Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 2, 250--259

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108742`

RECENSE

Václav Medek: DESKRIPTÍVNA GEOMETRIA. Vydalo Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry v Bratislave a Štátne nakladateľstvo technickej literatúry v Prahe v r. 1962, strán 368, obr. 527, cena Kčs 30,50.

Prudký rozvoj vysokého školstva v našej republike, zriaďovanie nových oborov vysokoškolského štúdia hlavne technických smerov, stále širšie zapájenie pracujúcich do štúdia zavádzaním nových foriem štúdia popri zamestnaní, stavia učiteľov vysokých škôl, tak ako je to aj na školách nižších stupňov, pred nové úkoly, z ktorých najnaliehavejší je úkol zabezpečiť poslucháčov vyhovujúcimi učebnicami. Právě vyšlá učebnica doc. dr. Václava Medeka „Deskriptívna geometria" zohľadňuje učebné osnovy všetkých fakúlt vysokých škol technických na Slovensku a je pre tieto určená. Je rozdelená do troch kapitol.

Prvá kapitola pojednává o *projektívnej geometrii a základných druhoch premietania*. Celá časť o projektívnej geometrii je písana tak, že možno „teóriu" zaobísť a študovať len kužeľosečky a afinitu s kolineáciou, ovšem len ich vlastnosti; dôkazy viet treba potom vynechať. Inak celý ďalší obsah knihy je na projektívnej geometrii nezávislý, treba len poznať základné veci o kužeľosečkách, afinite a kolineácii. Všeobecne v celej knihe sa autor úspešne usiloval o precízne zavedenie pojmov, o presné definície a vety a hlavne ukázať na ich použitie v technickej praxi. Preto ani mnohé vety, ktorých dôkazy sú náročnejšie alebo zaberajú viac miesta, nie sú v knihe dokazované.

Základné druhy premietania (kótované premietanie, premietanie na dve a viacej priemetní, axonometria, centrálne a dvojstredové premietanie) sú spracované, pokiaľ to povaha problému dovoľovala, tak, že vždy sú vedľa seba názorný obrázok konštrukcie a samotná konštrukcia a okrem toho príklady sú vyberané väčšinou z technickej praxe. Výklad týchto druhov premietaní je úplný v tom zmysle, že pre štúdium ďalších častí knihy nie je potrebné študovať doplňkovú literatúru. Ovšem na druhej strane, aby rozsah knihy nevzrástol, autor sa celkom správne obmedzil na najnutnejšie základy. Tak v axonometrii je vynechaná takmer celá obvyklá teória a prakticky ponechaný len návod ako z pôdorysu a nárysu objektu zostrojiť jeho axonometrický obraz. Len u niekoľko základných úloh je ukázané ako tieto riešiť priamo v axonometrii. V závere state o axonometrii sú výstižne charakterizované niektoré zvláštne a často používané typy axonometrií. Centrálne premietanie je myslené ako príprava pre lineárnu perspektívu, fotogrametriu a kartografiu. Túto stať, pre študentov obvykle jednu z najobtiažnejších, podáva autor svojským a veľmi názorným spôsobom. Lineárna perspektíva je doložená, ako aj mnohé ďalšie partie, peknými konštrukciami viacerých skutočne existujúcich objektov.

Druhá kapitola pojednáva *o čiarach a plochách*. Po úvodnej stati o zobrazovaní čiar a plôch všeobecne nasledujú jednoduché geometrické plochy, rotačné plochy, plochy priamkové, kvadratické, skrutkové, topografické, grafické, klinové a iné typy plôch. U každej plochy je uvedené jej najvýhodnejšie zobrazenie, základné konštrukcie a jej použitie v technickej praxi. Uvedené príklady plôch sú konkrétne, v praxi často sa vyskytujúce. Kvôli zvýšeniu názornosti je uvedené aj osvetlenie plôch. Kapitola obsahuje veľké množstvo fotografií rôznych typov plôch na budovách a iných stavbách v rôznych miestach našej republiky.

V tretej kapitole je uvedené rôzne technické *použitie deskriptívnej geometrie* ako riešenie strešných odkvapov a nádvorí, stereotómia, kartografia, blokdiagram, názorné zobrazenia kryštálov, fotogrametria, technické osvetlenie a reliéf. I táto kapitola v stati o stereotómii a v stati o fotogrametrii je doložená cennými fotografiami skutočných objektov a rekonštrukciou týchto objektov z ich snímok.

Forma výkladu v knihe je stručná, aby jej rozsah príliš nevzrástol, neobsahuje zbytočné vety a preto ju treba čítať pozorne ako každú učebnicu vedeckej disciplíny. I pri svojej stručnosti je kniha po metodickej stránke náležite spracovaná a je vhodná i pre individuálne štúdium poslucháčov študujúcich popri zamestnaní. Autorovi nešlo, ako to aj v predhovore knihy uvádza, v prvom rade o originalitu pojatia výkladu. V knihe sa snažil zhromaždiť všetko, čo u rôznych autorov našiel najlepšie a využiť aj skúsenosti takmer všetkých vyučujúcich deskriptívnej geometrie na našich vysokých školách technických.

Kniha obsahuje základy všetkých disciplín deskriptívnej geometrie, ktoré dnešná prax užíva a preto bude dobrou pomôckou aj pre technikov v praxi.

Napokon nutno konštatovať, že i grafická úprava knihy je vzorná. Veľké množstvo veľmi pekne vyrysovaných a pôsobivých obrázkov zaiste bude čitateľa vychovávať po estetickej stránke a bude mu vzorom technických výkresov pri konštrukcii a rysovaní vlastných prác.

Cyril Palaj, Zvolen

П. С. Моденов - А. С. Пархоменко: ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. Izdatelstvo moskovskogo universiteta 1961, 1. vyd., str. 232, obr. 129, cena 1 rubl (váz.).

Tato kniha je určena studentům matematiky pro jejich práci v seminářích z geometrie na universitách a pedagogických institutech, hodí se však i pro učitele středních škol při zvyšování jejich kvalifikace a většinou svých partií pod vedením učitele též pro zájmové kroužky na středních všeobecně vzdělávacích školách.

Výklad je prováděn jednoduchými a srozumitelnými prostředky, hlavně metodami elementární geometrie, početního aparátu (kartézských a projektivních souřadnic) se užívá jen pro sestavení rovnic příbuzností a jen velmi málo je třeba z vektorové algebry. Při studiu uvedených příbuzností se ukazuje, co se při jejím použití nemění a jak se dělí geometrie pomocí invariantních vlastností příbuzností na elementární, afinní, projektivní atd.

V úvodní kapitole jsou definovány *základní pojmy* zobrazení, příbuznost, grupa a podgrupa příbuzností.

Druhá kapitola se zabývá *shodnostmi* v rovině a v prostoru. Po odvození základních vztahů mezi odpovídajícími si prvky je zaveden pojem orientace a přímé a nepřímé shodnosti. Potom jsou podrobně studovány základní příbuznosti v rovině (posunutí, osová a středová souměrnost, otáčení) a v prostoru (posunutí, souměrnost podle roviny, přímky nebo bodu, otáčení) a jejich vlastnosti.

Třetí kapitola obsahuje základní vlastnosti *podobnosti* (přímé i nepřímé) a zvláště pak stejnolehlosti v rovině i v prostoru.

Ve čtvrté kapitole je pojednáno o *afinitách* v rovině a v závěru kapitoly krátce o afinitách v prostoru. Jako příklady afinit v rovině jsou uvedeny: kosoúhlá souměrnost, osová afinita (jen s kladnou charakteristikou) pravoúhlá a kosoúhlá, dále tzv. hyperbolické a eliptické otáčení a elace. Je ukázána invariantnost dělicího poměru a vztah mezi odpovídajícími si úsečkami příp. plochami. Afinity je potom využito ke studiu některých vlastností elipsy a to zejména ke konstrukci jejích bodů a tečen v těchto bodech. Rovnic afinity je použito pro klasifikaci kuželoseček příp. kvadrik.

V páté kapitole pro studium *projektivních příbuzností* jsou nejprve zavedeny nevlastní prvky, první model projektivní roviny (tzv. rozšířená euklidovská rovina), homogenní souřadnice, druhý model projektivní roviny (bodům roviny odpovídají přímky svazku — střed neleží v dané rovině, přímkám projektivní roviny potom jsou přiřazeny roviny procházející středem svazku) a projektivní souřadnice. Po definici a vlastnostech projektivnosti v rovině jsou uvedeny z projektivních příbuzností perspektivní kolineace se zvláštními případy elace a involuce. Dvojpoměru čtyř bodů na přímce nebo čtyř přímek ve svazku (i s větou Pappovou) je užito pro speciální, harmonickou čtveřinu a pro vlastnosti úplného čtyrrohu a čtyrstranu. Ke stanovení samodružných bodů příbuznosti a ke klasifikaci kuželoseček a kvadrik slouží projektivní souřadnice. V dodatku k této kapitole jsou ukázány topologické vlastnosti projektivní roviny.

V šesté kapitole se probírá *kruhová inverse* se svými základními vlastnostmi, zejména je odvozena vlastnost konformity a vztahy platící v tzv. konformní rovině, v níž je pak provedeno zobecnění na kruhové příbuznosti.

Pro všechny druhy příbuzností je vždy ukázáno, jak je lze složit ze základních, jednoduchých typů těchto příbuzností.

Karel Drábek, Praha

Wolfgang Haack: DARSTELLENDE GEOMETRIE I. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1960, 3. vyd., str. 113, obr. 120, cena DM 3,60 brož. DARSTELLENDE GEOMETRIE II. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1962, 3. vyd., str. 129, obr. 86, cena DM 3,60 brož.

V prvním dílu je po stručném historickém vývoji deskriptivní geometrie a po výkladu o použití této části matematiky vyložena podstata hlavních *promítacích metod*. Těžiště knihy je v pravoúhlém promítání na dvě k sobě kolmé průmětny (v tzv. Mongeově promítání) a v jeho aplikacích. V tomto druhu promítání jsou ukázány všechny základní úlohy polohy a nejjednodušší metrické konstrukce. Pro zjednodušení některých řešení je provedeno zavedení dalších průměten. Třetí průmětny je s výhodou použito pro sestrojení řezů na hranolech a jehlanech. Popisem jsou vyloženy průniky hranatých těles (hranolů a jehlanů).

Nad průměr knížky vyniká poslední její část, ve které je zaveden pojem *afinity* mezi dvěma rovinami i v téže rovině a jsou stanoveny její základní vlastnosti. Afinita mezi kružnicí a elipsou přivádí pak čtenáře ke známým úlohám o elipse (např. ke trojúhelníkové konstrukci bodů elipsy, k Rytzově konstrukci os ze sdružených průměrů, jsou tu též obě proužkové konstrukce bodů elipsy aj.).

V druhém dílu jsou v Mongeově promítání (a někdy též v kosoúhlém promítání, a to v tzv. kavalírní perspektivě) zobrazena základní *oblá tělesa* (válec, kužel a plocha kulová) a sestrojeny rovinné řezy. Kuželosečky jsou také určeny jako průnikové čáry (příp. jako jejich průměty) oblých těles (dvou válců nebo kuželů apod.), které však musí být ve zvláštní vzájemné poloze nebo ve zvláštní poloze vzhledem k průmětnám.

Velmi krátce jsou vyloženy základní pojmy o rotačních plochách, o šroubovici a o některých šroubových plochách užívaných zejména ve strojírenské praxi.

Pěkný je opět výklad poslední části tohoto dílu, kdy po stručném úvodu s potřebnými konstrukcemi z *kótovaného promítání* následuje praktické využití tohoto promítacího způsobu v inženýrské praxi při řešení úloh pozemního stavitelství na topografických plochách.

Obě knížky vyšly ve sbírce „Sammlung Göschen", která je u nás dobře známa, zejména generaci studující před druhou světovou válkou, a to jako její 142. a 143. svazek. Až do poloviny prvního dílu jsou pro každou prováděnou konstrukci sestrojeny názorné obrázky v kavalírní perspektivě, později pak už jen pro důležitější úlohy. Tyto obrázky jsou pečlivě provedeny; jejich lepšímu využití vadí malý a proto často špatně čitelný popis. Rozlišení půdorysů a nárysů bodů, přímek a určujících útvarů roviny není provedeno indexy jako v naší literatuře, nýbrž čárkami.

V těchto dvou knížkách je podán spíše pouhý přehled nejnutnější látky, takže je nelze doporučovat začátečníkům a zvláště pak ne těm, kteří studují deskriptivní geometrii sami bez vedení učitele. Některé části jsou vyloženě jenom popisné (např. sestrojování kosoúhlých průmětů těles).

Obsahem i způsobem výkladu nedosahují obě knížky úrovně našich knih (vyšlých v červenci 1962 a zaměřených k témuž cíli): Deskriptivní geometrie I a II od *M. Menšíka* a *O. Setzera*.

Karel Drábek, Praha

Tom M. Apostol: CALCULUS, Volume I. New York 1961, str. 515.

Kniha obsahuje celkom 9 kapitol. Prvá kapitola je venovaná *integrálnemu počtu* a je rozdelená na dve časti. Prvá časť sa týka Archimedovej metódy výpočtu plošného obsahu úseku paraboly a jej kritickej analýze. V tejto časti sú súčasne dva doplňky, z ktorých prvý obsahuje axiomatiku reálnych čísel a desatinné vyjadrenie reálnych čísel. Druhý doplňok pojednáva o matematickej indukcii, o sumačnom a súčinovom označení a o absolútnej hodnote reálnych čísel. V druhej časti vykladá autor teóriu Riemannovho integrálu s aplikáciami v geometrii. Riemannov integrál definuje najprv pre funkcie skokov. Integrovateľná funkcia je potom taká funkcia, u ktorej existuje také jediné číslo J, že integrál každej dolnej aproximácie, ktorá je funkciou skokov, je menší než J a integrál každej hornej aproximácie, ktorá je funkciou skokov, je väčší ako J. Na konci tejto časti je zas doplňok, v ktorom sa dokazujú vety o integrovateľnosti, ďalej sú tu dôkazy základných vlastností Riemannovho integrálu a definícia dolného a horného Riemannovho integrálu.

Druhá kapitola — *diferenciálny počet* — začína historickým úvodom k diferenciálnemu počtu a geometrickým výkladom derivácie ako smernice dotyčnice. Okrem diferenciálneho počtu je v tejto kapitole pojem limity funkcie so základnými vetami o limite, spojitosť funkcie, neurčitý integrál so základnými metódami integrovania a vzájomný vzťah medzi Riemannovým integrálom a neučitým integrálom. V doplňku sú dôkazy viet o limite, o integrovateľnosti spojitej funkcie a Bolzanova a Darbouxova vlastnosť funkcií spojitých na uzavretom intervale.

Tretia kapitola je venovaná *definíciam funkcií* logaritmických, exponenciálnych a cyklometrických a ich vlastnostiam. Funkcia log x je definovaná ako $\int_1^x 1/t \, . \, dt$ a exponenciálna funkcia ako inverzná funkcia. Aj cyklometrické funkcie sú definované ako inverzné funkcie trigonometrických funkcií, pričom tieto sa preberajú v prvej kapitole.

Štvrtá kapitola je úvod do *diferenciálnych rovníc*. Pozostáva z integračných metód pre niektoré diferenciálne rovnice prvého rádu a z metódy riešenia diferenciálnej rovnice $y'' + k^2y = 0$. Súčasne sa v jednom článku riešia niektoré fyzikálne problémy vedúce na riešenie diferenciálnych rovníc prvého rádu.

Piata kapitola obsahuje *vektorovú algebru* a jej použitie na vyšetrovanie roviny a priamky. Pojem vektora sa uvádza najprv geometricky a potom aritmeticky pomocou súradníc vektora. Priamym pokračovaním piatej kapitoly je nasledujúca kapitola šiestá, venovaná vyšetrovaniu *plôch a kriviek* v priestore a v rovine. V prvých článkoch kapitoly sú definície jednotlivých kužeľosečiek s odvodením ich rovníc v špeciálnych polohách a v polohách vznikajúcich z nich posunutím. Potom na príkladoch sa ukazuje spôsob, ako sa zistí druh a poloha kužeľosečky danej všeobecnou kvadratickou rovnicou v dvoch premenných. Z priestorových kriviek sa preberá šraubovica. U kvadratických plôch daných rovniciami v špeciálnych polohách vyšetrujú sa ich rezy s rovinami rovnobežnými so súradnicovými rovinami. Koniec kapitoly vyplňujú pojednania o dotyčnici, hlavnej normále a oskulačnej rovine krivky, o krivosti krivky, o polárnych a cylindrických súradniciach a o vyjadrení vektoru rýchlosti a zrýchlenia v polárnych súradniciach. Doplňok šiestej kapitoly tvorí definícia dĺžky krivky s odvodením jej vzorca vyjadreného neurčitým integrálom.

V siedmej kapitole sa nachádzajú *vety* o strednej hodnote, Taylorov vzorec s Lagrangeovým zvyškom a definície Landauových symbolov o a O. Vety o strednej hodnote sa vykladajú s úzkym súvisom s ich geometrickým významom. Na siedmu kapitolu nadväzuje kapitola ôsma skladajúca sa z dvoch častí. Prvá časť začína *aplikáciou* vety o strednej hodnote na extrémy funkcie a pokračuje definíciou konkávnosti a konvexnosti, inflexného bodu a ich vyšetrovania pomocou druhej derivácie. Táto časť končí dôkazom vety o absolútnych extrémoch funkcie spojitej na uzavretom intervale. Druhá časť je venovaná aplikácii vety o strednej hodnote na neurčité výrazy. L'Hopitalovo pravidlo je dovodené pre prípady neurčitých výrazov $0/0$ a ∞/∞. Na konci kapitoly sa nachádza geometrický dôkaz L'Hopitalovho pravidla pre prípad ∞/∞.

Posledná kapitola má na začiatku výklad o *postupnosti* a o jej limite. Dokazuje sa tu veta o konvergencii monotónnych postupností. Za tým nasleduje definícia nekonečných *radov* a ich súčtu. V osobitnom článku sa preberajú geometrické rady a vyšetruje sa ich konvergencia a divergencia. Potom nasledujú: podielové, odmocninové, Cauchyovo integrálne kritérium pre rady s kladnými členmi a Leibnizovo kritérium pre rady so striedavými znamienkami. V ďalšom článku sa definuje absolútna a relatívna konvergencia. Pri mocninných radoch dokazujú sa: veta o ich obore konvergencie a vlastnosti mocninných radov. Rozvoj funkcie do Taylorovho radu tvorí samostatný článok. Dva ďalšie články sú venované aplikáciam rozvoja funkcie do mocninného radu na riešenie diferenciálnych rovníc a na približný výpočet hodnôt funkcií so súčasným odhadom chyby výpočtu. Predposledný článok obsahuje definície nevlastných integrálov a kritéria pre ich existenciu. Poukazuje sa pri tom na podobnosť s nekonečnými radmi. Príklady posledného článku majú za cieľ ukázať čitateľovi, že nie je možné vždy derivovať a integrovať nekonečné rady člen po člene.

Kniha je písaná matematicky presne a vážnych chýb v knihe niet. V článku 1.49 pri definícii dolného a horného integrálu autor zrejme predpokladá ohraničenosť funkcií, ale nikde ju nespomína. V čl. 2.14 geometrická motivácia dôkazu prvej základnej vety diferenciálneho a integrálneho počtu je správna len pre funkcie spojité na $\langle a, b \rangle$. Medzi príkladmi čl. *2.31 mohol by byť príklad, že obraz intervalu pri spojitej funkcii je súvislá množina, pretože v čl. 2.23 sa to potrebuje. V príklade 6 na str. 211 je chyba. U definície hyperboly berie sa, že rozdiel vzdialeností je konštantný, miesto absolútnej hodnoty toho rozdielu. Tlačových chýb je veľmi málo. Sú hlavne v časti vektorového počtu a to vo forme chýbajúceho znaku $\rightarrow$ nad vektormi.

Výklad látky v knihe je veľmi jasný. Autor podrobne vykladá význam dôležitých viet a všade, kde je u nich možný geometrický výklad, ho aj robí. To isté sa robí aj pri dôkazoch viet, ak sa myšlienky dôkazu dajú geometricky interpretovať. Dôkazy viet sa nachádzajú buď hneď za vetou alebo v samostatných článkoch — kvôli neprerušeniu výkladu — alebo sa ponechávajú čitateľovi ako cvičenia. Okrem riešených príkladov má čitateľ bohatú možnosť riešiť rozmanité príklady v článkoch venovaných cvičeniam. O príkladoch v cvičeniach možno povedať, že sú rôzneho druhu. Niektoré sú na zdokonalovanie početnej techniky, iné sú na odvodzovanie nových poznatkov, čím sa doplňujú vedomosti čitateľa. Niektoré z príkladov sú dosť náročné, u ťažkých príkladov je uvedený návod na ich riešenie. Vcelku možno povedať, že autor túto knihu vypracoval a jednotlivé články sostavil s veľkým pedagogickým porozumením. Kniha je len na niektorých miestach náročnejšia pre čitateľa. Kniha dobre spĺňa účel, pre ktorý bola napísaná, t. j. ako učebnica pre školy technického zamierenia.

Ladislav Mišík, Bratislava

Anton Kotzig: MATEMATICKÉ METÓDY V HOSPODÁRSKEJ PRAXI. SAV, Bratislava 1961, 176 stran, 21 obrázků, cena brož. Kčs 12,40.

Kniha má seznámit hlavně hospodářské pracovníky s některými moderními matematickými metodami, které umožňují odkrývat značné reservy v řadě odvětví národního hospodářství. Protože je určena čtenářům, kteří většinou nemají hlubší matematické vzdělání, vybral si autor převážně takové problémy, které přes jejich praktickou upotřebitelnost lze řešit velmi jednoduchými prostředky. Proto také podtitul knihy zní „Vybrané kapitoly".

Více než polovina vlastní práce je věnována dopravnímu problému a jeho aplikacím. Ve zbylé části ukazuje autor jen stručně řadu dalších námětů (nesouvisících s dopravním problémem), které mohou také vést k odkrytí nevyužitých reserv a mohou podnítit hospodářské pracovníky k hledání dalších reserv.

Kniha je rozdělena na šest částí:

V první části *Expozícia problémov* se čtenář seznamuje na řadě konkrétních příkladů s dopravním problémem a jeho aplikacemi v zemědělství a ve výrobě. V závěru první části se ukazuje, že i případy, ve kterých není v rovnováze výroba se spotřebou, lze převést zavedením nultého výrobního resp. spotřebního střediska na klasický dopravní problém.

Ve druhé části *Metódy riešenia úloh* se v podstatě vysvětluje a doplňuje metoda řešení dopravního problému odvozená v práci autorů J. Bílého, M. Fiedlera a F. Nožičky „Die Graphentheorie in Anwendung auf das Transportproblem" (Čechoslovackij matematičeskij žurnal, *8* (*83*), 1958). Velmi podrobně a instruktivně se v této části probírá postup, kterým lze k danému souvislému řešení najít sousední řešení, a postup, kterým se zjišťuje jeho výhodnost či nevýhodnost. Situace, při níž v jistém kroku popsaného algoritmu obdržíme řešení složené z několika komponent, se autor dotýká pouze v poznámce 16 (a 17). Ze závěru poznámky 16 však může vzniknout nesprávný dojem, že ve všech takových případech lze optimální řešení složit z optimálních řešení jednotlivých komponent. Bylo by proto účelné zabývat se na numerických příkladech i situací, kdy tomu tak není.

Ve třetí části *Zostavenie výhodného východiskového variantu* autor nejdříve ukazuje, že počet kroků algoritmu vedoucího k optimálnímu řešení závisí na volbě řešení výchozího. Proto odvodil dva způsoby pro sestavení výchozího řešení výhodného z tohoto hlediska. První z nich, metoda sdružených center, vede v některých případech (např. pouze dvě výrobní nebo pouze dvě spotřební střediska) dokonce ihned k optimálnímu řešení. Také druhý způsob, metoda očíslování okének podle tzv. representanta, vede k řešení, které bývá velmi blízké optimálnímu řešení. Obě metody jsou velmi podrobně vysvětleny též na praktických příkladech.

Ve čtvrté části *Formulácia príbuzných problémov a ich riešenie* si autor všímá dvou problémů: sestavení nejvýhodnějšího osevního plánu při daném poměru výnosů dvou plodin a určení nejvýhodnějšího rozdělení výroby na dvou linkách při daném poměru produktivity práce. Pozorný čtenář si všimne, že popsaná grafická metoda vznikne geometrisací metody sdružených center (pro dvě výrobní střediska) uváděné ve třetí části.

V páté části *Ďalšie námety pre využitie rezerv* jsou uvedeny tři zcela různorodé problémy: optimální rychlost vozidla, optimální pěstitelské náklady, nejvýhodnější způsob přepravy řepy do cukrovaru. Výklad je velmi stručný, řada výsledků — zejména u prvního problému — je dokonce uvedena bez jakéhokoliv odůvodnění. Chybí zde také ilustrující příklady, které by umožnily lepší pochopení výkladu čtenářům-nematematikům, kterým je kniha převážně určena.

Šestá část je nazvána *Optimálne spojovacie systémy*. V ní autor v podstatě popularizuje výsledky prací O. Borůvký „O jistém problému minimálním" (Práce morav. přírodov. spol., Brno 1926) a V. Jarníka-M. Kösslera „O minimálních grafech", obsahujících n daných bodů (Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, *63*, 1934). Výklad je zde velmi podrobný a přístupný i čtenářům bez hlubšího matematického vzdělání. Možnost aplikace je zde však podstatně menší než u prvních čtyř částí.

Kniha obsahuje na konci resumé v ruském a německém jazyce.

Kromě některých tiskových chyb jsou v knize tyto nedostatky a nedopatření: V tvrzení na str. 49 dole se uvádí, že k řešení jistého problému by bylo třeba asi 50 miliónů let času. Správně vychází přes 100 miliónů let. Na str. 75 došlo k omylu při označení obr. 6, kde má být spotřební centrum, položené nejvíce vpravo, označeno S_3 (nikoli S_2) a kde u úsečky V_4S_6 mají být čísla 200 (40), nikoli 220 (40), u úsečky V_4S_7 čísla 130 (19), nikoli 130 (17), a u úsečky V_1S_2 čísla 70 (63), nikoli 70 (98). Nepříjemná je chyba v řešení příkladu uvedeného na str. 89—90. Čísla v druhém a třetím řádku tabulky na začátku str. 90 mají být po řadě tato: $\frac{10}{9}, \frac{-14}{9}, \frac{4}{9}, \frac{-5}{9}, \frac{16}{9}, \frac{-11}{9}$ $\left(\text{místo } \frac{10}{9}, \frac{-5}{9}, \frac{-5}{9}, \frac{-5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{-2}{9}\right)$, takže následující nerovnosti ani níže uvedená tabulka očíslování okének nejsou správné. Shodou okolností však i chybné očíslování okének vede k optimálnímu řešení. Vzhledem k chybnému výpočtu nejsou pak správné ani výsledky uvedené na str. 91. Správné sestavení tabulky pro representanta dává sice dvojí možnost očíslování okének tabulky, ale obě možná očíslování vedou k témuž řešení. Na tomto příkladě tedy nelze ukázat, jak nejednoznačnost popsané metody může ovlivnit výsledky.

Uvedená nedopatření nesnižují význam recensované knihy, který vidíme zejména v tom, že se zde popularizují matematické metody v hospodářské praxi pro široký okruh čtenářů a dále v tom, že jsou tu znovu čtenáři přiblíženy výsledky starších i novějších prací československých matematiků.

Milan Koman a Jiří Rohlíček, Praha

А. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. (Matematická teorie optimálních procesů.) Госуд. изд. физико-мат. лит., Москва 1961, stran 392, obr. 87, cena 1 r. 13 kop.

Monografie je věnována tomuto problému (a řadě zobecnění): Nechť

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

je daná soustava diferenciálních rovnic, kde $u_1, u_2, \ldots, u_r$ jsou parametry $f_0(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r) = f_0(x, u)$ daná funkce, $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$, $x^2 = (x_1^2, \ldots, x_n^2)$ dané body v E_n, U daná podmnožina v E_r. Hledáme vektorovou funkci $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$ na intervalu $\langle 0, T \rangle$, $0 \leqq T \leqq \infty$ (také T je neznámé), aby byly splněny podmínky:

(i) $u(t) \in U$ pro $t \in \langle 0, T \rangle$, $u(t)$ po částech spojitá.

(ii) Dosadíme-li $u(t)$ do pravých stran soustavy (1) a označíme-li $x(t)$ řešení takto vzniklé soustavy, které je určeno počáteční podmínkou $x(0) = x^1$, pak $x(T) = x^2$. (Je-li $T = \infty$, pak $x(T) = x^2$ znamená $\lim_{t \to \infty} x(t) = x^2$.)

(iii) Integrál $\int_0^T f_0(x(t), u(t))\, \mathrm{d}t$ nabývá nejmenší možné hodnoty.

Tato úloha je variační úloha a je speciálním případem klasické Bolzovy úlohy, je-li U otevřená množina (mlčky předpokládáme, že funkce f_i jsou definovány pro všechny hodnoty svých argumentů a že jsou dostatečně hladké) — viz např. G. A. Bliss, Lectures on the Calculus of Variations, Chicago 1946. — Interpretace, která vedla k formulaci tohoto problému, je však zcela moderní: vektor x charakterisuje stav nějakého technického zařízení (např. otáčky turbiny, rychlost a polohu letadla atd.), vektor u odpovídá veličinám, které umožňují ovlivňovat z vnějšku chod daného zařízení (např. poloha kormidel, přívod energie atd.). x^1 je daná počáteční podmínka, x^2 je stav, kterého chceme dosáhnout (pro $t = T$) volbou funkce $u(t)$ — funkci $u(t)$ budeme nazývat *regulací*. Podle hodnoty integrálu v (iii) posuzujeme kvalitu regulace a funkci $u(t)$, která splňuje podmínky (i), (ii), (iii), budeme nazývat *optimální regulací*. Důležitý speciální případ nastává, je-li $f_0 \equiv 1$. V tomto případě jde o to, aby zařízení přešlo ze stavu x^1 do stavu x^2 v nejkratším možném čase, a proto mluvíme o optimální regulaci vzhledem k času.

Technickou interpretací je motivován předpoklad, že množina U je ohraničená. Budeme také předpokládat, že U je uzavřená množina. Ukazuje se, že v řadě „rozumných" případů optimální regulace $u(t)$ vzhledem k času existuje a že při tom funkce $u(t)$ nabývá hodnoty výlučně v hranici množiny U. V tomto případě však ze zásadních důvodů nelze užít vět, které udávají podmínky nutné k tomu, aby daná dvojice funkcí $u(t)$ a $x(t)$, které splňují (i) a (ii), byly řešením Bolzovy úlohy, neboť pro hodnoty funkcí $\tilde{u}(t)$, s nimiž srovnáváme vyšetřovanou funkci $u(t)$, nemáme k disposici všechny hodnoty z nějakého okolí množiny hodnot funkce $u(t)$.

V monografii je odvozena tato podmínka, která je nutná k tomu, aby bylo splněno (iii), jsou-li $u(t)$ a $x(t)$ dané funkce, které splňují (i) a (ii).

Zaveďme další závisle proměnné $\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_n$ a položme

$$H(x_1, \ldots, x^n, u_1, \ldots, u_r, \Psi_0, \ldots, \Psi_n) = \sum_{i=0}^{n} \Psi_i f_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r),$$

$$K(x_1, \ldots, x_n, \Psi_0, \ldots, \Psi_n) = \max_{u \in U} H(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, \Psi_0, \ldots, \Psi_n).$$

Existují konstanta $\Psi_0 \leqq 0$ a funkce $\Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t)$ na intervalu $\langle 0, T\rangle$ ne vesměs rovné nule takové, že jsou splněny (spolu s (1)) rovnice

$$\text{(2)} \qquad \frac{d\Psi_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t), \Psi_0, \Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(1)),$$

$$\text{(3)} \qquad H(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t), \Psi_0, \Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t)) = \\ = K(x_1(t), \ldots, x_n(t), \Psi_0, \Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t)),$$

$$\text{(4)} \qquad K(x_1(0)), \ldots, x_n(0), \Psi_0, \Psi_1(0), \ldots, \Psi_n(0)) = 0.$$

Vzhledem k (3) toto kritérium se nazývá *princip maxima*. Obvykle je $\Psi_0 < 0$ a protože (2) a (3) jsou lineární a homogenní v $\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_n$, můžeme položit $\Psi_0 = -1$. Jestliže funkce H při fixovaných $x_1, \ldots, x_n, \Psi_0, \ldots, \Psi_n$ nabývá maxima v jediném bodě $u \in U$, pak při hledání optimální regulace podle rovnic (1), (2), (3) můžeme s ohledem na (3) z rovnice $H = K$ (kde všechny proměnné považujeme za nezávislé) vypočítat $u_1, \ldots, u_r$ jako funkce proměnných $x_1, \ldots, x_n, \Psi_1, \ldots$ $\ldots, \Psi_n$ a tyto funkce dosadit do (1) a (2). (1) a (2) tak přejdou v soustavu řádu $2n$ pro závisle proměnné $x_1, \ldots, x_n, \Psi_1, \ldots, \Psi_n$; pro tuto soustavu je třeba řešit okrajovou úlohu $x(0) = x^1$, $x(t) = x^2$ a splnit (4); T není předem dána a také ji určujeme z uvedených podmínek.

Důkaz principu maxima je pracný a je mu věnována celá kapitola 2 (45 str.). V 1. kapitole je princip maxima formulován v několika obměnách a s jeho pomocí je vypočteno několik jednodušších příkladů.

Ve třetí kapitole je s pomocí principu maxima vypracována podrobná teorie pro optimální regulaci vzhledem k času v lineárních soustavách, tj. $f_0 \equiv 1$, f_j jsou lineární funkce svých proměnných. Navíc se předpokládá, že $x^2 = 0$ a že U je konvexní mnohostěn. Za jistých dodatečných předpokladů se dokazuje věta o existenci optimální regulace, o její unicitě a dále se dokazuje, že optimální regulace je po částech konstantní funkce, jejíž hodnoty jsou pouze vrcholy mnohostěnu U. Poznamenejme, že všechny tyto výsledky lze odvodit bez principu maxima využitím tzv. metody variace konstant, jak to již dříve učinili někteří z autorů monografie i někteří jiní autoři. Co se týká předpokladů o U, uveďme toto: Nechť U je kompaktní, V je konvexní obal množiny U a W je nejmenší kompaktní množina, jejíž konvexní obal je V. Existuje-li funkce $u(t)$, která splňuje (ii) a $u(t) \in W$, pak existuje optimální regulace (vzhledem k času) $w(t)$, $t \in \langle 0, T_1)$, $T_1 \leqq T$ a platí $w(t) \in W$. Tedy v jistém smyslu je podstatná množina W a zřejmě $W \subset U$; je-li U konvexní mnohostěn, je W množina jeho vrcholů. Unicitu optimální regulace nelze dokázat pro obecnou konvexní množinu U. Lze ji dokázat, je-li např. U stejnoměrně konvexní; v tomto případě optimální regulace není po částech konstantní, ale je po částech spojitá. Kapitola je doplněna několika složitějšími příklady.

Ve čtvrté kapitole je vyřešeno několik problémů, které úzce souvisí s principem maxima, např. princip maxima je modifikován pro případ, že v pravých stranách soustavy (1) můžeme volit ještě nějaké (konstantní) parametry, a pro případ, že na pravých stranách soustavy (1) se vyskytuje zpožděný argument. V páté kapitole je ukázáno, jak z principu maxima plynou některé výsledky klasického variačního počtu. V šesté kapitole je princip maxima rozšířen na případ, že k podmínkám pro optimální regulaci přistupuje ještě podmínka, že hodnoty řešení $x(t)$ soustavy (1) nesmí opustit danou množinu $Q \subset E_n$. V sedmé kapitole je formulována a v jistém smyslu řešena úloha o optimálním pronásledování bodu y, jehož pohyb je popsán Markovským procesem.

Jak již bylo zdůrazněno, v monografii jde o problematiku, která vznikla matematickou formulací velmi důležitých úloh z teorie regulace. Přitom na nevelkém rozsahu (kniha byla vytištěna v malém formátu) nebylo možné věnovat rovnoměrnou pozornost všem matematickým aspektům této problematiky, která se v současné době rychle rozvíjí. Hlavním přínosem je přenesení ideí z metod variačního počtu na řadu navzájem příbuzných neklasických úloh; tyto výsledky byly dokázány za poměrně slabých předpokladů pro nejdůležitější typy úloh, které se vyskytují v teorii regulace.

Jaroslav Kurzweil, Praha

E. Kamke: MENGENLEHRE (Teorie množin). Vyd. W. de Gruyter, Berlín 1962 v Sammlung Göschen, sv. 999/999a, vyd. 4, str. 194, obr. 6, cena brož. výt. DM 5,80.

Tato knížka je velmi přístupně a vhodně metodicky zpracovanou úvodní příručkou či učebnicí teorie množin. Celý výklad je opřen o intuitivně zřejmý naivní pojem množiny a nepostupuje systémem „věta—důkaz". Jako věty jsou vyznačeny jen skutečně hlavní výsledky. Hlavní těžiště knížky leží v klasických oddílech teorie množin, tj. v teorii kardinálních čísel (kap. 2), v teorii ordinálních typů (kap. 4) a v teorii ordinálních čísel (kap. 5). V poslední (6.) kapitole jsou doplňující výsledky týkající se kardinálních čísel a číselných tříd a některé speciálnější výsledky (např. Zornovo lemma apod.), několik výsledků týkajících se bodových množin (Bolzano-Weierstrassova věta, Cantor-Bendixonova věta apod.). Zde jsou zavedeny některé speciálnější pojmy (např. pojem Hamelovy base). O množinové algebře jsou uvedeny v úvodní (1.) kapitole jen ty nejzákladnější poznatky. Podobně o axiomatické teorii množin jsou uvedeny (kap. 3) pouze poznámky na okraj.

Karel Čulík, Praha

DALŠÍ VYDANÉ KNIHY

Miroslav Menšík: DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE, I. díl. Vydalo Státní nakladatelství technické literatury v Polytechnické knižnici jako 22. svazek II. řady, Praha 1962. Stran 208, obr. 231, cena brož. výt. Kčs 7,10.

Knížka obsahuje v přehledu určivo deskriptivní geometrie požadované osnovami středních všeobecně vzdělávacích a odborných škol. Zobrazovací metody jsou zastoupeny promítáním pravoúhlým (také kótovaným a axonometrickým) a kosoúhlým. Ve zvláštních kapitolách se probírají rotační plochy a rovinné řezy těles. V různých částech je látka doplněna příklady důležitými pro praxi.

Tato publikace je určena žákům i absolventům středních škol, jako příručka k opakování učiva studujícím prvních ročníků vysokých škol technických a dále pracujícím, kteří studují při zaměstnání. Jim je také určen seznam doplňkové literatury.

*

GENERAL TOPOLOGY AND ITS RELATIONS TO MODERN ANALYSIS AND ALGEBRA. Proceedings of the Syposium held in Prague in September 1961. Vydalo Nakladatelství ČSAV, Praha 1962. Stran 364, 1 fotografie a 1 obr., cena váz. výtisku Kčs 32,—.

Tento sborník obsahuje zprávy o průběhu mezinárodního topologického symposia, které uspořádala v Praze Československá akademie věd spolu s Mezinárodní matematickou unií. Jsou tu dále otištěny projevy věnované památce zesnulého akademika EDUARDA ČECHA a všechny přednášky resp. výtahy z přednášek účastníků symposia. (Viz také zprávu o tomto symposiu otištěnou v Časopise pro pěst. matematiky *87* (1962), 121—124.

Redakce