Časopis pro pěstování matematiky

Miloš Dostál

O tenzorových součinech vektorových prostorů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 2, 156--172

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108741`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

O TENZOROVÝCH SOUČINECH VEKTOROVÝCH PROSTORŮ

MILOŠ DOSTÁL, Praha

(Došlo dne 20. listopadu 1961)

Práce se týká některých otázek, vztahujících se k tenzorovému součinu libovolné soustavy vektorových prostorů. Hlavní výsledek první části (větu 1) o struktuře nulového prvku obecného tenzorového součinu aplikujeme v druhé části, kde vyšetřujeme polonormy na tenzorových součinech a otázky duality.

I. Nejprve uveďme některá označení a definice. Všechny ostatní termíny a definice, jichž budeme používat, aniž bychom je zde výslovně uváděli, nalezne čtenář v [3]. Je-li I nějaká množina, J její podmnožina, charakterizovaná vlastností $\mathscr{J}$, pak píšeme $J = \{\iota \in I : \iota$ má vlastnost $\mathscr{J}\}$; je-li dále $K \subseteq I$, značí $J \setminus K$ množinu $\{\iota \in I : \iota \in J, \iota \notin K\}$. *Je-li* $J \subseteq K$ *a současně* $K \setminus J \neq \emptyset$, *píšeme* $J \subset K$. Jsou-li κ, λ, μ prvky z I, značí $\{\kappa, \lambda, \mu\}$ podmnožinu v I tvořenou právě těmito prvky apod. Konečně se nám bude hodit toto zvláštní označení: Je-li n přirozené, pišme $I_n = \{i$ celé $: 1 \leqq i \leqq n\}$.

A-modulem E rozumíme v dalším modul E nad komutativním okruhem A s jednotkou, působící v E jako jednotkový operátor. Je-li A těleso, značíme ho K a mluvíme o vektorovém prostoru E nad tělesem K. Písmenem $\mathbf{K}$ značíme společně těleso reálných čísel $\mathbf{R}$ a těleso všech komplexních čísel $\mathbf{C}$, přičemž během každé úvahy, kde se vyskytuje $\mathbf{K}$, si pod ním představujeme stále jedno a totéž z těles $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$. Je-li dána soustava A-modulů E_ι $(\iota \in I)$, značí $\prod_{\iota \in I} E_\iota$ jejich kartézský součin, který můžeme zřejmým způsobem uvažovat jako A-modul. Prvky z takovýchto kartézských součinů budeme označovat takto: $(x_\iota)_\iota \in I$. (Poznamenejme, že všude, kde to bude možné, budeme v indexové části symbolů vynechávat pro přehlednost označení $\iota \in I$ apod.) Jsou-li dány ještě A-moduly F, G, značí $\mathscr{L}(F; G)$ resp. $\mathscr{B}(E_\iota, \iota \in I; G)$ modul všech lineárních resp. multilineárních zobrazení modulu F resp. $\prod E_\iota$ do G; $F \cong G$ značí izomorfismus modulů F, G. Chápeme-li A jakožto modul nad sebou samým, píšeme $F^* = \mathscr{L}(F; A)$; je-li $x' \in F^*$, píšeme $\langle x, x' \rangle = x'(x)$.

Utvořme nyní A-modul P všech formálních lineárních kombinací prvků z $\prod E_\iota$. Označme H podmodul v P, generovaný všemi prvky jednoho z těchto tvarů:

a) $(x_\iota) + (y_\iota) - (z_\iota)$, přičemž $x_\kappa + y_\kappa = z_\kappa$ pro jedno ale jinak libovolné $\kappa \in I$ a $x_\iota = y_\iota = z_\iota$ pro všechna $\iota \in I \setminus \{\kappa\}$,

b) $(x_\iota) - \alpha(y_\iota)$, kde $\alpha \in A$ a $x_\kappa = \alpha y_\kappa$ pro jedno (libovolné) $\kappa \in I$ a $x_\iota = y_\iota$ pro $\iota \in I \setminus \{\kappa\}$. Označme $\bigotimes_{\iota \in I} E_\iota$ faktormodul P/H. Označíme-li ω kanonické zobrazení $\prod E_\iota$ do P a Θ kanonický homomorfismus P na P/H, je $\varphi = \Theta \circ \omega$ kanonické vnoření množiny $\prod E_\iota$ do $\otimes E_\iota$; píšeme pak $\varphi((x_\iota)) = \otimes x_\iota$. Modul $\otimes E_\iota$ nazýváme *tenzorovým součinem modulů* E_ι $(\iota \in I)$ a vnoření φ *kanonickým multilineárním zobrazením.*

Je-li $I = I_n$ pro jisté přirozené n, píšeme $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i$ místo $\bigotimes_{\iota \in I} E_\iota$ apod. Prvky modulu $\otimes E_\iota$, tj. vlastně třídy modulo H prvků z P, nazýváme tenzory. Je-li $\mathfrak{z}$ taková třída-tenzor, nazýváme každé $z \in \mathfrak{z}$ reprezentantem tenzoru $\mathfrak{z}$. Existuje-li k danému tenzoru $\mathfrak{z}$ reprezentant tvaru (x_ι), tj. lze-li psát pro jistá $x_\iota \in E_\iota$ $\mathfrak{z} = \otimes x_\iota$, říkáme, že $\mathfrak{z}$ je *jednoduchý tenzor*. Základní vlastnost, jíž lze modul $\otimes E_\iota$ při daných E_ι $(\iota \in I)$ charakterizovat, je tato (viz [3], theorem 37, str. 87):

Je-li G libovolný A-modul a $f \in \mathscr{B}(E_\iota, \iota \in I; G)$, existuje právě jedno $\bar{f} \in \mathscr{L}(\otimes E_\iota; G)$ tak, že $\bar{f}(\otimes x_\iota) = f((x_\iota))$ pro všechna $(x_\iota) \in \prod E_\iota$. Zobrazení $f \to \bar{f}$ je izomorfismus modulů $\mathscr{B}(E_\iota, \iota \in I; G)$ a $\mathscr{L}(\otimes E_\iota; G)$.

Buď nyní $\emptyset \neq J \subset I$, J konečná; lze tedy zřejmě předpokládat $J = I_r$ pro jisté přirozené r. Každému $(x_\iota) \in \prod E_\iota$ přiřaďme

$$T_{(x_\iota)} \in \mathscr{L}\big(\bigotimes_{\iota \in J} E_\iota^*;\ \bigotimes_{\iota \in I \setminus J} E_\iota\big)$$

takto: Pro libovolné

$$\mathfrak{z}' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \bigotimes_{i=1}^{r} x'_{i,j} \in \bigotimes_{\iota \in J} E_\iota^* \quad \text{buď} \quad T_{(x_\iota)}(\mathfrak{z}') = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \big(\prod_{i=1}^{r} \langle x_i, x'_{i,j} \rangle\big) \bigotimes_{\iota \in I \setminus J} x_\iota\,.$$

Zobrazení $(x_\iota) \to T_{(x_\iota)}$ je zřejmě multilineární. Označíme-li jeho linearizaci opět T, vidíme, že platí první část tvrzení 1:

Tvrzení 1. *Zobrazení T je homomorfismus modulu $\bigotimes_{\iota \in I} E_\iota$ do $\mathscr{L}(\bigotimes E_\iota^*;\ \bigotimes_{\iota \in I \setminus J} E_\iota)$, které v případě, že též I je konečná, $J \subset I$ a E_ι $(\iota \in I)$ jsou vektorové prostory, je monomorfismem.* (Srov. [5], lemma 1.7, str. 24.)

Důkaz. Nechť tedy $I = I_s$ $(s > r)$ a E_i $(i \in I_s)$ jsou vektorové prostory nad tělesem K. Buď

$$0 \neq \mathfrak{z} = \sum_{j=1}^{p} \bigotimes_{i=1}^{s} x_{i,j} \in \bigotimes_{i=1}^{s} E_i$$

libovolný. Lze zřejmě předpokládat, že $x_{i,1}, \ldots, x_{i,p}$ jsou lineárně nezávislé pro každé $i \in I_r$. Najděme tedy $x'_i \in E'_i$ pro každé $i \in I_r$ tak, aby $\prod_{i=1}^{r} \langle x_{i,1}, x'_i \rangle \neq 0$. Pak ale

$$0 \neq \sum_{j=1}^{p} \big(\prod_{i=1}^{r} \langle x_{i,j}, x'_i \rangle\big) \cdot \bigotimes_{i=r+1}^{s} x_{i,j} = T_{\mathfrak{z}}\big(\bigotimes_{i=1}^{r} x'_i\big)\,,{}^{1})$$

neboť podle [1], § 1, cor. 2 du prop. 7, jsou prvky $\bigotimes_{i=r+1}^{s} x_{i,j}$ $(j \in I_p)$ lineárně nezávislé. Je tedy $T_z \neq 0$, tj. zobrazení $T : \mathfrak{z} \to T_z$ je monomorfismem.[1])

V dalším budeme uvažovat většinou jen vektorové prostory nad nějakým tělesem K. Budeme se snažit zjistit strukturu nulového tenzoru, tj. popsat prvky podprostoru H. V případě, že I je konečná, je to velmi jednoduché:

Tvrzení 2. *Buďte $k > 1$, n přirozená čísla, V_i vektorové prostory nad tělesem K $(i \in I_n)$. Dále buďte $0 \neq v_{i,j} \in V_i$ $(i \in I_n, j \in I_k)$ takové, že $\sum_{j=1}^{k} \bigotimes_{i=1}^{n} v_{i,j} = 0$. Pak existují $\alpha_{i,j} \in K$ tak, že $\sum_{j=1}^{k} \alpha_{i,j} v_{i,j} = 0$ pro každé $i \in I_n$. Zvolíme-li pro každé i pevně libovolné $j_i \in I_k$, lze zvolit prvky $\alpha_{i,j}$ tak, aby $\alpha_{i,j_i} \neq 0$ pro všechna $i \in I_n$.*

Důkaz provedeme pro jednoduchost pro $n = 2$. Pro ostatní n se důkaz provede snadno indukcí. Zvolme $j_1 = j_2 = 1$. Pro $i = 1, 2$ označme W_i podprostor ve V_i generovaný prvky $v_{i,1}, \ldots, v_{i,k}$ a z těchto prvků vyberme bázi v_{i,j_l} $(l \in I_{n_i})$, prostoru W_i obsahující prvek $v_{i,j_1} = v_{i,1}$. Předpokládejme, že naše tvrzení neplatí. Pak alespoň pro jedno i — předpokládejme $i = 1$ — jsou prvky $v_{1,2}, \ldots, v_{1,n}$ lineárně závislé na prvcích $v_{1,j_2}, \ldots, v_{1,j_{n_1}}$. Podle předpokladu a podle [3], theorem 53, str. 105 platí

$$v_1^1 \otimes v_1^2 = -\sum_{j=2}^{k} v_j^1 \otimes v_j^2 \tag{1}$$

v prostoru $W_1 \otimes W_2$, v němž podle [1], § 1, cor. du prop. 7 tvoří prvky

$$v_{j_r}^1 \otimes v_{j_s}^2 \quad (r \in I_{n_1}, s \in I_{n_2})$$

bazi. Podle volby báze ve W_1 však z (1) plyne, že $v_1^1 \otimes v_1^2$ je lineárně závislý na $v_{j_r}^1 \otimes v_{j_s}^2$ $(2 \leqq r \leqq n_1, s \in I_{n_2})$.

Věta 1. *Buď n přirozené, K těleso charakteristiky O a E_ι $(\iota \in I)$ vektorové prostory nad K. Nechť x_ι, $k \in E_\iota$ $(\iota \in I, k \in I_n)$ jsou takové, že platí*

$$\sum_{k \in I_n} \bigotimes_{\iota \in I} x_{\iota,k} = 0\,. \tag{2}$$

Pak existují:

1° *vzájemně disjunktní množiny $I_n^i \subset I_n$ $(i = 0, 1, \ldots, s)$, přičemž $I_n^0 = \{k \in I_n : \otimes x_{\iota,k} = 0\}$, pro něž platí $I_n = \bigcup_{i=0}^{s} I_n^i$, přičemž pro každé $i \in I_s$ má I_n^i aspoň dva prvky a je $\sum_{k \in I_n^i} \otimes x_{\iota,k} = 0$, avšak je-li $\emptyset \neq R \subset I_n^i$ je $\sum_{k \in R} \otimes x_{\iota,k} \neq 0$.*

2° *prvky $\alpha_{\iota,k}^i \in K$ a konečné množiny $J_i \subset I$ $(i \in I_s, k \in I_n^i, \iota \in I)$ tak, že pro každé $i \in I_s$ platí: Je-li $k, l \in I_n^i$, $\iota \in I \setminus J_i$, je $x_{\iota,k} = x_{\iota,l}$, je-li však $\iota \in J_i$, je $\sum_{k \in I_n^i} \alpha_{\iota,k}^i x_{\iota,k} = 0$.*

---

[1]) Z technických důvodů píšeme latinkou i ty indexy, které by měly být psány kurentem; takové indexy však stojí zpravidla jen u symbolů T a B.

Přitom jestliže pro každé $i \in I_s$ a každé $\iota \in J_i$ zvolíme pevně $k_\iota^i \in I_n^i$, lze zvolit $\alpha_{\iota,k}^i$ tak, že $\alpha_\iota^i(k_\iota^i) \neq 0$ pro všechna $\iota \in I_s$.[2])

Důkaz. Existence čísla $s \geqq 0$ a množin I_n^i s vlastnostmi uvedenými v 1° se ověří snadno. Lze zřejmě předpokládat, že $I_n^0 = \emptyset$, $s = 1$ a tedy $n > 1$. Označme $\mathfrak{x}_k = (x_\iota, k)$ $(\iota \in I,\ k \in I_n)$. Podle předpokladu je tedy

$$(3) \qquad \sum_{k \in I_n} \bigotimes_{\iota \in I} x_{\iota,k} = 0\,, \quad \text{avšak} \quad \sum_{k \in R} \bigotimes_{\iota \in I} x_{\iota,k} \neq 0\,, \quad \text{kdykoliv} \quad \emptyset \neq R \subset I_n\,.$$

Z první rovnosti v (3) pak podle definice podmodulu H (viz str. 156) plyne, že existuje přirozené p a $\kappa_j \in I$, ω_j, α_j, $\beta_j \in K$, $\mathfrak{z}_{j,l} = (z_{\iota,j,l}) \in \prod E_\iota$ $(j \in I_p,\ l \in I_3)$ tak, že platí

$$(4) \qquad \sum_{k \in I_n} \mathfrak{x}_k = \sum_{j \in I_p} \omega_j(\mathfrak{z}_{j,1} - \alpha_j \mathfrak{z}_{j,2} - \beta_j \mathfrak{z}_{j,3})\,;$$

$$(5) \qquad \begin{gathered} z_{\kappa_j,j,1} = \alpha_j z_{\kappa_j,j,2} + \beta_j z_{\kappa_j,j,3}\,, \\ z_{\iota,j,1} = z_{\iota,j,2} = z_{\iota,j,3} \quad \text{pro} \quad \iota \in I \setminus \{\kappa_j\},\ j \in I_p\,, \end{gathered}$$

přičemž pro každé $j \in I_p$ je $\omega_j \neq 0$, $\alpha_j = \beta_j = 1$ nebo některý z prvků α_j, β_j je 0. Položme

$$\omega_{j,1} = -\,\omega_j\,, \quad \omega_{j,2} = \omega_j \alpha_j\,, \quad \omega_{j,3} = \omega_j \beta_j \quad (j \in I_p)\,.$$

Pro každé $j \in I_p$ položme $I_{3,j} = I_3$, chápanou jako množinu těch indexů l, které stojí nahoře u symbolů, u nichž je dole index j. Lze pak přepsat (4) na tvar

$$(6) \qquad \sum_{k \in I_n} \mathfrak{x}_n + \sum_{j \in I_p} \sum_{l \in I_{3,j}} \omega_{j,l} \mathfrak{z}_{j,l} = 0\,.$$

Poněvadž P je volný modul, jsou ty prvky z posloupnosti $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$, které jsou navzájem různé, lineárně nezávislé, takže např. k $\mathfrak{x}_1$ musí existovat množiny

$$R_1 = \{k \in I_n : \mathfrak{x}_k = \mathfrak{x}_1\},\ S_1 = \{j \in I_p : \text{existuje } l \in I_{3,j} \text{ tak, že } \mathfrak{z}_{j,l} = \mathfrak{x}_1\},$$

a označíme-li pro každé $j \in S_1$

$$T_j^1 = \{l \in I_{3,j} : \mathfrak{z}_{j,l} = \mathfrak{x}_1\}\,,$$

platí $R_1 \cup S_1 \neq \emptyset$ a je

$$\sum_{k \in R_1} 1 + \sum_{j \in S_1} \sum_{l \in T_j^1} \omega_{j,l} = 0\,.$$

Odtud plyne, že i $S_1 \neq \emptyset$. Dále $R_1 \subset I_n$, neboť v opačném případě by bylo

$$0 = \sum_{k \in I_n} \bigotimes_{\iota \in I} x_{\iota,k} = n \,.\, \bigotimes_{\iota \in I} x_{\iota,1} \quad \text{tedy} \quad \bigotimes_{\iota \in I} x_{\iota,1} = 0\,,$$

což je ve sporu s (3). Dále platí

$$\bigcup_{j \in S_1} T_j^1 \subset \bigcup_{j \in I_p} I_{3,j}\,,$$

[2]) Složitější indexy nepíšeme k patě symbolu, nýbrž za symbol do závorky.

neboť jinak bychom měli $\sum_{k \in I_n \setminus R_1} \mathfrak{x}_1 = 0$, avšak $I_n \setminus R_1 \neq 0$, a dostali bychom tak spor s lineární nezávislostí prvků $\mathfrak{x}_k$. Podle definice je $T_j^1 \neq \emptyset$ pro každé $j \in S_1$, avšak nemůže být $T_j^1 = I_{3,j}$ pro všechna $j \in S_1$, neboť v opačném případě bychom dostali spor s (3). Existuje tedy $j_1 \in S_1$ tak, že $\emptyset \neq T_{j_1}^1 \subset I_{3,j}$; zvolme $l_1 \in I_{3,j_1} \setminus T_{j_1}^1$. Pak se ovšem $\mathfrak{z}_{j_1,l_1}$ liší od $\mathfrak{x}_1$ právě v souřadnici κ_{j_1} (viz (5)). S prvkem $\mathfrak{z}_{j_1,l_1}$ postupujeme stejně jako s prvkem $\mathfrak{x}_1$: najdeme $R_2 \subseteq I_n \setminus R_1$, $S_2 \subseteq I_p$ a pro každé $j \in S_2$, $T_j^2 \subseteq I_{3,j}$ tak, že pro $k \in R_2, j \in S_2$ $l \in T_j^2$ je $\mathfrak{x}_k = \mathfrak{z}_{j,l} = \mathfrak{z}_{j_1,l_1}$ a tedy

$$\sum_{k \in R_2} 1 + \sum_{j \in S_2} \sum_{l \in T_j^2} \omega_{j,l} = 0 .$$

Nyní je buď $I_n = R_1 \cup R_2$ a pak stačí brát $J = \{\kappa_{j_1}\}$, nebo je

$$I_n \setminus (R_1 \cup R_2) \neq \emptyset ; \tag{7}$$

zřejmě však je $j_1 \in S_2$, tj. $S_2 \neq \emptyset$ a dále

$$T^2 = \bigcup_{j \in S_2} T_j^2 \subset \bigcup_{j \in I_p} I_{3,j} ,$$

uvážíme-li, že

$$\emptyset \neq T_{j_1}^1 \subseteq \left(\bigcup_{j \in S_2} I_{3,j} \right) \setminus T^2 .$$

Konečně nemůže být pro všechna $j \in S_2 : T_j^1 \cup T_j^2 = I_{3,j}$ (kde na okamžik klademe $T_j^1 = \emptyset$ pro $j \in S_1$), neboť pak by

$$\sum_{k \in I_n \setminus (R_1 \cup R_2)} \bigotimes_{\iota \in I} x_{\iota,k} = 0 ,$$

což podle (7) dává spor s (3). Najdeme tedy $j_2 \in S_2$ tak, aby existovalo $l_2 \in I_{3,j_2} \setminus (T_{j_1}^1 \cup T_{j_2}^2)$; podržme toto l_2. Prvek $\mathfrak{z}_{j_2,l_2}$ se pak liší od $\mathfrak{z}_{j_1,l_1}$ a tedy i od $\mathfrak{x}_k$ (pro $k \in R_2$) právě v jedné souřadnici a to s indexem κ_{j_2} a tedy od $\mathfrak{x}_1$ v souřadnicích s indexy $\kappa_{j_1}, \kappa_{j_2}$. Podobně pokračujeme s prvkem $\mathfrak{z}_{j_2,l_2}$. Odtud je vidět, že po konečném počtu kroků vyčerpáme jistě všechny $\mathfrak{x}_k$. (Kdybychom totiž vyčerpali dříve všechny $\mathfrak{z}_{j,l}$, zůstalo by v (6) jen $\sum_{k \in R_n} \mathfrak{x}_k = 0$, kde $\emptyset \neq R \subset I_n$.) Liší se tedy všechny $\mathfrak{x}_k$ jen v konečně mnoha souřadnicích, jejichž indexy dáme do množiny J. Před dokončením důkazu uveďme tuto poznámku, která bude v dalším užitečná:

P o z n á m k a. Předpokládáme-li, že p je nejmenší číslo, pro něž platí (4), (5), dostaneme, že i všechna $\mathfrak{z}_{j,l}$, $\mathfrak{x}_k$ se navzájem liší jen v konečně mnoha souřadnicích; skutečně, předpokládejme, že jsme po jistém počtu kroků vyčerpali celý součet $\sum_{k \in I_n} \mathfrak{x}_k$ a ze součtu $\sum_{j \in I_p} \sum_{l \in I_{3,j}} \omega_{j,l} \mathfrak{z}_{j,l}$ že nám zbylo jen

$$\sum_{j \in L} \sum_{l \in I_{3,j}} \omega_{j,l} \mathfrak{z}_{j,l} = 0$$

(viz (6)), přičemž $0 \neq L \subset I_p$; pak ale p není minimální.

Vraťme se nyní k našemu důkazu. Položme $x_{\iota,k} = x_\iota$ pro všechna $\iota \in I \setminus J$, $k \in I_n$. Podle [3], theorem 39, str. 92, jsou prostory $\bigotimes_{\iota \in I} E_\iota$, $(\bigotimes_{\iota \in J} E_\iota) \otimes (\bigotimes_{\iota \in I \setminus J} E_\iota)$ izomorfní. Ze vztahů (3) plyne

$$(8) \qquad 0 = \sum_{k \in I_n} (\bigotimes_{\iota \in J} x_{\iota,k}) \otimes (\bigotimes_{\iota \in I \setminus J} x_\iota) = (\sum_{k \in I_n} \bigotimes_{\iota \in J} x_{\iota,k}) \otimes (\bigotimes_{\iota \in I \setminus J} x_\iota),$$

$$(9) \qquad 0 \neq \bigotimes_{\iota \in I} x_{\iota,k} = (\bigotimes_{\iota \in J} x_{\iota,k}) \otimes (\bigotimes_{\iota \in I \setminus J} x_\iota) \quad (k \in I_n).$$

Z (9) dostaneme $\bigotimes_{\iota \in I \setminus J} x_\iota \neq 0$, což spolu s (8) dá $\sum_{k=1} \bigotimes_{\iota \in J} x_{\iota,k} = 0$. Nyní stačí užít tvrzení 2 a věta je dokázána.

Důsledek 1. *Buďte E_ι $(\iota \in I)$ vektorové prostory nad tělesem K charakteristiky* 0. *Nechť jsou dány prvky $x_\iota, y_\iota \in E_\iota$ $(\iota \in I)$ tak, že platí $0 \neq \bigotimes_{\iota \in I} x_\iota = \bigotimes_{\iota \in I} y_\iota$. Pak existuje konečná množina $J \subset I$ a prvky $\alpha_\iota \in K$ $(\iota \in J)$ tak, že pro $\iota \in I \setminus J$ je $x_\iota = y_\iota$ a $x_\iota = \alpha_\iota y_\iota$ pro $\iota \in J$ a $\prod_{\iota \in I} \alpha_\iota = 1$.*

Zbývá ještě otázka, kdy je $\bigotimes_{\iota \in I} x_\iota = 0$. K tomu zřejmě stačí, aby aspoň pro jedno $\iota \in I$ bylo $x_\iota = 0$. V případě konečné I je jasné, že tato podmínka je i nutná, takže tvrzení 2 nám skutečně popisuje úplně reprezentanty nulového tenzoru. V případě nekonečné I to však jasné není a věta 1 nám zde žádnou odpověď nedává. Ukážeme v II. části, že tomu tak skutečně je aspoň v nejdůležitějším případě $K = \mathbf{K}$. Všimněme si na závěr této části ještě jednoho pojmu, který nám bude v dalším užitečný.

Buďte dány dvě soustavy A-modulů E_ι $(\iota \in I)$, F_ι $(\iota \in I)$; nechť $(u_\iota)_{\iota \in I} \in \prod \mathscr{L}(E_\iota; F_\iota)$. Snadno zjistíme, že zobrazení $(x_\iota) \to \otimes u_\iota(x_\iota)$ je multilineární zobrazení $\prod_{\iota \in I} E_\iota$ do $\bigotimes_{\iota \in I} F_\iota$. Jeho linearizaci označíme $\bigotimes^m_{\iota \in I} u_\iota$ (viz [3], str. 89 a dále). Je to právě to zobrazení $u \in \mathscr{L}(\bigotimes_{\iota \in I} E_\iota; \bigotimes_{\iota \in I} F_\iota)$, pro něž je $u(\otimes x_\iota) = \otimes u_\iota(x_\iota)$ pro každé $(x_\iota) \in \prod E_\iota$. Dále: Zobrazení $(u_\iota) \to \otimes^m u_\iota$ je zřejmě multilineární zobrazení $\prod \mathscr{L}(E_\iota; F_\iota)$ do $\mathscr{L}(\otimes E_\iota; \otimes F_\iota)$; označme jeho linearizaci Λ. Je tedy $\Lambda \in \mathscr{L}(\otimes \mathscr{L}(E_\iota; F_\iota); \mathscr{L}(\otimes E_\iota, \otimes F_\iota))$, přičemž $\Lambda(\otimes u_\iota) = \otimes^m u_\iota$ pro každé $(u_\iota) \in \prod \mathscr{L}(E_\iota; F_\iota)$. Všimněme si ještě případu, kdy I je konečná a kdy $F_\iota = A$ pro každé $\iota \in I$. Poněvadž pak je $\bigotimes_{\iota \in I} A_\iota \cong A$ ([1], § 1, cor. du prop. 5), je

$$\Lambda \in \mathscr{L}(\bigotimes_{\iota \in I} E_\iota^*; (\bigotimes_{\iota \in I} E_\iota)^*).$$

Lze ukázat, že ani v tomto jednoduchém případě nemusí být Λ ani homomorfismus ani epimorfismus (viz [3], str. 133, ex. 30).

II. V této části si budeme všímat této otázky: Máme-li dány polonormované prostory E_ι $(\iota \in I)$ nad $\mathbf{K}$, jak lze definovat na základě těchto polonorem přirozeným způsobem polonormy na $\otimes E_\iota$. K tomu budeme potřebovat pojem součinu libovolného souboru (komplexních) čísel, který definujeme přirozeným způsobem (viz [4], str. 10, Def. 2.2.1) jako limitu usměrněného souboru $(\prod_{\iota\in\mathscr{S}} z_\iota)_{\mathscr{S}}$, kde $\mathscr{S}$ probíhá všechny konečné části množiny I. Je-li tato limita rovna číslu z, píšeme $\prod_{\iota\in I} z_\iota = z$ a říkáme, že součin $\prod z_\iota$ konverguje k z. Analogicky se definuje součet. Platí (viz [4], str. 15, lemma 2.4.2):

(N) Součin souboru $(z_\iota)_{\iota\in I}$ konverguje k limitě a) $z = 0$, právě když $\prod|z_\iota|$ konverguje k 0, b) $z \neq 0$, právě když konvergují $\sum|\mathrm{Arg}\, z_\iota|$ a $\prod|z_\iota| \neq 0$, načež $z = \prod|z_\iota| \,.\, \exp(i \sum \mathrm{Arg}\, z_\iota)$. (Pro každé komplexní číslo $c \neq 0$ klademe $c = |c| \exp(i\,\mathrm{Arg}\, c)$, kde $\mathrm{Arg}\, c \in (-\pi, \pi\rangle$.)

Odtud je vidět, že má smysl definovat: Součin $\prod z_\iota$ je kvazikonvergentní, konverguje-li $\prod|z_\iota|$. Dále řekneme, že $\prod z_\iota$ kvazikonverguje k limitě

a) z, konverguje-li k ní $\prod z_\iota$,

b) 0, jestliže $\prod z_\iota$ nekonverguje, což nastane podle (N), právě když $\prod_{\iota\in I}|z_\iota|$ konverguje k $z > 0$, ale současně $\sum|\mathrm{Arg}\, z_\iota| = +\infty$.

Snadno se dokáže následující tvrzení:

Tvrzení 3. a) *Nechť $\prod z_\iota$ konverguje k $z \neq 0$ (což je totéž, že $\prod z_\iota$ kvazikonverguje k $z \neq 0$). Pak konverguje i $\prod z_\iota^{-1}$ a sice k z^{-1}.*

b) (Kvazi-)konvergují-li $\prod z_\iota$, $\prod v_\iota$, (kvazi-)konverguje i $\prod z_\iota v_\iota$ a je

$$\prod_{\iota\in I} z_\iota \,.\, \prod_{\iota\in I} v_\iota = \prod_{\iota\in I} z_\iota v_\iota \,, \tag{10}$$

konverguje-li alespoň jeden ze součinů $\prod z_\iota$, $\prod v_\iota$. V každém případě však platí

$$|\prod z_\iota v_\iota| \leqq \prod|z_\iota v_\iota| = \prod|z_\iota| \,.\, \prod|v_\iota| \,. \tag{11}$$

Důsledek 2. *Buď $\kappa \in I$, $I' = I \setminus \{\kappa\}$, $s_\iota = t_\iota = z_\iota$ pro $\iota \in I'$, $s_\kappa + t_\kappa = z_\kappa$. Nechť je $\prod_{\iota\in I'} z_\iota$ (kvazi-) konvergentní. Pak je $\prod_{\iota\in I} z_\iota$ (kvazi-) konvergentní a platí*

$$\prod_{\iota\in I} z_\iota = \prod_{\iota\in I} s_\iota + \prod_{\iota\in I} t_\iota = s_\kappa \prod_{\iota\in I'} s_\iota + t_\kappa \prod_{\iota\in I'} t_\iota = z_\kappa \prod_{\iota\in I} z_\iota \,. \tag{12}$$

Pro každé $\iota \in I$ položme $E_\iota = \mathbf{K}$ chápaný jako vektorový prostor nad sebou samým. Je-li $(x_\iota) \in \prod E_\iota$, položme $\vartheta((x_\iota)) = \prod x_\iota$, pokud tento součin konverguje, a $\vartheta((x_\iota)) = 0$, když nekonverguje. Pak z důsledku 2 plyne ihned:

Důsledek 3. *ϑ je multilineární forma na $\prod_{\iota\in I} E_\iota$. Její linearizaci budeme značit opět ϑ.*

Buďte dány E_ι $(\iota \in I)$ polonormované prostory nad $\mathbf{K}$. Polonormu v E_ι resp. v jeho duálu E_ι' budeme značit $\|\,.\,\|_{E_\iota}$ resp. $\|\,.\,\|_{E_\iota'}$ a pokud nebude hrozit nedorozumění jen $\|\,.\,\|_\iota$ nebo $\|\,.\,\|$, a sice jak v E_ι tak v E_ι'. Poznamenejme, že P, H, Θ, φ, ω mají stejný význam jako na str. 156-7. Položme

$$\mathfrak{M}(E_\iota, \iota \in I) = \{(x_\iota) \in \prod_{\iota\in I} E_\iota : \prod_{\iota\in I\setminus J} \|x_\iota\| \text{ konverguje, kdykoliv } J \text{ je konečná}\} \,.$$

Opět budeme značit $\mathfrak{N}_I$ nebo jen $\mathfrak{N}$, je-li jasné o jaké prostory E_ι se jedná; poněvadž všechny moduly v této práci předpokládáme mlčky netriviální, tj. $\neq \{0\}$, je i $\mathfrak{N}$ neprázdná a „netriviální", tj. $\{(0)_{\iota\in I}\} \subset \mathfrak{N}$. Je zřejmé, že lze mluvit o multilineárním zobrazení množiny $\mathfrak{N}$ do nějakého vektorového prostoru F a že tato zobrazení tvoří vektorový prostor, který označujeme v dalším $\mathscr{B}(\mathfrak{N}(E_\iota, \iota \in I); F)$. Označme $\square_{\iota\in I} E_\iota$ lineární obal $\omega(\mathfrak{N})$ v P (v dalším již $\mathfrak{N}$ a $\omega(\mathfrak{N})$ nerozlišujeme); je to zřejmě volný modul na množině $\mathfrak{N}$. Podle první věty o izomorfismu je

$$\Theta(\square E_\iota) = (\square E_\iota + H)/H \cong \square E_\iota/H \cap \square E_\iota\,. \tag{13}$$

Označme

$$\nabla_{\iota\in I} E_\iota = \square E_\iota/H \cap \square E_\iota \quad \text{a} \quad \mathscr{O}(\otimes) = H \cap \square E_\iota\,.$$

Strukturu vektorového prostoru $\mathscr{O}(\otimes)$ popisuje následující tvrzení:

Tvrzení 4. *$\mathscr{O}(\otimes)$ je podprostor v P, který je generován všemi prvky tvaru a), b), str. 156-7, pro něž (x_ι), (y_ι), (z_ι) patří do $\mathfrak{N}$.*

Důkaz. Označme H_1 podprostor v P, generovaný prvky, o nichž mluví tvrzení 4. Je zřejmě $H_1 \subseteq \mathscr{O}(\otimes)$. Najděme H_2 tak, aby $\mathscr{O}(\otimes) = H_1 \dotplus H_2$ direktně. Předpokládejme, že $H_2 \neq \{0\}$. Existuje tedy

$$0 \neq \mathfrak{z} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x_{\iota,k})\,, \quad \mathfrak{z} \in H_2\,,$$

kde pro každé $k \in I_n$ je $\alpha_k \neq 0$, $(x_{\iota,k}) \in \mathfrak{N}$. Zřejmě lze předpokládat $\alpha_k = 1$ pro všechna $k \in I_n$. Na tenzor $\sum_{k=1}^{n} \otimes x_{\iota,k} = 0$ pak aplikujme větu 1. Dostaneme množiny I_n^i ($i = 0, \ldots, s$) s vlastnostmi 1°. Vezměme libovolnou množinu I_n^i ($i \in I_s$) a najděme p, ω_j, α_j, β_j, $\mathfrak{z}_{j,l}$ tak, aby platilo (4), (5). Nechť p je nejmenší číslo s těmito vlastnostmi. Pak z poznámky v důkazu věty 1 plyne, že všechna

$$\mathfrak{z}_{j,l},\ \mathfrak{x}_k = (x_{\iota,k}) \quad (k \in I_n^i,\ l \in I_3,\ j \in I_p)$$

se liší jen v konečně mnoha souřadnicích, z čehož snadno plyne, že všechna $\mathfrak{z}_{j,l} \in \mathfrak{N}$, tj. $\sum_{k=1}^{n} (x_\iota, k) \in H_1$, což není možné, neboť $\mathfrak{z} \in H_2$. Je tedy $s = 0$. Existuje-li nyní nějaké $k \in I_n^0$, opakujeme předcházející úvahu, v níž klademe $\{k\}$ místo I_n^i, z čehož dostaneme $(x_{\iota,k}) \in H_1$, což je opět spor, neboť $\mathfrak{z} \in H_2$.

Z definice volného modulu ([3], str. 80) a z tvrzení 4 plyne ihned tento důsledek:

Důsledek 4. *Je-li F vektorový prostor nad $\mathbf{K}$, je $\mathscr{B}(\mathfrak{N}(E_\iota, \iota \in I); F) \cong \mathscr{L}(\nabla E_\iota; F)$.*

Je-li $f \in \mathscr{B}(\mathfrak{N}(E_\iota, \iota \in I); F)$, pak jeho linearizací nazýváme odpovídající lineární zobrazení $\bar{f} \in \mathscr{L}(\nabla E_\iota; F)$. Prvky prostoru ∇E_ι, což jsou vlastně třídy modulo $\mathscr{O}(\otimes)$ v $\square E_\iota$ (ale nikoliv v P) budeme nazývat tenzory. Poznamenejme však, že za reprezentanta tenzoru $\mathfrak{z} \in \nabla E_\iota$ určeného prvkem $z \in \square E_\iota$ nebudeme považovat žádný prvek, pro nějž $\sum_{k=1}^{s} \alpha_k(x_{\iota,k}) \in (z + H) \setminus (z + \mathcal{O}(\otimes))$, byť i prostor ∇E_ι byl podle (13) izomorfní podprostoru $\Theta(\Box E_\iota)$ v $\otimes E_\iota$. Je-li tedy $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x_{\iota,k})_{\iota \in I}$ nějaký reprezentant libovolného tenzoru $\mathfrak{z} \in \nabla E_\iota$, je $(x_{\iota,k}) \in \mathfrak{N}$ pro všechna $k \in I_n$. Dále se budeme přidržovat této úmluvy:

Máme-li dány polonormované prostory E_ι $(\iota \in I)$ jsou tím již dány prostory E'_ι $(\iota \in I)$; máme-li již definovány P, H, φ, ω, Θ jako na str. 156-7, budou čárky u těchto písmen značit, že se jedná o označení analogického pojmu pro prostory E'_ι $(\iota \in I)$, takže např. P' je volný modul na $\prod E'_\iota$ atd. Obdobně položme $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'_I = \mathfrak{N}(E'_\iota, \iota \in I)$. Z tvrzení 3 okamžitě plyne:

Tvrzení 5. *Je-li* $(x_\iota) \in \mathfrak{N}$, $(x'_\iota) \in \mathfrak{N}'$, *je* $\prod \langle x_\iota, x'_\iota \rangle$ *kvazikonvergentní a je*

$$|\prod \langle x_\iota, x'_\iota \rangle| \leqq \prod \|x_\iota\| \cdot \prod \|x'_\iota\| \,.$$

Zvolme nyní libovolně ale pevně $\iota_0 \in I$ a položme $I' = I \setminus \{\iota_0\}$. Definujme nyní zobrazení T množiny $\mathfrak{N}_I \times \mathfrak{N}_{I'}$ do prostoru E_{ι_0} takto: Je-li $\mathfrak{x} = (x_\iota) \in \mathfrak{N}_I$, $\mathfrak{x}' = (x'_\iota) \in \mathfrak{N}_{I'}$, položme $T(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}') = (\prod_{\iota \in I'} \langle x_\iota, x'_\iota \rangle)\, x_{\iota_0}$, což má smysl vzhledem k tvrzení 5. Z důsledků 2 a 3 dostaneme snadno, že odpovídající přirozeným způsobem bilineární zobrazení $\tilde{T} \in \mathscr{B}(\nabla E_\iota \times \nabla E'_\iota; E_{\iota_0})$. Nebudeme se zdržovat podrobným odvozením zobrazení $\tilde{T}$ ze zobrazení T, neboť zcela analogicky odvozujeme na str. 166 z formy B formu β. V dalším budeme toto zobrazení $\tilde{T}$ značit zase T. Vezmeme-li na okamžik pevné $\mathfrak{z} \in \nabla_{\iota \in I} E_\iota$, pišme pro

$$\mathfrak{z}' \in \bigotimes_{\iota \in I'} E'_\iota : T_z(\mathfrak{z}') = T(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}') \,.^{1})$$

Je zřejmě $T_z \in \mathscr{L}(\nabla_{\iota \in I'} E'_\iota; E_{\iota_0})$. Souvislost zobrazení $\mathfrak{z} \to T_z$ se zobrazením s tvrzením 1 je zřejmá. V dalším předpokládejme pro jednoduchost, že všechny E_ι $(\iota \in I)$ jsou normované. Čtenář si sám rozváží, co z dalšího lze přenést na obecnější případ polonormovaných prostorů.

Nyní budeme definovat polonormu na ∇E_ι. Nejpřirozenější je tato cesta: Pro

$$\mathfrak{x} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k(x_{\iota,k}) \in \Box E_\iota \quad \text{položme} \quad \tilde{\gamma}(\mathfrak{x}) = \sum_{k=1}^{r} |\alpha_k| \cdot \prod_{\iota \in I} \|x_{\iota,k}\| \,;$$

$\tilde{\gamma}$ je zřejmě polonorma na $\Box E_\iota$. Stačí tedy definovat γ na ∇E_ι jako $\gamma = \tilde{\gamma}/\mathcal{O}(\otimes)$, tj. pro $\mathfrak{z} \in \Box E_\iota$ klademe

$$\gamma(\mathfrak{z}) = \gamma(\|\cdot\|_{E_\iota}, \iota \in I; \mathfrak{z}) = \inf\left(\sum_{k=1}^{r} |\alpha_k| \cdot \prod_{\iota \in I} \|x_{\iota,k}\|\right),$$

kde infimum se bere přes všechny reprezentanty tenzoru $\mathfrak{z}$. Užijeme-li výše zmíněného zobrazení T, dokážeme jako v konečném případě ([5], lemma 2.13, str. 37), že platí:

[1]) Z technických důvodů píšeme latinkou i ty indexy, které by měly být psány kurentem; takové indexy však stojí zpravidla jen u symbolů T a B.

Tvrzení 6. *γ je uniformní cross-polonorma, tj.*

a) *pro každý jednoduchý tenzor* $\mathfrak{z} = \otimes x_\iota$, $(x_\iota) \in \mathfrak{N}$ *platí*

$$\gamma(\otimes x_\iota) = \tilde{\gamma}((x_\iota)) = \prod \|x_\iota\|\,, \text{ tj. } \gamma \text{ je cross-polonorma };\tag{15}$$

b) *jsou-li E_ι, F_ι $(\iota \in I)$ normované prostory a označíme-li γ_E resp. γ_F funkcionál γ sestrojený pro prostory E_ι $(\iota \in I)$ resp. F_ι $(\iota \in I)$, platí: Jsou-li dány operátory $\mathscr{F}_\iota \in L(E_\iota, F_\iota)$ $(\iota \in I)$ takové,[3]) že $\prod_{\iota \in I \setminus J} \|\mathscr{F}_\iota\|$ konverguje pro každou konečnou $J \subseteq K$, platí pro každé $\mathfrak{z} \in \nabla E_\iota$*

$$\gamma_F([\otimes^m \mathscr{F}_\iota](\mathfrak{z})) \leqq \gamma_E(\mathfrak{z}) \cdot \prod \|\mathscr{F}_\iota\|\,,\tag{16}$$

tj. γ je uniformní.

Důkaz a) se provede, jak již bylo řečeno, analogicky jako v konečném případě

b) Buď $J \subseteq I$ konečná a označme $K = I \setminus J$. Buď $\sum_{k=1}^{r} (x_{\iota,k})$ reprezentant tenzoru $\mathfrak{z} \in \nabla E_\iota$. Z tvrzení 3 dostaneme:

$$\Big(\sum_{k=1}^{r} \prod_{\iota \in K} \|x_{\iota,k}\|\Big) \cdot \prod_{\iota \in K} \|\mathscr{F}_\iota\| = \sum_{k=1}^{r} \prod_{\iota \in K} \|\mathscr{F}_\iota\| \cdot \|x_{\iota,k}\| \geqq \sum_{k=1}^{r} \prod_{\iota \in K} \|\mathscr{F}_\iota(x_{\iota,k})\|\,.$$

Odtud snadno plyne, že

$$\sum_{k=1}^{r} (\mathscr{F}_\iota(x_{\iota,k})) \in \square F_\iota\,, \quad \text{tj.} \quad [\otimes^m \mathscr{F}_\iota](\mathfrak{z}) \in \nabla E_\iota\,,$$

takže levá strana v (16) má smysl; (16) pak dostaneme, položíme-li v posledních nerovnostech $K = I$ a přejdeme-li k infimu.

Důsledek 5. *Jsou-li E_ι $(\iota \in I)$ vektorové prostory nad tělesem* $\mathbf{K}$, *je $\otimes x_\iota = 0$ právě když aspoň pro jedno $\iota \in I$ je $x_\iota = 0$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\otimes x_\iota = 0$, ale že $x_\iota \neq 0$ pro všechna $\iota \in I$. Zvolme nyní v každém E_ι normu $\|\,.\,\|_\iota$ tak, aby $\|x_\iota\|_\iota = 1$, což zřejmě lze. Pak ovšem $(x_\iota) \in \mathfrak{N}(E_\iota, \iota \in I)$ a $\gamma(\otimes x_\iota) = 1$, tedy $\otimes x_\iota \neq 0$ v ∇E_ι. Tento prostor je však podle (13) izomorfně vnořen do $\otimes E_\iota$, tj. $\otimes x_\iota \neq 0$ v $\otimes E_\iota$, cbd.

Na str. 161 jsme definovali zobrazení Λ prostoru $\otimes E_\iota^*$ do $\mathscr{L}(\otimes E_\iota; \otimes \mathbf{K})$. Prostor $\nabla E_\iota'$ lze však přirozeným způsobem vnořit do $\otimes E_\iota^*$, neboť $\nabla E_\iota' \subseteq \otimes E_\iota' \subseteq \otimes E_\iota^*$ (k první inkluzi viz (13), k druhé [3], str. 105, theorem 53). Pro $\mathfrak{z}' \in \nabla E_\iota'$ označme $\tilde{\Lambda}(\mathfrak{z})$ zobrazení, které je zúžením zobrazení $\Lambda(\mathfrak{z}')$ (kde $\mathfrak{z}'$ je uvažován jako prvek z $\otimes E_\iota^*$) na ∇E_ι; zřejmě pak je $[\tilde{\Lambda}(\mathfrak{z}')](\mathfrak{z}) \in \nabla \mathbf{K}$ pro každé $\mathfrak{z} \in \nabla E_\iota$. Podobně uvážíme-li, že ∇E_ι lze vnořit do $\otimes E_\iota'^*$, lze na základě zobrazení Λ' prostoru $\otimes E_\iota'^*$ do $\mathscr{L}(\otimes E_\iota'; \otimes \mathbf{K})$ definovat zobrazení $\tilde{\Lambda}'$ prostoru ∇E_ι do $\mathscr{L}(\nabla E_\iota'; \nabla \mathbf{K})$. Vzpomeneme-li si na definici formy z důsledku 3, bude η resp. η' značit zobrazení, které každému $\mathfrak{z}' \in \nabla E_\iota'$ resp. $\mathfrak{z} \in \nabla E_\iota$

[3]) Jsou-li A, B topologické lineární prostory, značí $L(A; B)$ prostor všech spojitých lineárních zobrazení A do B.

přiřazuje formu $\mathfrak{z} \to \vartheta([\tilde{A}(\mathfrak{z}')](\mathfrak{z}))$ patřící do $(\nabla E_\iota)^*$, resp. formu $\mathfrak{z}' \to \vartheta([\tilde{A}'(\mathfrak{z})](\mathfrak{z}'))$ náležející do $(\nabla E'_\iota)^*$.

Tvrzení 7. *Je $\eta(\nabla E'_\iota) \subseteq (\nabla E_\iota)'$, $\eta'(\nabla E_\iota) \subseteq (\nabla E'_\iota)'$, kde duály na pravých stranách jsou brány vzhledem k polonormě γ resp. γ'.*

Důkaz. Buď $(x'_\iota) \in \mathfrak{N}$. Že pak $\tilde{A}(\otimes x'_\iota) \in L(\nabla E_\iota; \nabla K)$, plyne z (16). Že však $\vartheta \in L(\nabla K, K)$, plyne ihned takto: Je-li

$$\mathfrak{z} = \sum_{k=1}^{r} \otimes x_{\iota,k} \in \nabla K, \quad \text{je} \quad |\vartheta(\mathfrak{z})| \leqq \sum_{k=1}^{r} |\vartheta(\otimes x_{\iota,k})| = \sum_{k=1}^{r} \prod \|x_{\iota,k}\|$$

a tedy po přechodu k infimu máme $|\vartheta(\mathfrak{z})| \leqq \gamma_K(\mathfrak{z})$, kde γ_K je funkcionál γ sestrojený pro ∇K. Zajímá nás přirozeně, kdy je γ norma. Odpověď je velmi snadná:

Tvrzení 8. *γ je norma, právě když I je konečná.*

Důkaz. Je-li I konečná, dokážeme tvrzení snadno z tvrzení 1 jako v případě $I = I_2$ (viz [5], str. 37). Je-li I nekonečná, vyberme v každém E_ι prvek x_ι tak, aby $\|x_\iota\| = 1$ a položme $y_\iota = 2^{-1}x_\iota$ pro každé $\iota \in I$. Podle důsledku 5 je $\otimes y_\iota \neq 0$. Podle [4], lemma 2.4.1, str. 13, je $\prod 2^{-1} = 0$ a tedy podle (10) a (15) je $\gamma(\otimes y_\iota) = 0$.

Nyní se obrátíme k vyšetřování duality prostorů ∇E_ι, $\nabla E'_\iota$: Je-li $\mathfrak{x} = (x_\iota) \in \mathfrak{N}$, $\mathfrak{x}' = (x'_\iota) \in \mathfrak{N}'$, má podle tvrzení 5 smysl číslo $B(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}') = \prod \langle x_\iota, x'_\iota \rangle$. Je-li $\mathfrak{x} \notin \mathfrak{N}$ nebo $\mathfrak{x}' \notin \mathfrak{N}'$, klademe $B(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}') = 0$. Vezměme nyní pevně $\mathfrak{x} \in \mathfrak{N}$. Pak klademe-li $B_x(\mathfrak{x}') = B(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}')$,[1]) je zřejmě $B_x \in \mathscr{B}(E'_\iota, \iota \in I; K)$. Označme $\bar{B}_x$ jeho linearizaci a ξ_B zobrazení $\mathfrak{x} \to \bar{B}_x$; zřejmě je pak $\xi_B \in \mathscr{B}(E_\iota, \iota \in I; (\otimes E'_\iota)^*)$. Označme $\bar{\xi}_B$ jeho linearizaci, tj. $\bar{\xi}_B \in \mathscr{L}(\otimes E_\iota; (\otimes E'_\iota)^*)$. Podle [1], § 1, prop. 1, je však tento prostor kanonicky izomorfní s prostorem $\mathscr{B}(\otimes E_\iota, \otimes E'_\iota; K)$. Nechť $\bar{\beta}$ je prvek tohoto prostoru odpovídající prvku $\bar{\xi}_B$ v tomto izomorfismu. Zúžení $\bar{\beta}$ na $\nabla E_\iota \times \nabla E'_\iota$ je ovšem bilineární forma, kterou označíme β. Z bilinearity β, z definice zmíněného kanonického izomorfismu a z definice ξ_B a $\bar{\xi}_B$ plyne, že pro každé

$$\mathfrak{z} = \sum_{k=1}^{r} \otimes x_{\iota,k} \in \nabla E_\iota, \quad \mathfrak{z}' = \sum_{l=1}^{s} \otimes x_{\iota,k} \in \nabla E'_\iota$$

je

$$\beta(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}') = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \langle x_{\iota,k}, x'_{\iota,l} \rangle . \tag{17}$$

Z (17) plyne okamžitě, že

$$|\beta(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}')| \leqq \gamma(\mathfrak{z}) \cdot \gamma'(\mathfrak{z}') . \tag{18}$$

Ponecháme-li označení z tvrzení 7, vidíme, že je

$$\beta(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}') = [\eta'(\mathfrak{z})](\mathfrak{z}') = [\eta(\mathfrak{z}')](\mathfrak{z}) . \tag{19}$$

Předpokládejme na chvíli, že I je konečná, tj. že $I = I_n$ pro $n > 1$ přirozené (případ $n = 1$ je triviální). Položme $J = I_{n-1}$ a nechť $0 \neq \mathfrak{z} = \sum_{j=1}^{k} \bigotimes_{i=1}^{n} x_{i,j}$. Podle tvrzení 1 je

$T_z \neq 0$, tj. existuje $0 \neq \mathfrak{z}' \in \bigotimes_{i=1}^{n-1} E'_i$, pro něž $T_z(\mathfrak{z}') \neq 0$; přitom lze předpokládat, že

$$\mathfrak{z}' = \bigotimes_{i=1}^{n-1} x'_i \,, \quad \gamma_1(\mathfrak{z}) = 1 \,, \quad \text{kde} \quad \gamma_1 = \gamma(\|\,.\,\|_i,\ i \in I_{n-1}) \,,$$

neboť taková $\mathfrak{z}'$ generují $\bigotimes_{i=1}^{n-1} E'_i$. Poněvadž $0 \neq T_z(\mathfrak{z}') \in E_n$, existuje $x'_n \in E'_n$, $\|x'_n\| = 1$, pro něž je

$$0 \neq \langle T_z(\mathfrak{z}'), x'_n \rangle = \beta(\mathfrak{z}, \bigotimes_{i=1}^{n} x'_i) \,.$$

Vyměníme-li roli E'_i a E_i, vidíme, že jsme dokázali toto tvrzení:

Tvrzení 9. *Prostory* $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i$, $\bigotimes_{i=1}^{n} E'_i$ *jsou v dualitě vzhledem k bilineární formě*

$$\beta(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}') = [\tilde{A}(\mathfrak{z}')](\mathfrak{z}) = [\tilde{A}'(\mathfrak{z})](\mathfrak{z}')$$

(viz (17), ϑ je totiž v konečném případě izomorfismus; viz [1], § 1, cor. du prop. 5).

Dříve než se obrátíme k vyšetřování duality v obecném případě, odvoďme jednu vlastnost polonormy γ:

Tvrzení 10. *Buď dán nekonečný soubor normovaných prostorů* E_ι $(\iota \in I)$. *Nechť* $\mathfrak{z}$ *je tenzor z* ∇E_ι, *k němuž existuje reprezentant* $\sum_{k=1}^{r} (x_{\iota,k})$ *s těmito vlastnostmi: je-li* $k, l \in I_r$, $k \neq l$ *a* $\gamma(\otimes x_{\iota,k}) > 0$, $\gamma(\otimes x_{\iota,l}) > 0$, *pak existuje nekonečná* $J_{k,l} \subseteq I$, *pro niž platí* $x_{\iota,k} \neq x_{\iota,l}$ *pro všechna* $\iota \in J_{k,l}$. *Potom je* $\gamma(\mathfrak{z}) = \sum_{k=1}^{r} \prod_{\iota \in I} \|x_{\iota,k}\|$.

Důkaz. Vezměme libovolný jiný reprezentant tenzoru $\mathfrak{z}$; lze ho zřejmě předpokládat ve tvaru $\sum_{k=r+1}^{s} (y_{\iota,k})$. Je tedy $0 = \sum_{k=1}^{r} \otimes x_{\iota,k} - \sum_{k=r+1}^{s} \otimes y_{\iota,k}$. Podle věty 1 a tvrzení 4 existují, množiny I_s^j $(0 \leqq j \leqq p)$ a $\mathfrak{z}_{j,l}$ s vlastnostmi tam popsanými, přičemž lze předpokládat že všechna $\mathfrak{z}_{j,l} \in \mathfrak{N}$. Předně si všimneme, že lze předpokládat, že pro všechna $k \in I_r$ je $\gamma(\otimes x_{\iota,k}) > 0$, neboť je-li

$$K = \{k \in I_r : \gamma(\otimes x_{\iota,k}) = 0\} \neq \emptyset \,,$$

stačí provést úvahu pro tenzor $\mathfrak{x} = \mathfrak{z} - \sum_{k \in K} \otimes x_{\iota,k}$, neboť zřejmě $\gamma(\mathfrak{z}) = \gamma(\mathfrak{x})$. Z našich předpokladů nyní plyne, že je-li $k \neq l$, $k, l \in I_r$, je $k \in I_s^{j_k}$, $l \in I_s^{j_l}$, kde $j_k, j_l \in I_p$, $j_k \neq j_l$. (Právě na tomto místě jsme použili věty 1.) Vezmeme-li tedy libovolné $k \in I_r$, plyne z vlastnosti množiny $I_s^{j_k}$, že

$$\otimes x_{\iota,k} = \sum_{q \in I_s^{j_k}} \underset{\iota \in I}{\otimes} y_{\iota,q} \,,$$

z čehož dostaneme podle (15), že platí

$$\gamma(\otimes x_{\iota,k}) = \prod \|x_{\iota,k}\| \leqq \sum_{q \in I_s^{j_k}} \prod \|y_{\iota,q}\| \,;$$

sečtením těchto nerovností přes $k = 1, \dots, r$ dostaneme, že

$$\gamma(\mathfrak{z}) \leqq \sum_{k=1} \prod \|x_{\iota,k}\| \leqq \sum_{k=r+1}^{s} \prod \|y_{\iota,k}\| ;$$

avšak $\sum_{k=r+1}^{s} \otimes y_{\iota,k}$ byl libovolný reprezentant tenzoru $\mathfrak{z}$. Přechodem k infimu dostaneme závěr.

Poznámka. Speciálním případem tvrzení 10 je tvrzení 6 a). Význam těchto tvrzení je v tom, že dovolují v některých případech „vypočítat" hodnotu polonormy γ, tj. obejít v definici $\gamma(\mathfrak{z})$ infimum.

Označíme-li ϱ resp. ϱ' kanonický homomorfismus $\Box E_\iota \to \nabla E_\iota$ resp. $\Box E'_\iota \to \nabla E'_\iota$, pišme $\mathcal{O}(\gamma) = (\gamma \circ \varrho)^{-1}(0)$, $\mathcal{O}(f) = (\eta \circ \varrho)^{-1}(0)$, Význam $\mathcal{O}'(\gamma)$, $\mathcal{O}'(f)$ je jasný.

Věta 2. *Pro podprostory* $\mathcal{O}(\otimes)$, $\mathcal{O}(\gamma)$, $\mathcal{O}(f)$ v $\Box E_\iota$ resp. $\mathcal{O}'(\otimes)$, $\mathcal{O}'(\gamma)$, $\mathcal{O}'(f)$ v $\Box E'_\iota$ *platí*

$$\mathcal{O}(\otimes) \subseteq \mathcal{O}(\gamma) \subseteq \mathcal{O}(f) \quad \text{resp.} \quad \mathcal{O}'(\otimes) \subseteq \mathcal{O}'(\gamma) \subseteq \mathcal{O}'(f)\,. \tag{20}$$

Je-li I konečná, platí všude v (20) *rovnosti, je-li I nekonečná, je*

$$\mathcal{O}(\otimes) \subset \mathcal{O}(\gamma) \subset \mathcal{O}(f) \quad \text{resp.} \quad \mathcal{O}'(\otimes) \subset \mathcal{O}'(\gamma) \subset \mathcal{O}'(f)\,. \tag{21}$$

Dále je vždy $\mathcal{O}(\gamma) \cap \mathfrak{N} = \mathcal{O}(f) \cap \mathfrak{N}$ a v případě, že všechny E_ι jsou reflexivní, platí i $\mathcal{O}'(\gamma) \cap \mathfrak{N}' = \mathcal{O}'(f) \cap \mathfrak{N}'$. (Všimněme si této drobnosti: Z tvrzení 4 plyne, že $\mathcal{O}(\otimes) \cap \mathfrak{N}$ generuje $\mathcal{O}(\otimes)$, zatímco v případě nekonečné I plyne z věty 2, že $\mathcal{O}(f) \cap \mathfrak{N}$ negeneruje $\mathcal{O}(f)$.)

Důkaz. Inkluze $\mathcal{O}(\otimes) \subseteq \mathcal{O}(\gamma)$ je triviální a co se týče rovnosti, viz tvrzení 8. Že platí $\mathcal{O}(\gamma) \subseteq \mathcal{O}(f)$, plyne ze vztahů (18), (19). Je-li I nekonečná, dostáváme z tvrzení 9 a z (19), že $\mathcal{O}(\gamma) = \mathcal{O}(f)$. Buď nyní I nekonečná. Zvolme libovolně prostou posloupnost $J = \{\iota_n\}_{n \geqq 1} \subseteq I$. Najděme nyní pro každé $\iota \in I$ $y_\iota \in E_\iota$ tak, aby $\|y_\iota\| = 1$. Položme nyní $x_\iota = y_\iota$ pro $\iota \in I \setminus J$ a dále

$$x_{\iota_1} = y_{\iota_1}\,, \quad x_{\iota_2} = y_{\iota_2}\,,$$
$$x_{\iota_{2k-1}} = (k^2 - 1)/k^2 \,.\, y_{\iota_{2k-1}}\,, \quad x_{\iota_{2k}} = k^2/(k^2 - 1)\, y_{\iota_{2k}} \quad \text{pro} \quad k \geqq 2\,.$$

Podle [4], str. 13, lemma 2.4.1 $\prod \|x_\iota\|$ konverguje a to zřejmě k 1. Pro libovolné $(x'_\iota) \in \mathfrak{N}'$ máme podle tvrzení 3 b):

$$\beta(\otimes x_\iota, \otimes x'_\iota) = \prod \langle x_\iota, x'_\iota \rangle = \prod \langle y_\iota, x'_\iota \rangle = \beta(\otimes y_\iota, \otimes x'_\iota)\,,$$

tj. zřejmě $\mathfrak{z} = \otimes x_\iota - \otimes y_\iota \in \mathcal{O}(f)$; ale podle tvrzení 10 je $\gamma(\mathfrak{z}) = \prod \|x'_\iota\| + \prod \|y'_\iota\| = 2$, takže $\mathfrak{z} \in \mathcal{O}(f) \setminus \mathcal{O}(\gamma)$.

Buď nyní $(x_\iota) \in \mathfrak{N} \cap (\mathcal{O}(f) \setminus \mathcal{O}(\gamma))$. Zvolme pro každé $\iota \in I$, že $x'_\iota \in E'_\iota$ tak, aby $\langle x_\iota, x'_\iota \rangle = \|x_\iota\|$, $\|x'_\iota\| = 1$ (viz [2], chap. II, cor. 2 du th. 1); je tedy $(x'_\iota) \in \Box E'_\iota$ a je

$$\beta(\otimes x_\iota, \otimes x'_\iota) = \prod \langle x_\iota, x'_\iota \rangle = \prod \|x'_\iota\| > 0\,,$$

neboť podle (15) a podle předpokladu je $0 < \gamma(\otimes x_\iota) = \prod \|x_\iota\|$, což je spor; skutečně tedy $\mathcal{O}(\gamma) \cap \mathfrak{N} = \mathcal{O}(f) \cap \mathfrak{N}$. „Čárkovaný" případ se dokáže obdobně.

Důsledek 6. *Prostory ∇E_ι, $\nabla E'_\iota$ jsou v dualitě vzhledem k bilineární formě β, právě když I je konečná.*

Důkaz plyne ihned z tvrzení 9 a z inkluzí $\mathcal{O}(\otimes) \subset \mathcal{O}(f)$, $\mathcal{O}'(\otimes) \subset \mathcal{O}'(f)$ v případě, že I je nekonečná.

Vezmeme-li místo dvojice ∇E_ι, $\nabla E'_\iota$ dvojici $\nabla E_\iota/\mathcal{O}(\gamma)$, $\nabla E'_\iota/\mathcal{O}'(\gamma)$, je opět β bilineární formou pro tyto prostory; ale stejně jako jsme dostali z věty 2 důsledek 6, dostaneme, že tyto prostory jsou vzhledem k formě β v dualitě, právě když I je konečná.

Vezměme konečně dvojici $E = \nabla E_\iota/\mathcal{O}(f)$, $F = \nabla E'_\iota/\mathcal{O}(f')$; je-li $\mathfrak{z} \in \nabla E_\iota$, $\mathfrak{z}' \in \nabla E'_\iota$, položme $\langle \eta'(\mathfrak{z}), \eta(\mathfrak{z}') \rangle = \beta(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}')$. Snadno se zjistí, že tato definice má smysl. Forma $\langle .,. \rangle$, která není v podstatě nic jiného než bilineární forma β, je bilineární formou na dvojici prostorů E, F, které jsou vzhledem k ní v dualitě. Vzhledem k (21) pozbývá γ na E a γ' na F smysl. Snadno však sestrojíme na ∇E_ι polonormu λ, pro niž bude $\mathcal{O}(\lambda) = (\lambda \circ \varrho)^{-1}(0) = \mathcal{O}(f)$, tj. λ bude norma na E. Stačí položit pro $\mathfrak{z} \in \nabla E_\iota$ resp. $\mathfrak{z}' \in \nabla E'_\iota$:

$$\lambda(\mathfrak{z}) = \sup_{\gamma'(\mathfrak{z}')=1} |\beta(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}')| \,, \quad \lambda'(\mathfrak{z}') = \sup_{\gamma(\mathfrak{z})=1} |\beta(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}')| \,. \tag{22}$$

Z (18) plyne, že $\lambda(\mathfrak{z})$, $\lambda'(\mathfrak{z}')$ jsou vždy konečná čísla. Dále si všímejme jen funkcionálu λ. Pro λ' platí všecko analogicky. Je zřejmě $\mathcal{O}(\lambda) = \mathcal{O}(f)$ a λ je tedy na E norma. Vrátíme-li se nyní k tvrzením 5, dostáváme jiné vyjádření pro $\lambda(\mathfrak{z})$:

$$\lambda(\mathfrak{z}) = \|T_z\| = \sup_{\gamma'(\mathfrak{z}')\neq 0} \|T_z(\mathfrak{z}')\|_{\iota_0}/\gamma'(\mathfrak{z}') \,. \tag{23}$$

Důkaz (23) by se provedl podobně jako v případě $I = I_2$, viz [5], th. 2.4, str. 40. Z (23) a z tvrzení 1 ihned plyne:

Důsledek 7. *λ je norma na ∇E_ι, právě když I je konečná.*

Důsledek 8. *Bilineární funkcionál T má normu*

$$\|T\| = \sup_{\gamma(\mathfrak{z})\neq 0} \frac{\|T_z\|}{\gamma(\mathfrak{z})} = \sup_{\gamma(\mathfrak{z})\neq 0} \frac{\lambda(\mathfrak{z})}{\gamma(\mathfrak{z})} \,. \tag{24}$$

Označme toto číslo, které závisí jen na souboru normovaných prostorů E_ι ($\iota \in I$) a nikoliv na zvoleném $\iota_0 \in I$, znakem λ/γ. Uvidíme, že je vždy $\lambda/\gamma \leqq 1$. Obdobně jako v [5] řekneme, že polonorma α na ∇E_ι je crosspolonorma, platí-li pro ni tvrzení 6 a 7. Že je crosspolonorma, plyne snadno z toho, že analogicky jako v případě $I = I_2$ (viz [5], th. 2.4, str. 40) se ukáže, že suprema v (22) lze brát jen přes jednoduché tenzory. Nazvěme dále polonormu α^* na $\nabla E'_\iota$ asociovanou s polonormou α, jestliže pro každé $\mathfrak{z}' \in \nabla E'_\iota$ platí

$$\alpha^*(\mathfrak{z}') = \sup_{\alpha(\mathfrak{z})=1} |\beta(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}')| \,.$$

Obdobně se definuje polonorma δ^* na ∇E_ι, asociovaná s polonormou δ na $\nabla E'_\iota$. (Aby funkcionál α^* z (25) byl skutečně polonormou, je nutné a stačí, aby byl konečný.) Z (22) a z (25) plyne, že je $\lambda = \gamma'^*$, $\lambda' = \gamma^*$. Stejně jako v případě $I = I_2$ platí: γ je největší crosspolonorma. λ je nejmenší crosspolonorma, jejíž asociovaná je též crosspolonorma (viz [5], theorem 2.1, str. 32 a theorem 2.1, str. 32). Speciálně tedy $\lambda/\gamma \leqq 1$.

Poznámka. Tato práce je částí diplomové práce napsané pod vedením akademika M. Katětova, za jehož laskavost i za pozornost, se kterou práci sledoval, mu co nejsrdečněji děkuji.

Literatura

[1] *Bourbaki N.*: Élements de Mathématique, Livre II, Chap. III: Algèbre multilinéaire. Hermann et Cie, Act. Sci et Ind. 1044, Paris 1948.

[2] *Bourbaki N.*: Élements de Mathématique, Livre V, Chap. I—III: Espaces vectoriels topologiques. Hermann et Cie, Act. Sci. et Ind. 1189, Paris 1953.

[3] *Chevalley C.*: Fundamental concepts of algebra. Academic press, Inc, New York 1956.

[4] *Neumann J. von*: On infinite direct products. Compositio mathematica, *6* (1939), 1—77.

[5] *Schatten R.*: A theory of cross-spaces, Princeton University Press, 1950.

Резюме

ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

МИЛОШ ДОСТАЛ (Miloš Dostál), Прага

(Поступило в редакцию 20/XI 1961 г.)

Целью настоящей работы является развитие теории тензорных произведений общих (это значит бесконечных) систем $E_\iota(\iota \in I)$ векторных пространств над полем K характеристики 0 (см. определения в [1], [3]). Главным результатом первой „алгебраической" части является теорема 1, описывающая общую форму нулевого тензора:

Всякий тензор $\mathfrak{z} = 0$ — *более точно всякий представитель нулевого тензора — может быть записан в виде суммы нулевых тензоров* $\mathfrak{z}_i$, *каждый из которых является или простым, т.е. имеет форму* $\mathfrak{z}_i = \bigotimes_{\iota \in I} x_\iota$, $x_\iota \in E_\iota$, *или имеет форму* $\mathfrak{z}_i = \sum_{k=1}^{r} \bigotimes_{\iota \in I} x_{\iota,k} = 0$ *и обладает следующими свойствами*: 1° *если* $\emptyset \neq R$ — *собственное подмножество множества* $I_r = \{1, 2, \ldots, r\}$, *то* $\sum_{k \in R} \bigotimes_{\iota \in I} x_{\iota,k} \neq 0$; 2° *существует* ***конечное*** *подмножество* $J \subset I$ *такое, что для* $\iota \notin J$ *имеем* $x_{\iota,k} = x_{\iota,l}$ *для всех* $k, l \in I_r$ *и для каждого фиксированного* $\iota \in J$ *координаты* $x_{\iota,k}(k \in I_r)$ *линейно зависимы.*

Во второй части мы рассматриваем исключительно пространства над полем всех действительных или комплексных чисел. Сначала мы должны ограничить запас элементов в тензорных произведениях, потом определяем разные полунормы в этих общих произведениях и изучаем натуральную двойственность между $\bigotimes_{\iota \in I} E_\iota$ и $\bigotimes_{\iota \in I} E'_\iota$ (т.е. произведением сопряженных пространств). Прежде всего исследуется полунорма, являющаяся обобщением γ-нормы Шаттена.

Используя эту полунорму, мы доказываем следующее утверждение:

Если $\bigotimes_{\iota \in I} x_\iota = 0$ *— простой нулевой тензор, то* $x_\kappa = 0$ *для некоторого* $\kappa \in I$.

Другое утверждение:

Обозначим

$$\mathcal{O}(\otimes) = \{\mathfrak{z} \in \bigotimes_{\iota \in I} E_\iota : \mathfrak{z} = 0\}\,, \quad \mathcal{O}(\gamma) = \{\mathfrak{z} \in \bigotimes_{\iota \in I} E_\iota : \gamma(\mathfrak{z}) = 0\}\,,$$

$$\mathcal{O}(f) = \{\mathfrak{z} \in \bigotimes_{\iota \in I} E_\iota : \mathfrak{z} \text{ — нулевой функционал на } \bigotimes_{\iota \in I} E'_\iota\}\,.$$

(Ясно, что $\mathcal{O}(\otimes) \subseteq \mathcal{O}(\gamma) \subseteq \mathcal{O}(f)$). *В таком случае* $\mathcal{O}(\otimes) \neq \mathcal{O}(\gamma) \neq \mathcal{O}(f)$ *тогда и только тогда, когда I бесконечно.*

Работа закончена некоторыми утверждениями, приведенными без доказательств, принадлежащими Шаттену, которые легко переносятся на общий случай.

Summary

ON THE TENSOR PRODUCTS OF VECTOR SPACES

MILOŠ DOSTÁL, Praha

(Received November 20, 1961)

The purpouse of the present paper is to develop the theory of tensor products of an arbitrary (i. e. infinite) family E_ι ($\iota \in I$) of vector spaces over a field K of characteristic 0 (see definitions in [1] and [3]). The main result of the first "algebraic" part of the paper is theorem 1, describing the general form of the null-tensor:

Every tensor $\mathfrak{z} = 0$ *(or more precisely every representant of the null-tensor) can be represented as a sum of null-tensors which are either simple (i.e. of the form* $\mathfrak{z}_i = \bigotimes_{\iota \in I} x_\iota$, $x_\iota \in E_\iota$*) or have the form* $\mathfrak{z}_i = \sum_{k=1}^{r} \bigotimes_{\iota \in I} x_{\iota,k} = 0$ *with the following properties:*

1° *if* $\emptyset \neq R$ *is a proper subset of the set* $I_r = \{1, 2, \ldots, r\}$, *then* $\sum_{k \in R} \bigotimes_{\iota \in I} x_{\iota,k} \neq 0$;

2° *there exists a* ***finite*** *subset* $J \subset I$ *such that if* $\iota \notin J$, *then* $x_{\iota,k} = x_{\iota,l}$ *for every* $k, l \in I_r$ *(for every fixed* $\iota \in J$, *the coordinates* $x_{\iota,k}$ $(k \in I_r)$ *are linearly dependent).*

In the second part, only the vector spaces over the reals or complex numbers are considerated. The tensor products are in a suitable way restricted and then various seminorms are introduced into these general products. The duality between the (restricted) spaces $\underset{\iota\in I}{\otimes} E_\iota$ and $\underset{\iota\in I}{\otimes} E'_\iota$ (i.e. product of the conjugated spaces) is studied. Especially a generalization of Schatten's γ norm is considered.

Using this seminorm the following propositions are proved:

Let $\underset{\iota\in I}{\otimes} x_\iota = 0$ *be a simple null-tensor. Then* $x_\kappa = 0$ *for some* $\kappa \in I$.

Denote $\mathcal{O}(\otimes) = \{\mathfrak{z} \in \underset{I\in\iota}{\otimes} E_\iota : \mathfrak{z} = 0\}$, $\mathcal{O}(\gamma) = \{\mathfrak{z} \in \underset{\iota\in I}{\otimes} E_\iota : \gamma(\mathfrak{z}) = 0\}$, $\mathcal{O}(f) = \{\mathfrak{z} \in \underset{\iota\in I}{\otimes} E_\iota : \mathfrak{z}$ *is a null-functional on the product* $\underset{\iota\in I}{\otimes} E'_\iota\}$ *(obviously* $\mathcal{O}(\otimes) \subseteq \mathcal{O}(\gamma) \subseteq \mathcal{O}(f)$*). Then* $\mathcal{O}(\otimes) \neq \mathcal{O}(\gamma) \neq \mathcal{O}(f)$ *iff* I *is infinite.*

The article concludes with a list of results (without proofs) due to Schatten, which can be easily extended to our general case.