. Pro kvartiku bez singularit tomu tak je, její inflexní body jsou soustavou průsečíků kvartiky s křivkou 6. stupně, totiž s jejím Hessiánem. V tomto článku se zabývám třemi posledními z uvedených případů.

I. KVARTIKA BINODÁLNÍ

Tento případ v podstatě rozřešil již H. W. RICHMOND [1]. Podávám nicméně nové řešení tohoto případu, ježto metoda, které užívám, vede k bohatším geometrickým výsledkům a zároveň zahrnuje řešení dalšího případu, totiž kvartiky s dvěma body úvratu.

Zvolíme uzly kvartiky za souřadnicové body O_1, O_2 a za bod O_3 zvolíme průsečík přímky oddělující harmonicky spojnici O_1O_2 od tečen kvartiky v bodě O_1 s přímkou oddělující harmonicky touž spojnici od tečen kvartiky v bodě O_2. V soustavě souřadnic takto volené má kvartika rovnici

$$(1)\quad f(x) \equiv ax_3^4 + x_3^3(b_1x_1 + b_2x_2) + x_3^2(c_0x_1^2 + c_1x_1x_2 + c_2x_2^2) + dx_1^2x_2^2 = 0\,.$$

Snadno spočítáme, že Hessián této křivky je dán rovnicí

$$\begin{aligned}(2)\quad H(x) \equiv {} & (2c_0x_3^2 + 2dx_2^2)(2c_2x_3^2 + 2dx_1^2)\left[12ax_3^2 + 6x_3(b_1x_1 + b_2x_2) + \right.\\ & \left. + 2(c_0x_1^2 + c_1x_1x_2 + c_2x_2^2)\right] + 2(c_1x_3^2 + 4dx_1x_2)(3b_1x_3^2 + 4c_0x_1x_3 + 2c_1x_2x_3)\,.\\ & .\,(3b_2x_3^2 + 2c_1x_1x_3 + 4c_2x_2x_3) -\\ & - (2c_0x_3^2 + 2dx_2^2)(3b_2x_3^2 + 2c_1x_1x_3 + 4c_2x_2x_3)^2 -\\ & - (2c_2x_3^2 + 2dx_1^2)(3b_1x_3^2 + 4c_0x_1x_3 + 2c_1x_2x_3)^2 -\\ & - \left[12ax_3^2 + 6x_3(b_1x_1 + b_2x_2) + 2(c_0x_1^2 + c_1x_1x_2 + c_2x_2^2)\right](c_1x_3^2 + 4dx_1x_2)^2 = 0\,.\end{aligned}$$

Uvažujme soustavu křivek

$$(3)\qquad H + Qf = 0\,,$$

kde Q je kvadratická forma o koeficientech a_{ij}. Všechny tyto křivky obsahují inflexní body křivky f. Určíme koeffcienty a_{ij} tak, aby bylo možno z levé strany rovnice (3) vytknouti x_3 v nejvyšší možné mocnině. Snadným výpočtem se zjistí, že pro

$$a_{11} = 24c_0d\,,\quad a_{22} = 24c_2d\,,\quad a_{12} = 12c_1d\,,\quad a_{13} = 36b_1d\,,\quad a_{23} = 36b_2d$$

lze z levé strany (3) vytknouti x_3^2, při čemž koeficient a_{33} je libovolný. I platí pro takto volenou formu Q

$$(4)\qquad H + Qf \equiv x_3^2K^4\,,$$

kde K^4 je forma čtvrtého stupně určená rovnicí

$$\begin{aligned}(5)\quad K^4 \equiv {} & \left[H + (24c_0dx_1^2 + 24c_2dx_2^2 + 24c_1dx_1x_2 + 72b_1dx_1x_3 + 72b_2dx_2x_3)f\right] :\\ & : x_3^2 + a_{33}f\,.\end{aligned}$$

Rovnice

$$(6)\qquad K^4 = 0$$

vyjadřuje při proměnném a_{33} svazek křivek čtvrtého stupně, které vesměs obsahují všechny inflexní body kvartiky f, jak ukazuje identita (4). Ze vzorce (5) se snadno vypočítá, že koeficienty formy K^4 při x_1^4 a x_2^4 jsou rovny nule, což znamená, že křivka K^4 prochází body O_1, O_2 a ovšem jednoduše, ježto jinak by neprotínala kvartiku f ještě v dalších dvanácti bodech. Nalezli jsme tím známý výsledek A. BRILLA [2], podle kterého je 12 inflexních bodů binodální kvartiky vytínáno kvartikami svazku, k jehož basi náležejí oba uzly kvartiky. Kvartiky tohoto svazku mají v každém uzlu společnou tečnu, neboť jen tak je možno, že jedna křivka svazku, totiž kvartika daná, má tyto body za dvojnásobné.

Aby inflexní body kvartiky f ležely na kubice, k tomu je nutno a stačí, aby jedna z kvartik nalezeného svazku se rozpadla na tuto kubiku a přímku spojující oba uzly, čili, aby pro tuto kvartiku koeficient při x_3^2 v levé straně rovnice (4) byl identicky roven nule. Snadný výpočet ukazuje, že tento koeficient je

$$72c_0c_1dx_1^3x_2 + (192c_0c_2d + 24c_1^2d - 144ad^2 + a_{33}d)\,x_1^2x_2^2 + 72c_1c_2dx_1x_2^3\,.$$

Krátíme číslem d ($\neq 0$, neboť jinak by kvartika f byla rozložitelná) a dostaneme tedy tři podmínky:

$$72c_0c_1 = 0\,, \quad 192c_0c_2 + 24c_1^2 - 144ad + a_{33} = 0\,, \quad 72c_1c_2 = 0\,.$$

Prostřední podmínka určuje

$$a_{33} = 144ad - 192c_0c_2 - 24c_1^2\,. \tag{7}$$

První a poslední podmínka jsou splněny buď pro $c_0 = c_2 = 0$ nebo pro $c_1 = 0$. První výsledek znamená, že oba dvojnásobné body jsou body úvratu, a tím se ocitáme u dalšího případu kvartiky, k němuž se v dalším vrátíme. Druhý výsledek vede ke kvartice o rovnici

$$ax_3^4 + x_3^3(b_1x_1 + b_2x_2) + x_3^2(c_0x_1^2 + c_2x_2^2) + dx_1^2x_2^2 = 0\,, \tag{8}$$

jejíž charakteristickou geometrickou vlastnost snadno najdeme. Tečny kvartiky f v bodě O_1 jsou dány rovnicí

$$dx_2^2 + c_0x_3^2 = 0\,,$$

v bodě O_2 rovnicí

$$dx_1^2 + c_2x_3^2 = 0\,.$$

Kvartika skládající se z těchto tečen

$$(dx_2^2 + c_0x_3^2)\,(dx_1^2 + c_2x_3^2) = 0 \tag{9}$$

protne kvartiku (1) v bodech ležících na kuželosečce

$$(ad - c_0c_2)\,x_3^2 + dx_3(b_1x_1 + b_2x_2) + c_1dx_1x_2 = 0\,, \tag{10}$$

jak zjistíme, když od levé strany rovnice (1) násobené d odečteme levou stranu rovnice (9) a krátíme x_3^2. Kuželosečka (10) se rozloží na přímku $x_3 = 0$ (která obsahuje jen průsečíky O_1, O_2 obou kvartik) a další přímku tehdy a jen tehdy, když $c_1 = 0$. Tato další přímka pak obsahuje další čtyři průsečíky obou kvartik, tj. další průsečíky tečen kvartiky (1) v bodech O_1, O_2 s touto kvartikou, takže platí výsledek:

Nutná a dostačující podmínka pro to, aby inflexní body binodální kvartiky byly na ní vyťaty kubikou, je ta, aby tečny v uzlech proťaly křivku mimo uzly ve čtyřech bodech přímky. (Tím je také doplněn výsledek Richmondův.)

Dostaneme zajímavý vedlejší výsledek, když užijeme dosavadních úvah na kvartiku, jejíž oba uzly jsou inflexní, tj. jejíž tečny v uzlových bodech jsou tečnami inflexními. Mimo uzly leží pak ještě osm inflexních bodů. Ježto v tom případě protnou tečny v uzlových bodech kvartiku jen v těchto bodech, kuželosečka (10) se redukuje na rovnici

$$x_3^2 = 0\,,$$

takže je

$$b_1 = b_2 = c_1 = 0$$

a rovnice křivky je

$$ax_3^4 + x_3^2(c_0x_1^2 + c_2x_2^2) + dx_1^2x_2^2 = 0\,. \tag{11}$$

Předchozí výpočty zůstávají v platnosti, je jen třeba v nich položiti nuly za koeficienty b_1, b_2, c_1.

To znamená, že z levé strany rovnice

$$H + Qf = 0\,, \tag{12}$$

kde koeficienty kvadratické formy Q jsou

$$a_{11} = 24c_0d\,,\quad a_{22} = 24c_2d\,,\quad a_{33} = 144ad - 192c_0c_2\,,$$
$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0\,,$$

lze vytknouti x_3^3. Snadno spočítáme, že v tomto případě je rovnice Hessiánu

$$\begin{aligned} H \equiv 48ac_0c_2x_3^6 &+ 24(2ad - c_0c_2)(c_0x_1^2 + c_2x_2^2)\,x_3^4 + \\ &+ 24dx_3^2[-c_0^2x_1^4 - c_2^2x_2^4 + 6(c_0c_2 - ad)\,x_1^2x_2^2] - \\ &- 24d^2x_1^2x_2^2(c_0x_1^2 + c_2x_2^2) = 0 \end{aligned}$$

a že v levé straně rovnice (12) jsou jen sudé mocniny x_3, tj. koeficient při x_3^3 je roven nule. Lze tedy vytknouti x_3^4 a platí

$$H + Qf \equiv x_3^4Q'\,,$$

kde Q' je kvadratická forma, a napsaná rovnice praví, že inflexní body kvartiky (11) leží na kuželosečce $Q' = 0$.

Kvadratickou formu Q' určíme, když vykonáme výpočet v rovnici (12) užívajíce nalezeného výrazu pro H. Dostaneme

$$Q' \equiv 72(ad - c_0c_2)\,.\,[3(c_0x_1^2 + c_2x_2^2) + 2ax_3^2]\,.$$

Napíšeme-li rovnici (11) v tvaru

$$x_3^2(ax_3^2 + c_0x_1^2) + x_2^2(c_2x_3^2 + dx_1^2) = 0\,,$$

vidíme, že kdyby bylo $ad - c_0c_2 = 0$, byly by oba dvojčleny v závorkách úměrné a křivka by byla rozložitelná. Je tedy tento výraz nenulový a kuželosečka inflexních bodů má rovnici

$$3(c_0x_1^2 + c_2x_2^2) + 2ax_3^2 = 0\,,$$

jež nemůže být rozložitelna (neboť $c_0c_2 \neq 0$, ježto žádný dvojnásobný bod není bodem úvratu, $a \neq 0$, ježto jinak by kvartika měla další dvojnásobný bod O_3, jak ukazuje rovnice (11)). Máme tedy výsledek:

Binodální kvartika, jejíž oba uzly jsou inflexní, má dalších 8 inflexních bodů, které jsou z kvartiky vyťaty regulární kuželosečkou.

II. KVARTIKA BIKUSPIDÁLNÍ

Má-li kvartika dva obyčejné body úvratu, je její rovnice

$$ax_3^4 + x_3^3(b_1x_1 + b_2x_2) + c_1x_1x_2x_3^2 + dx_1^2x_2^2 = 0 . \tag{13}$$

Výpočty kapitoly I zůstávají v platnosti a je třeba jen položiti v nich

$$c_0 = c_2 = 0 .$$

V levé straně rovnice (3) lze vytknout x_3^3, takže platí

$$H + Qf \equiv x_3^3K^3 , \tag{14}$$

kde K^3 je kubická forma. Identita právě napsaná ukazuje, že křivka

$$K^3 = 0 \tag{15}$$

prochází inflexními body kvartiky, jichž je v tomto případě 8. Rovnice (2) Hessiánu se nyní zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned} 2dx_1^2 \,.\, 2dx_2^2[12ax_3^2 + 6x_3(b_1x_1 + b_2x_2) + 2c_1x_1x_2] &+ \\ + 2(c_1x_3^2 + 4dx_1x_2)(3b_1x_2^3 + 2c_1x_2x_3)(3b_2x_3^2 + 2c_1x_1x_3) &- \\ - 2dx_2^2(3b_2x_3^2 + 2c_1x_1x_3)^2 - 2dx_1^2(3b_1x_3^2 + 2c_1x_2x_3)^2 &- \\ - (c_1x_3^2 + 4dx_1x_2)^2\,[12ax_3^2 + 6x_3(b_1x_1 + b_2x_2) + 2c_1x_1x_2] &= 0 . \end{aligned} \tag{16}$$

Užitím tohoto výrazu pro H a pamatujíce, že je nyní

$$a_{11} = a_{22} = 0 , \quad a_{33} = 144ad - 24c_1^2 ,$$

zjistíme snadno, že koeficient při x_3^3 v levé straně identity (14) je

$$72b_1c_1dx_1^2x_2 + 72b_2c_1dx_1x_2^2 . \tag{17}$$

To je zároveň v rovnici křivky (15) člen neobsahující x_3. V této rovnici se tedy x_1 a x_2 vyskytují v nejvyšší mocnině druhé a křivka tedy prochází jednoduše body O_1, O_2. Nalezli jsme tedy výsledek:

Inflexní body bikuspidální kvartiky, jichž je osm, jsou z této křivky vyťaty kubikou, která prochází jednoduše oběma body úvratu.

Nás ovšem zajímá otázka, může-li osm inflexních bodů býti vyťato kuželosečkou. Kdyby to nastalo, měla by tato kuželosečka s kubikou K^3 osm bodů společných a kubika by se tedy rozložila na tuto kuželosečku a na přímku O_1O_2. Podmínka pro to je, aby výraz (17) byl identicky roven nule. Protože předpoklad $b_1 = b_2 = 0$ je vyloučen (vedl by k rozložitelnosti kvartiky), je nutně

$$c_1 = 0 .$$

Za tohoto předpokladu lze z levé strany (14) vytknouti x_3^4 a koeficient při této mocnině položený roven nule dává rovnici kuželosečky obsahující inflexní body. Je nyní $a_{12} = 0$, $a_{33} = 144ad$ a výraz (16) se zjednoduší. Snadno se spočítá, že rovnice hledané kuželosečky je

$$3b_1^2x_1^2 + 3b_2^2x_2^2 + 8a^2x_3^2 + 12b_1b_2x_1x_2 + 12ab_1x_1x_3 + 12ab_2x_2x_3 = 0\,.$$

Diskriminant této kuželosečky je roven nule, kuželosečka je rozložitelná. Vedeni obdobným výsledkem kap. I, určíme snadno charakteristickou geometrickou vlastnost křivky (13) pro $c_1 = 0$. Rovnici křivky lze psáti

$$x_3^3(b_1x_1 + b_2x_2 + ax_3) + dx_1^2x_2^2 = 0\,.$$

Přímka $b_1x_1 + b_2x_2 + ax_3 = 0$ protne kvartiku na osách $x_1 = x_2 = 0$, jež jsou tečnami úvratu, vždy dvojnásob, což znamená, že tato přímka je dvojnásobná tečna křivky. Můžeme tedy vysloviti tento souhrnný výsledek:

Nutná a dostačující podmínka pro to, aby osm inflexních bodů bikuspidální kvartiky bylo z kvartiky vyťato kuželosečkou, je, aby průsečíky tečen úvratu s křivkou byly dotykovými body dvojnásobné tečny křivky. Tato kuželosečka se skládá ze dvou přímek.

Jinými slovy, *inflexní body kvartiky s uvedenou vlastností leží po čtyřech na dvou přímkách.*

III. PŘÍPAD ČTYŘ INFLEXNÍCH BODŮ

To je případ kvartiky s dvěma uzly a jedním bodem úvratu. Má-li kvartika tři dvojnásobné body a zvolíme-li je za souřadnicové vrcholy O_1, O_2, O_3, má kvartika rovnici

$$a_1x_2^2x_3^2 + a_2x_1^2x_3^2 + a_3x_1^2x_2^2 + 2b_1x_1^2x_2x_3 + 2b_2x_1x_2^2x_3 + 2b_3x_1x_2x_3^2 = 0\,, \tag{18}$$

kde

$$a_1a_2a_3 \neq 0\,,$$

ježto jinak by kvartika byla rozložitelná. Rovnice v tomto tvaru je invariantní vůči cyklické permutaci indexů. Tutéž vlastnost má ovšem i Hessián křivky. Vypočteme jej (výpočet není příliš pracný, jednak vzhledem k vlastnosti právě uvedené, jednak vzhledem k tomu, že Hessián má s kvartikou společné uzlové body i tečny v nich). Dostaneme tímto výpočtem (dělíme 24mi):

$$\begin{aligned} H \equiv\ & (b_1^2 - a_2a_3)\,x_1^4(a_3x_2^2 + a_2x_3^2 + 2b_1x_2x_3) + \\ & + (b_2^2 - a_1a_3)\,x_2^4(a_3x_1^2 + a_1x_3^2 + 2b_2x_1x_3) + \\ & + (b_3^2 - a_1a_2)\,x_3^4(a_2x_1^2 + a_1x_2^2 + 2b_3x_1x_2) + \\ & + 2a_1(2b_2b_3 - a_1b_1)\,x_2^3x_3^3 + 2a_2(2b_1b_3 - a_2b_2)\,x_1^3x_3^3 + 2a_3(2b_1b_2 - a_3b_3)\,x_1^3x_2^3 + \\ & + 2(a_2a_3 + 2b_1^2)\,x_1^3x_2x_3(b_2x_2 + b_3x_3) + 2(a_1a_3 + 2b_2^2)\,x_1x_2^3x_3(b_1x_1 + b_3x_3) + \\ & + 2(a_1a_2 + 2b_3^2)\,x_1x_2x_3^3(b_1x_1 + b_2x_2) + 6(a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3)\,x_1^2x_2^2x_3^2\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Spojnice dvojnásobných bodů protnou Hessián křivky mimo tyto body ve třech dvojicích bodů. Pro $x_1 = 0$ je dána tato dvojice rovnicí

$$(b_2^2 - a_1a_3)\,x_2^2 + (b_3^2 - a_1a_2)\,x_3^2 + 2(2b_2b_3 - a_1b_1)\,x_2x_3 = 0\,.$$

Cyklickou záměnou se dostanou rovnice obou dvojic pro $x_2 = 0$, $x_3 = 0$:

$$(b_1^2 - a_2a_3)\,x_1^2 + (b_3^2 - a_1a_2)\,x_3^2 + 2(2b_1b_3 - a_2b_2)\,x_1x_3 = 0\,,$$
$$(b_1^2 - a_2a_3)\,x_1^2 + (b_2^2 - a_1a_3)\,x_2^2 + 2(2b_1b_2 - a_3b_3)\,x_1x_2 = 0\,.$$

Tyto tři dvojice leží na kuželosečce

$$Q \equiv (b_1^2 - a_2a_3)\,x_1^2 + (b_2^2 - a_1a_3)\,x_2^2 + (b_3^2 - a_1a_2)\,x_3^2 +$$
$$+ 2(2b_1b_2 - a_3b_3)\,x_1x_2 + 2(2b_1b_3 - a_2b_2)\,x_1x_3 + 2(2b_2b_3 - a_1b_1)\,x_2x_3 = 0\,.$$

Každá křivka svazku

$$H + \lambda Qf = 0\,, \tag{20}$$

kde λ je parametr ve svazku, protne přímku O_2O_3 mimo (dvojnásob) tyto body ještě ve dvou bodech ležících na Q, což platí celkem za šest průsečíků. Jestliže tedy určíme λ tak, aby příslušná sextika obsahovala další bod spojnice O_2O_3, má tato sextika s touto spojnicí společných sedm průsečíků a obsahuje ji tedy jako součást. Levá strana (20) dává pro $x_1 = 0$, když krátíme $a_1x_2^2x_3^2$:

$$(b_2^2 - a_1a_3)\,x_2^2 + (b_3^2 - a_1a_2)\,x_3^2 + 2(2b_2b_3 - a_1b_1)\,x_2x_3 +$$
$$+ \lambda[(b_2^2 - a_1a_3)\,x_2^2 + (b_3^2 - a_1a_2)\,x_3^2 + 2(2b_2b_3 - a_1b_1)\,x_2x_3] = 0\,,$$

což je identicky rovno nule pro $\lambda = -1$. Pro tuto hodnotu λ obsahuje sextika svazku (20) jako součást přímku $x_1 = 0$, ale také $x_2 = 0$ a $x_3 = 0$, jak plyne z vlastnosti rovnice (18) výše zdůrazněné. To znamená, že

$$H - Qf \equiv x_1x_2x_3K^3\,. \tag{21}$$

Odtud dostaneme snadným výpočtem

$$K^3 \equiv 2(a_2a_3 - b_1^2)\,x_1^2(b_2x_2 + b_3x_3) + 2(a_1a_3 - b_2^2)\,x_2^2(b_1x_1 + b_3x_3) + \tag{22}$$
$$+ 2(a_1a_2 - b_3^2)\,x_3^2(b_1x_1 + b_2x_2) - (3a_1a_2a_3 - 6b_1b_2b_3 + a_1b_1^2 + a_2b_2^2 +$$
$$+ a_3b_3^2)\,x_1x_2x_3\,.$$

Tento výraz ukazuje, že kubika $K^3 = 0$ prochází jednoduše dvojnásobnými body O_i kvartiky a protne ji tedy ještě v 6 bodech, což jsou, jak ukazuje identita (21), inflexní body kvartiky, jichž je právě šest, když dvojnásobné body jsou obyčejné uzly. Identita (21) dále ukazuje, že tato kubika protne Hessián v šesti bodech, ve kterých je Hessián proťat kuželosečkou Q mimo spojnice uzlových bodů. Dostáváme tak mimochodem zajímavou větu o inflexních bodech trinodální kvartiky:

Hessián trinodální kvartiky protne spojnice uzlů mimo tyto uzly v šesti bodech ležících na kuželosečce. Tato kuželosečka protne Hessián v dalších šesti bodech a ku-

bika položená uzly a těmito šesti body protne kvartiku v jejích šesti inflexních bodech.[1])

Vrátíme se k našemu problému. Budiž jeden dvojnásobný bod kvartiky bodem úvratu. Je-li to bod O_3, znamená to, jak plyne z rovnice (18), že

$$a_1 a_2 - b_3^2 = 0 .$$

Úvahy vedoucí k rovnici kubiky K^3 zůstávají v platnosti, ale v této rovnici odpadá člen obsahující x_3^2, křivka K^3 má dvojnásobný bod O_3. Tento bod je tedy čtyřnásobným průsečíkem kvartiky a kubiky K^3, která tedy protne kvartiku mimo body dvojnásobné ještě ve čtyřech bodech, právě v inflexních bodech kvartiky. Je otázka, mohou-li tyto čtyři body ležeti v přímce. Kdyby tomu tak bylo, rozložila by se kubika K^3 na tuto přímku, jež ovšem neobsahuje žádný bod O_i, a na kuželosečku, která by procházela všemi body O_i a to bodem O_3 dvojnásob. Byla by to tedy kuželosečka $x_1 x_2 = 0$.

Kdyby levá strana (22) obsahovala činitel $x_1 x_2$, platilo by identicky

$$2(a_2 a_3 - b_1^2)\, b_3 x_1^2 x_3 + 2(a_1 a_3 - b_2^2)\, b_3 x_2^2 x_3 \equiv 0 .$$

Avšak $b_3 \neq 0$, neboť jinak by bylo $a_1 a_2 = 0$, jeden koeficient a_i by byl roven nule a kvartika by byla rozložitelná. Bylo by tedy nutně

$$a_2 a_3 - b_1^2 = 0 , \quad a_1 a_3 - b_2^2 = 0 ,$$

což by znamenalo, že také body O_1, O_2 jsou body úvratu. Je tedy dokázáno:

Inflexní body kvartiky o dvou uzlech a jednom bodu úvratu, které jsou počtem čtyři, nemohou ležeti v přímce.

Literatura

[1] *H. W. Richmond*: On the inflexions of a binodal quartic curve. The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Vol. *XXXII*, 1901, str. 63—65. Autor dospívá svých výsledků tím, že vyjadřuje kvartiku eliptickými funkcemi.

[2] *A. Brill*: Über die Wendepunkte der Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkten. Mathemat. Annalen *17*, 1880, str. 103—106 a 517—522.

[1]) Dostáváme mimochodem další zajímavý výsledek. Kubika K^3 protne spojnice uzlů mimo uzly ještě ve třech bodech, které, jak se snadno spočítá, leží v přímce. Kubika K^3 je proťata kubikou složenou z tří spojnic uzlů v úplném proniku dvou kubik, jehož tři body leží v přímce a tedy zbývajících šest, jak je známo, na kuželosečce. V našem případě to znamená, že uzlové body kvartiky jsou dotykové body kubiky K^3 s kuželosečkou. Kvartika protne kubiku K^3 ve 12 bodech, z nichž tři, dvakrát počítané, leží na kuželosečce, takže zbývajících šest, což jsou inflexní body kvartiky, leží rovněž na kuželosečce, jak rovněž plyne ze známých vlastností kubiky. To je poměrně stručný a jednoduchý důkaz základní věty, že inflexní body trinodální kvartiky leží na kuželosečce.

Резюме

ТОЧКИ ПЕРЕГИБА НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ КВАРТИК

БОГУМИЛ БЫДЖОВСКИЙ (Bohumil Bydžovský), Весели н. Лужници

Бывают случаи, когда число точек перегиба плоской квартики является кратным четырех, что приводит к вопросу, могут ли в этих случаях точки перегиба быть полным пересечением кривой с другой кривой подходящей степени. На этот вопрос дается ответ в предыдущей статье для трех случаев.

Бинодальная квартика f обладает 12 точками перегиба. Если ее уравнение привести к виду (1) чешского текста, то ее кривая Хессе H выражается уравнением (2). В семействе кривых

(3) $$H + Qf = 0$$

где Q означает квадратичную форму, коэффициенты a_{ij} этой формы можно определить так, что имеет место тождество

(4) $$H + Qf = x_3^2 K^4 ,$$

где K^4 — форма четвертой степени. Притом коэффициент a_{33} остается неопределенным. Уравнение

(6) $$K^4 = 0$$

выражает при переменном a_{33} связку кривых, которые содержат все точки перегиба кривой f. Этот результат был получен уже А. Бриллем. Далее, для того, чтобы точки перегиба кривой f высекались кривой третьего порядка, частью одной из кривых связки (6) должна быть прямая, соединяющая оба узла кривой; дальнейшей частью будет искомая кривая третьего порядка. Это выражается алгебраическим условием $c_1 = 0$. (Это условие вывел в ином виде Х. В. Ричмонд, который не исследовал его геометрическим путем.) *С геометрической точки зрения бинодальная квартика, точки перегиба которой высекаются кривой третьего порядка, характеризуется тем, что ее касательные в узлах пересекают кривую кроме узлов в четырех точках, лежащих на одной прямой.*

В виде особого случая рассмотрена кривая, обе двойные точки которой являются узлами перегиба, так что у кривой имеется еще восемь дальнейших точек перегиба. *Этих восемь точек перегиба лежат на регулярном коническом сечении.*

Бикуспидальная кривая с восемью точками перегиба может рассматриваться как частный случай предыдущего случая: в формулах достаточно положить $c_0 = c_2 = 0$. Тогда будет

(14) $$H + Qf \equiv x_3^3 K^3$$

и точки перегиба лежат на кривой третьего порядка, содержащей, как нетрудно видеть, обе точки возврата. Для того, чтобы точки перегиба на кривой высекались коническим сечением, найденная кривая третьего порядка должна распадаться на это коническое сечение и на прямую, соединяющую точки возврата. Это выражается условием $c_1 = 0$. *Коническое сечение распадается на две прямые, и кривая геометрически характеризуется тем, что дальнейшие точки пересечения касательных возврата с кривой суть ее точки касания с двойной касательной.*

В качестве третьего случая рассматривается квартика с четырьмя точками перегиба. У этой кривой имеются два обыкновенных узла и одна точка возврата. Если три двойные точки квартики f взять в качестве основных точек системы координат, то (18) будет ее уравнением, а (19) — ее определителем Хессе. Кривая Хессе пересекает соединительные прямые трех двойных точек, кроме этих точек, еще в трех парах точек, лежащих на коническом сечении $Q = 0$, причем справедливо тождество

$$H - Qf \equiv x_1 x_2 x_3 K^3 \,. \tag{21}$$

Здесь K^3 — кубическая форма, выраженная формулой (22). Кривая третьего порядка $K^3 = 0$ содержит двойные точки квартики и пересекает ее, кроме того, в ее шести точках перегиба в случае, когда все двойные точки —обыкновенные узлы. Если же одна из двойных точек есть точка возврата, имеет место напр. $a_1 a_2 - b_3^2 = 0$, кривая K^3 обладает двойной точкой (0, 0, 1) и пересекает кривую как в двойных точках, так и в четырех точках перегиба. Если бы эти точки перегиба лежали на прямой, кривая K^3 должна была бы содержать эту прямую в виде своей части, причем дальнейшей частью было бы коническое сечение, которое содержало бы все двойные точки (точку (0, 0, 1) дважды), т.е. коническое сечение $x_1 x_2 = 0$. Легко видеть, что такое распадение кривой K^3 невозможно, если только все двойные точки не являются точками возврата. Итак, *если квартика имеет четыре точки перегиба, эти точки не могут лежать на одной прямой.*

Zusammenfassung

ÜBER DIE INFLEXIONSPUNKTE EINIGER EBENEN KURVEN VIERTER ORDNUNG

BOHUMIL BYDŽOVSKÝ, Veselí n. Lužnicí

Es gibt Fälle, wo die Anzahl der Inflexionspunkte einer ebenen Kurve vierter Ordnung ein Vielfaches von vier ist, was zu der Frage Anlass gibt, ob in diesen Fällen die Inflexionspunkte den vollständigen Schnitt der Kurve mit einer zweiten Kurve von passender Ordnung bilden können. Diese Frage wird im bevorstehenden Artikel in drei Fällen beantwortet.

Die binodale Quartik f besitzt 12 Inflexionspunkte. Wird ihre Gleichung auf die Form (1) des tschechischen Textes gebracht, so ist ihre Hesse'sche Kurve H durch (2) dargestellt. Im System von Kurven

$$H + Qf = 0, \tag{3}$$

wo Q eine quadratische Form bedeutet, können die Koefizienten a_{ij} dieser Form derart bestimmt werden, dass die Identität

$$H + Qf \equiv x_3^2 K^4, \tag{4}$$

besteht, wo K^4 eine Form der vierten Ordnung ist. Dabei bleibt der Koeffizient a_{33} unbestimmt. Die Gleichung

$$K^4 = 0 \tag{6}$$

drückt bei veränderlichem a_{33} einen Büschel von Kurven aus, welche insgesammt die Inflexionspunkte der Kurve f enthalten. Dies deutet auf ein schon von A. Brill gefundenes Ergebnis. Sollen nun die Inflexionspunkte der Kurve f durch eine Kubik ausgeschnitten werden, so muss eine Kurve des Büschels (6) die Verbindungslinie der beiden Knoten als ihren Teil enthalten; der weitere Teil ist dann die gesuchte Kubik. Algebraische Bedingung dafür ist $c_1 = 0$. (Diese Bedingung in anderer Form hat H. W. Richmond angegeben, ohne auf ihre geometrische Deutung einzugehen.) *Die binodale Quartik, deren Inflexionspunkte von einer Kubik ausgeschnitten werden, ist geometrisch dadurch charakterisiert, dass die Tangenten in ihren Knoten die Kurve ausserhalb der Knoten in vier in einer Geraden liegenden Punkten schneiden.*

Als Spezialfall wird die Kurve behandelt, deren beide Doppelpunkte Inflexionsknoten sind, sodass die Kurve noch weitere acht Inflexionspunkte besitzt. *Diese acht Inflexionspunkte liegen auf einem regulären Kegelschnitt.*

Die bikuspidale Kurve mit acht Inflexionspunkten kann als Spezialfall des vorhergehenden Falles behandelt werden, indem in den Formeln $c_0 = c_2 = 0$ gesetzt wird. Es gilt nun

$$H + Qf \equiv x_3^3 K^3 \tag{14}$$

und die Inflexionspunkte liegen auf einer Kubik, die, wie leicht festzustellen ist, die beiden Rückkehrpunkte enthält. Sollen nun die Inflexionspunkte auf der Kurve von einem Kegelschnitt ausgeschnitten werden, so muss die gefundene Kubik in diesen Kegelschnitt und die Verbindungslinie der beiden Rückkehrpunkte zerfallen. Bedingung hiefür ist $c_1 = 0$. *Der Kegelschnitt zerfällt in zwei Geraden, und die Kurve ist geometrisch dadurch charakterisiert, dass die weiteren Schnittpunkte der Rückkehrtangenten mit der Kurve die Berührungspunkte dieser Kurve mit einer Doppeltangente sind.*

Als dritter Fall wird eine Quartik mit vier Inflexionspunkten behandelt. Diese Kurve hat zwei gewöhnliche Knoten und einen Rückkehrpunkt. Werden die drei Doppelpunkte einer Quartik f zu den Grundpunkten gewählt, so ist (18) ihre Gleichung und (19) ihre Hesse'sche Determinante. Die Hesse'sche Kurve schneidet die

Verbindungslinien der drei Doppelpunkte ausser in diesen Punkten noch in drei Punktepaaren, die auf einem Kegelschnitt $Q = 0$ liegen, wobei die Identität

$$H - Qf \equiv x_1 x_2 x_3 K^3 \tag{21}$$

besteht. Hier ist K^3 eine kubische Form, die durch die Formel (22) ausgedrückt ist. Die Kubik $K^3 = 0$ enthält die Doppelpunkte der Quartik und schneidet sie ausserdem in ihren sechs Inflexionspunkten im dem Falle, wo alle Doppelpunkte gewöhnliche Knoten sind. Ist jedoch ein Doppelpunkt ein Rückkehrpunkt, so gilt z. B. $a_1 a_2 - b_3^2 = 0$, die Kurve K^3 hat den Doppelpunkt $(0, 0, 1)$ und schneidet die Kurve ausserhalb der Doppelpunkte noch in den vier Inflexionspunkten. Sollten diese Inflexionspunkte auf einer Geraden liegen, so müsste K^3 diese Gerade als einen Teil enthalten und der weitere Teil wäre dann ein Kegelschnitt, der alle Doppelpunkte enthielte, und zwar den Doppelpunkt $(0, 0, 1)$ doppelt, also der Kegelschnitt $x_1 x_2 = 0$. Es ist leicht zu erwägen, dass ein solcher Zerfall der Kurve K^3 nicht möglich ist, solange alle Doppelpunkte nicht Rückkehrpunkte sind. *Besitzt also eine Quartik veri Inflexionspunkte, so können diese Punkte nicht auf einer Geraden liegen.*