Jiří Novák

Příspěvek k teorii kombinací

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 2, 129--141

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108739`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 88 * PRAHA 10. V. 1963 * ČÍSLO 2

PŘÍSPĚVEK K TEORII KOMBINACÍ

JIŘÍ NOVÁK, Liberec

(Došlo dne 8. listopadu 1961)

Tato práce se zabývá podrobněji jistými skupinami kombinací tzv. *kombináty*, jichž jsem užíval již dříve v práci [1] o konfiguracích. Hlavní pozornost je věnována tzv. kombinátům hustým, jejichž zvláštním případem se jeví $p-k-n$ systémy, jimiž se v poslední době zabýval H. HANANI.

ÚVOD

Při studiu rovinných konfigurací $(12_4, 16_3)$ jsem zavedl kombinatorický pojem *kombinátu*.[1]) Uveďme znovu jeho definici:

Jsou-li $n \geqq k > r \geqq 0$ celá nezáporná čísla, nazýváme kombinátem $[n, k, r]$ systém kombinací k-té třídy z daných n prvků, který má tyto vlastnosti:

1. *libovolné dvě kombinace systému mají nejvýše r společných prvků,*
2. *každá kombinace k-té třídy nepatřící do systému má s některou kombinací systému společných aspoň $r + 1$ prvků. Číslo r se nazývá stupněm kombinátu.* Počet kombinací v kombinátu je zdola i shora omezen. Nejnižší horní mez H je udána vzorcem[1])

$$H = \left[\left[\frac{n-r}{k-r}\right]\binom{n}{r} : \binom{k}{r}\right]. \tag{1}$$

Pokud jde o odvození vzorce pro nejvyšší dolní mez D počtu kombinací v kombinátu, naráží se na větší těžkosti, takže podobný vzorec nebyl dosud nalezen.

Připojme ještě několik poznámek k pojmu kombinátu. Uvažujme, čím je kombinát $[n, k, r]$ z hlediska teorie grafů. Mějme neorientovaný graf, jehož vrcholy jsou všechny kombinace k-té třídy z daných n prvků. Vrcholy budou vzájemně spojeny hranou, jestliže příslušné kombinace budou mít aspoň $r + 1$ společných prvků. Z definice kombinátu vyplývá, že ty vrcholy grafu, jež odpovídají kombinacím kombinátu, nebudou vzájemně spojeny, kdežto všechny ostatní vrcholy grafu s nimi spojeny budou. Tvoří tedy tzv. jádro grafu.[2])

[1]) [1], str. 258.

[2]) [2], kapitola 5.

Nakonec si všimněme další geometrické interpretace zkoumaného pojmu. Mějme v rovině n-úhelník. Uvažujme o množině k-úhelníků, jejichž vrcholy jsou ve vrcholech n-úhelníka, při čemž libovolné dva k-úhelníky mají společných nejvýše r-vrcholů. Je-li tato množina úplná, potom je geometrickým znázorněním jednoho z možných kombinátů $[n, k, r]$.

1. HUSTÉ KOMBINÁTY

Definice 1. *Jestliže všechny kombinace r-té třídy z daných n prvků mají v kombinátu $[n, k, r]$ četnost $[(n - r)/(k - r)] = m$, tj. každá r-tice se nalézá v m kombinacích k-té třídy, nazývá se kombinát hustý.*

Četnost m je nejvyšší možná četnost r-tice v kombinátu $[n, k, r]$.[3])

Věta 1. *Nutná a postačující podmínka, aby kombinát $[n, k, r]$ byl hustý, je: počet kombinací je roven číslu $H' = [(n - r)/(k - r)] \cdot \binom{n}{r} \Big/ \binom{k}{r}$.*

Důkaz. Četnost každé kombinace r-té třídy v hustém kombinátu je $m = [(n-r)/ /(k - r)]$, udává tedy čitatel zlomku ve výrazu pro H' počet všech r-tic v celém kombinátu. Tento čitatel musí být dělitelný číslem $\binom{k}{r}$, neboť tak dostaneme počet kombinací v kombinátu, a to je celé číslo. Nechť v nějakém kombinátu je počet kombinací roven H'. Předpokládejme, že není hustý. V takovém však některá r-tice má nižší četnost než m, takže r-tic je méně než udává čitatel výrazu, tedy i počet kombinací musí být nižší než H'. Máme spor, kombinát musí být tedy hustý.

Příklad. Všimněme si kombinátu $[9, 3, 1]_{12} \equiv (123, 456, 789, 147, 258, 369, 159, 267, 348, 168, 249, 357)$. Poněvadž $r = 1$, můžeme mluvit pouze o četnosti každého z devíti prvků. Nejvýše možná četnost je $m = [(9 - 1)/(3 - 1)] = = 4$. Skutečně každý prvek má četnost rovnou 4. Počet kombinací je roven $4 \cdot 9/3 = = 12$. Jiné příklady hustých kombinátů, v nichž $r = 1$, budou uvedeny později.

Pro teorii hustých kombinátů je významná jejich souvislost s tzv. $p-k-n$ systémy. *Systémem $p-k-n$ rozumíme systém kombinací k-té třídy z n prvků takový, že každá kombinace p-té třídy ($p \leqq k \leqq n$) je obsažena právě v jedné kombinaci k-té třídy.* Přitom máme na mysli kombinace bez opakování prvků.[4]) Systém $p-k-n$ nemusí vždy existovat, jak lze snadno nahlédnout pro $p = 2$, $k = 3$, $n = 4$.

Věta 2. *Systém $p-k-n$ je hustým kombinátem $(p - 1)$-vého stupně.*

Důkaz. Libovolné dvě kombinace k-té třídy systému $p-k-n$ mohou mít nejvýše $p - 1$ společných prvků. Kdyby totiž měly společných p prvků, byla by kombi-

[3]) [1], str. 258.

[4]) [2], str. 250; [3], str. 145.

nace p-té třídy obsažena ve dvou kombinacích k-té třídy, což odporuje definici systému. Systém $p-k-n$ je dále úplný, tj. nemůžeme k němu připojit žádnou další kombinaci k-té třídy. V opačném případě by totiž kterýchkoli p prvků této přidávané kombinace bylo obsaženo ještě v některé kombinaci systému. Z těchto vlastností vyplývá, že systém $p-k-n$ je kombinátem $(p-1)$-vého stupně. Uvažujme dále o četnosti skupiny $p-1$ prvků. Platí, že je obsažena v $\binom{n-p+1}{1}/\binom{k-p+1}{1} = (n-p+1)/(k-p+1) = m$ kombinacích.[5] Odtud plyne, že systém je hustým kombinátem.

Zaveďme nyní některá rčení, jichž budeme v dalším užívat. Každá r-tice se v hustém kombinátu vyskytuje v m kombinacích k-té třídy. V těchto m kombinacích je obsaženo kromě r prvků r-tice ještě $m \,.\, (k-r)$ od sebe různých prvků. Říkáme, že r-tice je s těmito prvky *spojena*. Je s nimi v kombinaci. r-tice může být spojena nejvýše s $n-r$ prvky. Rozdíl $i = n - r - m \,.\, (k-r)$ udává počet prvků, od nichž je r-tice *oddělena*. Přepišme hořejší vztah takto: $n - r = m \,.\, (k-r) + i$. Poněvadž m je největší celé číslo menší nebo rovné $(n-r)/(k-r)$, vyplývá odtud, že i je rovno zbytku, který dostaneme při dělení celého čísla $n-r$ číslem $k-r$. Hodnoty tohoto zbytku se tedy mohou pohybovat od nuly do $k-r-1$.

Definice 2. *Indexem hustého kombinátu $[n, k, r]$ rozumíme počet prvků, od nichž je libovolná kombinace r-té třídy z n prvků v kombinátu oddělena.*

Pojmu indexu užijeme v další větě.

Věta 3. *Husté kombináty s indexem* 0 *a* 1 *mají tuto vlastnost: vynecháme-li z nich všechny kombinace obsahující týž prvek, dostaneme kombinát téhož stupně. Je-li $k - r \geqq 2i$, platí tvrzení věty i pro $i \geqq 2$.*

Poznámka. Obrácená věta neplatí. Dostaneme-li z nějakého kombinátu po vynechání kombinací s týmž prvkem kombinát, nemusí výchozí kombinát být hustý. Toto tvrzení ověřuje příklad kombinátu $[8, 4, 2]_{10}$, který není hustý:

1234	*1367*	*2457*	*4678*
1256	*1458*	*3456*	
1278	*2368*	*3578*	

Důkaz věty 3. Vynechme z hustého kombinátu $K \equiv [n, k, r]$ kombinace s prvkem n. Skupinu těchto kombinací označme S^*. Po vynechání dostaneme skupinu kombinací $n-1$ prvků, již označíme S, a o níž chceme dokázat, že je kombinátem. Předpokládejme, že tomu tak není, že tedy ke skupině S musíme připojit aspoň jednu kombinaci k-té třídy, abychom dostali kombinát $K' \equiv [n-1, k, r]$. Tuto přidávanou kombinaci označme $(d) \equiv d_1 d_2 \ldots d_r d_{r+1} \ldots d_k$. Každá r-tice kombinace (d) musí být obsažena v některé kombinaci skupiny S^*. Kdyby tomu tak nebylo, měla by

[5]) [3], str. 145.

taková r-tice ve skupině S četnost m vzhledem k hustotě kombinátu K a v kombinátu K' četnost aspoň $m + 1$, což není možné, neboť $m = [(n - r)/(k - r)] \geqq [(n - 1 - r)/(k - r)]$. Některá kombinace skupiny S^* musí obsahovat aspoň $r + 1$ prvků kombinace (d), neboť jinak by bylo možno připojit kombinaci (d) k původnímu kombinátu. Nechť je to kombinace $(v^*) \equiv d_1 d_2 \ldots d_r d_{r+1} y_2 y_3 \ldots y_s n$.

Je-li $i = 0$, je r-tice $d_1 d_2 \ldots d_r$ spojena v K se všemi ostatními prvky. Kombinace (d) přidávaná ke skupině S musí obsahovat prvky, s nimiž r-tice $d_1 d_2 \ldots d_r$ není v S spojena, to jsou však pouze ty prvky, s nimiž je r-tice $d_1 \ldots d_r$ spojena v kombinaci (v^*), neboť v jiné kombinaci se nemůže $d_1 \ldots d_r$ vyskytnout. (To by dvě kombinace skupiny S^* měly více než r společných prvků: $d_1, d_2, \ldots, d_r, n$.) Jde tedy o prvky d_{r+1}, $y_2, \ldots, y_s$. Tyto prvky však nestačí, aby spolu s r prvky $d_1, \ldots, d_r$ vytvořily kombinaci o k prvcích, neboť $r + s = k - 1$. Nelze tedy ke skupině S připojit žádnou kombinaci, je tedy kombinátem.

Nechť je $i \geqq 1$, $k - r \geqq 2i$. r-tice $d_1 d_2 \ldots d_r$ je dle předpokladu oddělena od i prvků $x_1, x_2, \ldots, x_i$ v kombinátu K. V kombinaci (d) se mohou vyskytovat pouze prvky $x_1, x_2, \ldots, x_i$ a dále prvky kombinace (v^*), s nimiž není r-tice ve spojení ve skupině S. Jsou to prvky $d_{r+1}, y_2, \ldots, y_s$, jejichž počet je s. Poněvadž $s + r + 1 = k$, je $s = k - r - 1 \geqq 2i - 1 \geqq i$. Bylo užito předpokladu $k - r \geqq 2i$. Pro $i = 1$ je tato podmínka vždy splněna, neboť platí: Je-li $i = 1$, potom nemůže být $k - r = 1$. Je-li totiž $k - r$ rovno 1, musí být $i = 0$ $(i = n - r - m \,.\, (k - r) = n - r - [(n - r)/1] \,.\, 1 = n - r - (n - r) = 0)$. Aspoň i prvků z uvedených s prvků kombinace (v^*) se nutně musí v kombinaci (d) vyskytnout. Jinak by totiž nemohla mít celkem k prvků, neboť $k \geqq r + 2i$. Dále musí kombinace (d) z téhož důvodu obsahovat aspoň jeden prvek x_j z prvků $x_1, x_2, \ldots, x_i$. Uvažujme nyní o r-tici $d_1 \ldots d_{r-1} x_j$, jež se vyskytne v kombinaci (x^*) skupiny S^*. Kombinace $(x^*) \equiv d_1 \ldots d_{r-1} x_j l_1 \ldots l_s n$, při čemž prvky l_h $(h = 1, \ldots, s)$ nemohou být prvky kombinace (v^*). V opačném případě by totiž kombinace (x^*) a (v^*) měly více než r společných prvků. Kdyby skupina S^* měla jen jednu kombinaci, vede tento požadavek ke sporu. Obsahuje-li skupina S^* více než jednu kombinaci, je r-tice $d_1 \ldots d_{r-1} x_j$ v S^* oddělena od prvků d_r, d_{r+1}, $y_2, \ldots, y_s$, z nichž aspoň $i + 1$ se vyskytuje v kombinaci (d): prvek d_r + aspoň i prvků z $d_{r+1}, y_2, \ldots, y_s$. Od těchto prvků musí být r-tice oddělena v S, poněvadž jinak by se nemohly vyskytnout v (d). Protože je od nich oddělena také v S^*, je od nich oddělena v celém kombinátu K, ale v něm je oddělena pouze od i prvků. Dospíváme ke sporu. Předpoklad o skupině S nebyl správný, S je tudíž kombinátem.

2. STRUKTURA HUSTÉHO KOMBINÁTU

Všimněme si nyní blíže struktury hustých kombinátů. Uvedená věta 3. ukazuje jejich význačnou vlastnost. Tato věta je v jistém smyslu doplněna další větou, která si všímá četnosti prvků v hustém kombinátu, tj. počtu kombinací, v nichž se určitý prvek vyskytuje.

Věta 4. *V hustém kombinátu se každý prvek vyskytuje s četností* $\mu = m\binom{n-1}{r-1} : \binom{k-1}{r-1}$, *kde* $m = [(n-r)/(k-r)]$.

Důkaz. Všimněme si těch μ kombinací hustého kombinátu, v nichž se vyskytuje určitý prvek, jejž označíme u. V těchto kombinacích se musí vyskytnout všechny kombinace r-té třídy z daných n prvků, jež obsahují prvek u. Takových r-tic je $\binom{n-1}{r-1}$. Poněvadž jde o hustý kombinát, je četnost každé r-tice s prvkem u rovna m. Je tedy v kombinacích s prvkem u celkem $m \cdot \binom{n-1}{r-1}$ kombinací r-té třídy s prvkem u. Každá kombinace k-té třídy s prvkem u obsahuje však $\binom{k-1}{r-1}$ kombinací r-té třídy s prvkem u. Je tedy $\mu = m\binom{n-1}{r-1}/\binom{k-1}{r-1}$. Odtud vyplývá, že v hustém kombinátu je uvedený zlomek roven celému číslu.

S právě uvedenou větou úzce souvisí další věta:

Věta 5. *Vynecháme-li z* μ *kombinací hustého kombinátu, jež obsahují týž prvek* u, *právě tento prvek, dostaneme hustý kombinát* $[n-1, k-1, r-1]$. *Je to tzv. kombinát přidružený k prvku* u *v hustém kombinátu* $[n, k, r]$.

Důkaz. Kombinace, jež obsahují týž prvek u, mohou mít navzájem společných kromě tohoto prvku nejvýše $r-1$ prvků. Vynecháme-li z nich prvek u, dostaneme skupinu μ kombinací $k-1$ třídy, z nichž libovolné dvě mají nejvýše $r-1$ společných prvků. Poněvadž $m = [(n-r)/(k-r)] = [\{n-1-(r-1)\}/\{k-1-(r-1)\}]$, je vidět, že jejich počet μ je právě takový jako počet kombinací v hustém kombinátu $[n-1, k-1, r-1]$, jak je patrno ze srovnání věty 4 s větou 1. Odtud vyplývá, že uvedená skupina kombinací $k-1$ třídy je sama hustým kombinátem.

Příklad. Mějme hustý kombinát $[8, 4, 2]_{14}$:

1234	*1357*	*1467*	*2457*	*3478*
1256	*1368*	*2358*	*2468*	*5678*
1278	*1458*	*2367*	*3456*	

Vynechme z kombinací obsahujících prvek *8*, tento prvek. Dostaneme *127*, *136*, *145*, *235*, *246*, *347*, *567*. To je hustý kombinát $[7, 3, 1]_7$.

Vynechme prvek *7* z kombinací, které jej obsahují. Dostaneme *12*, *34*, *56*. To je hustý kombinát $[6, 2, 0]_3$. Tento příklad ukazuje, jak hustý kombinát druhého stupně byl vytvořen z hustých kombinátů prvního stupně, jež zase vznikají z hustých kombinátů nultého stupně.

Z věty 5 vyplývá ihned

Věta 6. *Aby existoval hustý kombinát* $[n, k, r]$ *je nutno, aby čísla* $m\binom{n}{r}\Big/\binom{k}{r}$, $m\binom{n-1}{r-1}\Big/\binom{k-1}{r-1}, \ldots, m\binom{n-r+1}{1}\Big/\binom{k-r+1}{1}$ *byla celá.*

Důkaz. Uvedené výrazy udávají počet kombinací v hustých kombinátech $[n, k, r]$, $[n-1, k-1, r-1]$, ..., $[n-r+1, k-r+1, 1]$. Opakováním postupu uvedeného ve větě 5 je možno z hustého kombinátu dospět postupně k těmto kombinátům nižšího stupně, je tedy uvedená podmínka skutečně nutná.

Příklad. Ptejme se zda existuje hustý kombinát $[12, 4, 2]$. $m = [\frac{10}{2}] = 5$. Zkoumejme výrazy uvedené ve větě 6.

$$m \cdot \binom{n}{r}\Big/\binom{k}{r} = 5\binom{12}{2}\Big/\binom{4}{2} = 5 \cdot 66/6 = 55\,, \quad m\binom{n-1}{r-1}\Big/\binom{k-1}{r-1} =$$
$$= \tfrac{1}{3} \cdot 5 \cdot 11 = \tfrac{1}{3} \cdot 55\,.$$

Poněvadž 55 není dělitelno třemi, nemůže existovat ani hustý kombinát.

Vzniká přirozeně otázka, zda podmínka uvedená ve větě 7 je také postačující pro existenci hustých kombinátů. Odpověď je negativní. Bylo dokázáno,[6]) že neexistuje systém *2 – 7 – 43*, jenž je vlastně hustým kombinátem $[43, 7, 1]$. Nutná podmínka je splněna: $m = [\frac{1}{6} \cdot 42] = 7$, $\frac{1}{7} \cdot 7 \cdot 43 = 43$.

Závěrem tohoto paragrafu se zabývejme konstrukcí některých hustých kombinátů prvního stupně. Poněvadž $r = 1$, je každý prvek obsažen právě v m kombinacích, kde $m = [(n-1)/(k-1)]$. Vynecháme-li z nich určitý prvek, dostaneme kombinát nultého stupně přidružený k vynechanému prvku. Vezměme nyní jednu kombinaci k-té třídy, např. $l_1 l_2 \ldots l_k$ hustého kombinátu a vypišme si všechny kombinace obsahující postupně prvky $l_1, l_2, \ldots, l_k$. Dostaneme tak $k \cdot m$ kombinací. Celkový počet různých kombinací takto získaných nebude však $k \cdot m$, neboť jedinou kombinaci $l_1 l_2 \ldots l_k$ jsme vypsali celkem k-krát, je však třeba ji zahrnout do celkového počtu jen jednou, takže od $k \cdot m$ musíme odečíst $k - 1$ kombinací a dostaneme $k \cdot m - k + 1 = 1 + k \cdot (m-1)$ od sebe různých kombinací k-té třídy. Ptáme se, zda jsme takto vyčerpali všechny kombinace kombinátu. Celkový počet kombinací je, jak víme, $m \cdot n/k$. Vypočtěme rozdíl mezi počtem všech kombinací a počtem $1 + k \cdot (m-1)$. Dostaneme: $m \cdot n/k - k(m-1) - 1 = m \cdot n/k - km + k - 1 = m \cdot n/k - n - m + i + 1 + k - 1 = n \cdot m/k - n - m + k + i$. (Použito vztahu $i = n - 1 - mk + m$.) Pro $i = 0$ máme $n \cdot m/k - n - m + k = (n-k)(m-k)/k$. Je-li $m = k$, potom vypočtený rozdíl je roven 0. To znamená, že kombinace obsahující prvky $l_1, l_2, \ldots, l_k$ vytvoří celý kombinát prvního stupně. Jako příklad uveďme kombinát $[21, 5, 1]$. $m = k = 5$, $i = 20 - 5 \cdot 4 = 0$. Vezměme kombinaci

17 18 19 20 21

[6]) [3], str. 145; [4].

a ke každému prvku sestavme přidružený kombinát:

17	*1 2 3 4*	*18*	*1 5 9 13*	*19*	*1 6 11 16*	*20*	*1 7 12 14*
	5 6 7 8		*2 6 10 14*		*2 5 12 15*		*2 8 11 13*
	9 10 11 12		*3 7 11 15*		*3 8 9 14*		*3 5 10 16*
	13 14 15 16		*4 8 12 16*		*4 7 10 13*		*4 6 9 15*

21	*1 8 10 15*
	2 7 9 16
	3 6 12 13
	4 5 11 14

3. KOMBINÁTY TŘETÍ TŘÍDY

Půjde o kombináty prvního stupně, neboť kombináty nultého a druhého stupně jsou zcela jednoduché. Je-li stupeň roven nule, máme soustavu trojic, které nemají navzájem společný prvek; je-li stupeň roven dvěma, jde o soustavu všech kombinací třetí třídy z daných n prvků bez opakování.

Věta 7. *Nutná a postačující podmínka, aby kombinát* $[n, 3, 1]$ *byl hustý, je: vynecháme-li kombinace obsahující kterýkoliv pevný prvek, dostaneme kombinát* $[n - 1, 3, 1]$.

Nutnost podmínky byla dokázána ve větě 3, neboť $i = 0$ nebo 1. Dokazujme postačitelnost. Nechť je splněna podmínka naší věty. Uvažujme o některém prvku, který označme *1*. Vynecháme-li z kombinátu všechny kombinace obsahující určitý pevně zvolený prvek různý od prvku *1*, dostaneme podle předpokladu kombinát $[n - 1, 3, 1]$. V tomto kombinátu jsou od sebe odděleny prvky x, y, které byly spolu v téže vynechané kombinaci. Prvek *1* nemůže být od takových dvou prvků oddělen, neboť to odporuje vlastnosti kombinátu $[n - 1, 3, 1]$. Mohli bychom totiž připojit ke kombinátu $[n - 1, 3, 1]$ kombinaci $1\,x\,y$. Je tedy prvek *1* spojen vždy aspoň s jedním prvkem uvažovaných dvojic. Poněvadž můžeme vynechávat kombinace s kterýmkoliv prvkem *2*, *3*, atd. až n, vyplývá z toho pro prvek *1*, že není oddělen od žádné dvojice spojených prvků v kombinátu $[n, 3, 1]$. Prvek *1* nemůže být v kombinátu $[n - 1, 3, 1]$ oddělen ani od dvou prvků, jež jsou od sebe odděleny v $[n, 3, 1]$, neboť to opět odporuje pojmu kombinátu. Odtud plyne, že prvek *1* může být oddělen buď od jednoho nebo od žádného prvku kombinátu $[n, 3, 1]$. Je tedy spojen v prvém případě s $n - 2$ prvky v $\frac{1}{2}(n - 2)$ kombinacích. Odtud vyplývá, že v tomto případě je n sudé. Potom platí $m = [\frac{1}{2}(n - 1)] = \frac{1}{2}(n - 2)$.

V druhém případě je prvek *1* spojen s $n - 1$ prvky v $\frac{1}{2}(n - 1)$ kombinacích. Odtud n musí být liché číslo a opět platí $m = [\frac{1}{2}(n - 1)] = \frac{1}{2}(n - 1)$. Je tedy vidět, že četnost prvku *1*, který byl libovolný, je rovna m. Proto uvažovaný kombinát je hustý.

Věta 8. *Nechť kombinát* $[n - 1, 3, 1]$ *není hustý nebo je hustý s indexem* 1. *Potom kombinát vytvořený z něho připojením možných kombinací s prvkem n obsahuje více kombinací než* $[n - 1, 3, 1]$.

D ů k a z. V kombinátu, který není hustý, existuje prvek k s nižší četností než maximální. Takovýto prvek je oddělen aspoň od dvou jiných prvků. Nechť je např. $k : l$ (značka : vyjadřuje, že prvek k je oddělen od prvku l), potom lze po zvýšení počtu prvků o jeden připojit kombinaci $n\,k\,l$. Je-li v hustém kombinátu $i = 1$, musí n býti sudé číslo. Každý prvek je spojen s $n - 2$ prvky, a tudíž oddělen právě od jednoho prvku. Po zvýšení počtu prvků můžeme jistě připojit další kombinace.

S těmito větami souvisí další:

Věta 9. *Jestliže ke kombinátu* $[n - 1, 3, 1]$ *nemůžeme připojit žádnou kombinaci při počtu prvků rovném* n, *potom* $[n - 1, 3, 1]$ *je hustý a má index* 0.

D ů k a z. V kombinátu $[n - 1, 3, 1]$ musí být každý prvek spojen se všemi ostatními, což je možné jedině pro lichý počet prvků. Kdyby totiž byly dva prvky od sebe odděleny, např. $x : y$, mohli bychom připojit kombinaci $n\,x\,y$, což odporuje předpokladu naší věty. V takovém kombinátu má tedy každý prvek maximální četnost, a proto je hustý, a to s indexem 0.

Tyto věty platné pro jakékoliv $n \geqq 4$ ozřejmíme několika p ř í k l a d y :

Mějme hustý kombinát $[12, 3, 1]_{20}$: (*1 2 3, 1 4 5, 1 6 8, 1 7 10, 1 9 11, 2 4 6, 2 5 7, 2 8 9, 2 10 12, 3 4 7, 3 5 9, 3 6 11, 3 8 12, 4 8 10, 4 11 12, 5 10 11, 6 9 10, 7 8 11, 7 9 12*). Každý prvek se vyskytuje pětkrát, neboť $m = 5$. Vynechme kombinace obsahující prvek *12*. Dostaneme: (*1 2 3, 1 4 5, 1 6 8, 1 7 10, 1 9 11, 2 4 6, 2 5 7, 2 8 9, 3 4 7, 3 5 9, 3 6 11, 4 8 10, 5 10 11, 6 9 10, 7 8 11*). Je to kombinát $[11, 3, 1]_{15}$, který není hustý. Hustý kombinát $[11, 3, 1]$ neexistuje, neboť není splněna podmínka, aby $m \,.\, n/k$ bylo celé číslo. Zvýšíme-li počet prvků o 1, můžeme zřejmě k oběma kombinátům připojovat další kombinace s novým prvkem, jejž označíme *12* nebo *13*. K hustému kombinátu $[12, 3, 1]_{20}$ proto, že 12 je sudé číslo, takže každý prvek je nutně oddělen od dalšího prvku. Např. *1* : *12*, tedy možno přidat kombinaci *1 12 13*.

Uvažujme dále o kombinátu $[7, 3, 1]_7 \equiv$ (*1 2 3, 1 5 4, 2 4 6, 1 6 7, 2 5 7, 3 4 7, 3 5 6*). Zkoušíme-li připojit kombinace s prvkem *8*, seznáme, že připojení není možné. Je to proto, že prvky *1*, ..., *7* jsou spojeny vždy se všemi ostatními. Předložený kombinát je tedy podle věty 9 hustý.

Další věta tohoto paragrafu se bude zabývat dolní mezí počtu kombinací v kombinátech $[n, 3, 1]$. Srovnává se v ní počet kombinací v $[n, 3, 1]$ s minimálním počtem kombinací v $[n - 1, 3, 1]$ a v $[n - 3, 3, 1]$.

Věta 10. *Nechť* $n \geqq 6$. *Počet kombinací v kombinátu* $[n, 3, 1]$ *je větší než minimální počet kombinací v* $[n - 3, 3, 1]$ *a aspoň roven minimálnímu počtu kombinací v* $[n - 1, 3, 1]$.

D ů k a z. Mějme kombinát $[n, 3, 1]$. Vynechme z něho ty kombinace, jež obsahují prvky n, $n - 1$, $n - 2$. Dostaneme skupinu S kombinací z $n - 3$ prvků. Tuto skupinu S doplňme v případě nutnosti na kombinát $[n - 3, 3, 1]$, a to kombinacemi $l_i k_i r_i$, $i = 1, \ldots, s$. V původním kombinátu $[n, 3, 1]$ musí kombinace s prvky n,

$n - 1$, $n - 2$ obsahovat aspoň jedno spojení dvou prvků z každé kombinace $l_i k_i r_i$. Kdyby totiž takové spojení neobsahovaly, mohli bychom příslušnou kombinaci $l_i k_i r_i$ připojit ke kombinátu $[n, 3, 1]$, což není možné. Původně vynechaných kombinací s prvky n, $n - 1$, $n - 2$ musí tedy být aspoň s a tedy celkový počet kombinací v $[n, 3, 1]$ aspoň roven počtu kombinací v $[n - 3, 3, 1]$. V kombinátu $[n, 3, 1]$ musí však být ještě kombinace, obsahující aspoň dva prvky z n, $n - 1$, $n - 2$. Kdyby tomu tak nebylo, mohli bychom kombinaci n, $n - 1$, $n - 2$ připojit ke kombinátu $[n, 3, 1]$, což není možné. Je tedy počet kombinací v $[n, 3, 1]$ aspoň o jednu větší než v $[n - 3, 3, 1]$, který vznikl z $[n, 3, 1]$ a v němž je počet kombinací větší nebo roven minimálnímu počtu kombinací v $[n - 3, 3, 1]$.

Předpokládejme nyní, že počet kombinací v $[n, 3, 1]$ je nižší než minimum v $[n - 1, 3, 1]$. Vynecháme-li z $[n, 3, 1]$ kombinace s prvkem n, potom nemůžeme dostat kombinát, nýbrž skupinu S neúplnou, k níž musíme připojit r kombinací z prvků $1, 2, \ldots, n - 1$, a to více než jsme vynechali kombinací s prvkem n, abychom dostali kombinát $[n - 1, 3, 1]$. Přidávané kombinace nechť jsou $l_i k_i r_1$, $i = 1, 2, \ldots, r$. V kombinátu $[n, 3, 1]$ však musí být obsaženy kombinace s prvkem n a se dvěma prvky z každé kombinace $l_i k_i r_i$, jinak by bylo možno připojit ke kombinátu $[n, 3, 1]$ kombinace $l_i k_i r_i$ pro některé i. Poněvadž přidávaných kombinací ke skupině S je nejvýše tolik, kolik bylo z kombinátu $[n, 3, 1]$ vynechaných, máme spor. Učiněný předpoklad není správný, počet kombinací v $[n, 3, 1]$ je tedy aspoň roven minimálnímu počtu kombinací v $[n - 1, 3, 1]$.

P ř í k l a d. Hledejme dolní mez d počtu kombinací v kombinátech $[n, 3, 1]$. Pokud jde o kombináty $[6, 3, 1]$, $[7, 3, 1]$, $[8, 3, 1]$ a $[9, 3, 1]$, lze rozborem, jehož výsledky uvedeme v dalším, stanovit minimální počty kombinací. Tyto jsou postupně: 2, 5, 7, 8. Podle věty 10 vzrůstá dolní mez o jednu teprve tehdy, vzroste-li n o tři. Tedy pro $n = 10$, je $d = 8$, teprve pro $n = 12 = 3 . (3 + 1)$ je $d = 9 = 8 + 1$. Obecně máme pro $n = 3(3 + k) + j$, kde k probíhá přirozená čísla a $j = 1, 2$, $d = 8 + k$ Tato dolní mez roste zřejmě příliš pomalu, takže pro větší n je značně nízká.

V poslední větě paragrafu užijeme toho, že systém $2 - 3 - n$ je hustým kombinátem $[n, 3, 1]$. Tyto systémy existují, jak dokázal M. Reiss v [5], tehdy a jen tehdy, je-li $n \equiv 1$ nebo 3 (mod 6).

Věta 11. *Husté kombináty třetí třídy* 1. *stupně existují tehdy a jen tehdy, je-li* $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 6$.

D ů k a z. Je-li $n \equiv 0, 1, 2, 3$, potom výraz $\frac{1}{3}[\frac{1}{2}(n - 1)] . n$ je celé číslo, což je nutná podmínka existence hustých kombinátů $[n, 3, 1]$. Je-li $n \equiv 4 \pmod 6$, máme $n = 6h + 4$. Dále $\frac{1}{3}[\frac{1}{2}(6h + 3)] (6h + 4) = \frac{1}{3}(3h + 1) (6h + 4)$, což není celé číslo, poněvadž žádný z obou činitelů v závorkách není dělitelný třemi. Je-li $n \equiv 5 \pmod 6$, máme $n = 6h + 5$, $\frac{1}{3}[\frac{1}{2}(6h + 4)] (6h + 5) = \frac{1}{3}(3h + 2) (6h + 5)$, což není celé číslo, poněvadž ani $3h + 2$, ani $6h + 5$ není dělitelno třemi.

Postačitelnost uvedené podmínky pro $n \equiv 1$ a 3 (mod 6) byla dokázána M. Reissem (systém $2-3-n$). Je-li $n \equiv 0$ nebo $2 \pmod 6$, sestrojme hustý kombinát pro $N = n + 1$, který existuje, neboť $N \equiv 1$ nebo $3 \pmod 6$. Počet kombinací v něm jest $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)$. Vynechme z něho $\frac{1}{2}n$ kombinací, které obsahují přidávaný prvek $n + 1$. Dostaneme kombinát, v němž počet kombinací je roven

$$\tfrac{1}{6}n(n+1) - \tfrac{1}{2}n = \tfrac{1}{3}n \,.\, \tfrac{1}{2}(n-2)\,,$$

to je počet kombinací v hustém kombinátu $[n, 3, 1]$.

4. KOMBINÁTY $[n, 3, 1]$ PRO $n = 7, 8, 9$

Pokud počet prvků je roven 7, 8, 9 lze rozborem vyšetřit všechny kombináty, které nejsou mezi sebou ekvivalentní. Tím zjistíme i kombináty o minimálním a maximálním počtu kombinací. Poněvadž vlastní rozbor je zdlouhavý, uvádím pouze výsledky.

1. Kombináty $[7, 3, 1]$. Existují dva kombináty, jež mezi sebou nejsou ekvivalentní, všechny ostatní jsou ekvivalentní s některým z nich. Prvý kombinát obsahuje 5 kombinací, z nichž určité dvě nemají společný prvek (tzv. oddělené kombinace): $[7, 3, 1]_5 \equiv (1\,2\,3,\ 4\,5\,6,\ 1\,4\,7,\ 2\,5\,7,\ 3\,6\,7)$.

Druhý kombinát neobsahuje dvě navzájem oddělené kombinace a má 7 kombinací: $[7, 3, 1]_7 \equiv (1\,2\,3,\ 1\,4\,5,\ 1\,6\,7,\ 2\,4\,6,\ 2\,5\,7,\ 3\,4\,7,\ 3\,5\,6)$.

2. Kombináty $[8, 3, 1]$. V těchto kombinátech existují vždy dvě od sebe oddělené kombinace. Máme celkem 3 neekvivalentní kombináty. Dva mají po 7 kombinacích:

$$(1) \equiv (1\,2\,3,\ 4\,5\,6,\ 1\,7\,8,\ 2\,4\,7,\ 2\,5\,8,\ 3\,4\,8,\ 3\,5\,7)\,;$$
$$(2) \equiv (1\,2\,3,\ 4\,5\,6,\ 1\,7\,8,\ 2\,4\,7,\ 2\,5\,8,\ 3\,5\,7,\ 3\,6\,8)\,.$$

Tyto kombináty se nedají v sebe převést žádnou permutací prvků, neboť jejich struktura je odlišná. V prvém máme 6 prvků s četností 3, kdežto v druhém pouze 4 prvky s četností 3. Četnost je vlastnost invariantní vůči jakékoli permutaci prvků. Třetí kombinát obsahuje 8 kombinací:

$$(3) \equiv (1\,2\,3,\ 4\,5\,6,\ 1\,4\,7,\ 3\,5\,8,\ 2\,5\,7,\ 2\,4\,8,\ 1\,6\,8,\ 3\,6\,7)\,.$$

Je to hustý kombinát.

3. Kombináty $[9, 3, 1]$. Lze je rozdělit do dvou skupin; v jedné máme kombináty, jež obsahují aspoň jednu trojici navzájem oddělených kombinací, v druhé skupině obsahují kombináty pouze dvojice navzájem oddělených kombinací. V prvé skupině dospíváme ke čtyřem kombinátům, jež nejsou mezi sebou ekvivalentní:

$$(1) \equiv [9, 3, 1]_8 \equiv (1\,2\,3,\ 4\,5\,6,\ 7\,8\,9,\ 1\,4\,7,\ 2\,5\,8,\ 3\,5\,9,\ 2\,6\,9,\ 3\,6\,8)\,;$$
$$(2) \equiv [9, 3, 1]_{10} \equiv (1\,2\,3,\ 4\,5\,6,\ 7\,8\,9,\ 1\,4\,7,\ 1\,5\,8,\ 2\,6\,9,\ 2\,4\,8,\ 3\,5\,7,\ 3\,4\,9,\ 3\,6\,8)\,;$$
$$(3) \equiv [9, 3, 1]_{10} \equiv (1\,2\,3,\ 4\,5\,6,\ 7\,8\,9,\ 1\,4\,7,\ 1\,5\,8,\ 2\,6\,9,\ 2\,4\,8,\ 2\,5\,7,\ 3\,5\,9,\ 3\,6\,7)\,;$$
$$(4) \equiv [9, 3, 1]_{12} \equiv (1\,2\,3,\ 4\,5\,6,\ 7\,8\,9,\ 1\,4\,7,\ 1\,5\,8,\ 1\,6\,9,\ 2\,4\,8,\ 2\,5\,9,\ 2\,6\,7,\ 3\,4\,9,\ 3\,5\,7,\ 3\,6\,8)\,.$$

Ve druhé skupině máme 3 kombináty o 8 kombinacích, které nejsou ekvivalentní s (1) a dále dva kombináty o devíti kombinacích:

$$
\begin{aligned}
(5) &\equiv [9, 3, 1]_8 \equiv (123, 456, 178, 149, 257, 268, 358, 367);\\
(6) &\equiv [9, 3, 1]_8 \equiv (123, 456, 178, 149, 279, 357, 368, 258);\\
(7) &\equiv [9, 3, 1]_8 \equiv (123, 456, 178, 149, 279, 389, 248, 347);\\
(8) &\equiv [9, 3, 1]_9 \equiv (123, 456, 178, 149, 259, 268, 358, 367, 247);\\
(9) &\equiv [9, 3, 1]_9 \equiv (123, 456, 178, 149, 259, 367, 268, 348, 247).
\end{aligned}
$$

5. EXISTENCE HUSTÝCH KOMBINÁTŮ $[n, 4, 2]$

Budeme postupovat obdobně jako v případě hustých kombinátů $[n, 3, 1]$. H. HANANI dokázal v [3], že systémy $3 - 4 - n$ existují tehdy a jen tehdy, je-li $n \equiv 2$ nebo $4 \pmod 6$. Tyto systémy jsou vlastně hustými kombináty $[n, 4, 2]$. Vzniká otázka, zda existují husté kombináty $[n, 4, 2]$ i pro ostatní n, tj. $n \equiv 0, 1, 3, 5 \pmod 6$. Především musí být splněny nutné podmínky podle věty 6, tj. aby výrazy $(1) \equiv [\frac{1}{2}(n-2)] \cdot \binom{n}{2}/\binom{4}{2}$ a $(2) \equiv [\frac{1}{2}(n-2)]\binom{n-1}{1}/\binom{3}{1}$ byla celá čísla. Nechť $n \equiv 0 \pmod 6$, tj. $n = 6h$. Potom $[\frac{1}{2}(n-2)] = 3h - 1$. Výraz (2) je v tomto případě $\frac{1}{3}(3h-1) \cdot (6h-1)$. Čitatel však není dělitelný třemi, proto hustý kombinát nemůže existovat. Nechť $n \equiv 5 \pmod 6$, tj. $n = 6h + 5$. Potom $[\frac{1}{2}(n-2)] = [\frac{1}{2}(6h+3)] = 3h + 1$. Výraz (2) je roven $\frac{1}{3}(3h+1)(6h+4)$. To však není celé číslo, proto ani v tomto případě hustý kombinát neexistuje. Zbývají případy $n \equiv 1$ nebo $3 \pmod 6$. O nich dokážeme tuto větu:

Věta 12. *Hustý kombinát $[n, 4, 2]$ existuje tehdy a jen tehdy, je-li $n \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod 6$.*

Důkaz. Je-li $n \equiv 2$ nebo $4 \pmod 6$, potom husté kombináty $[n, 4, 2]$ existují, jak uvedeno výše. Nechť $n \equiv 1 \pmod 6$ nebo $n \equiv 3 \pmod 6$. Zvyšme počet prvků o jeden a označme $N = n + 1$. Potom je $N \equiv 2$ nebo $4 \pmod 6$ a pro toto N existuje hustý kombinát $[N, 4, 2]$. Vynecháme-li z něho kombinace obsahující přidaný prvek $n + 1$, dostaneme podle věty 3 kombinát $[n, 4, 2]$. Ptáme se, zda je hustý. Kombinací s prvkem $n + 1$ je $\frac{1}{3}n[\frac{1}{2}(n-1)]$, všech kombinací v $[N, 4, 2]$ je $\frac{1}{6}[\frac{1}{2}(n-1)]\binom{n+1}{2}$. Vypočteme rozdíl

$$\frac{1}{6}\left[\frac{n-1}{2}\right]\binom{n+1}{2} - \frac{1}{6}2n\left[\frac{n-1}{2}\right] = \frac{1}{12}\left[\frac{n-1}{2}\right]n(n-3) = V.$$

Je-li $n \equiv 1 \pmod 6$, potom $n = 6h + 1$ a dostáváme

$$V = \tfrac{1}{12}3h(6h+1)(6h-2) = \tfrac{1}{2}h(6h+1)(3h-1).$$

Tento počet je však roven číslu H', které udává počet kombinací v hustém kombinátu $[n, 4, 2]$:

$$H' = \frac{1}{6}\left[\frac{n-2}{2}\right]\binom{n}{2} = \frac{1}{6}\left[\frac{6h-1}{2}\right]\frac{(6h+1)\,6h}{2} = \frac{1}{2}\,h\,(3h-1)\,(6h+1) = V.$$

Je-li $n \equiv 3 \pmod 6$, potom $n = 6h + 3$, $N = 6h + 4$. Výraz $V = \frac{1}{12}(3h + 1)\,.\,(6h + 3)\,6h = \frac{1}{2}h(3h + 1)(6h + 3)$; $H' = \frac{1}{6}[\frac{1}{2}(n - 2)]\binom{n}{2} = \frac{1}{2}h(6h + 3)(3h + 1) = V$. Dostáváme tedy opět hustý kombinát.

Existuje-li pro některé n hustý kombinát $[n, 4, 2]$, potom nutně $n \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod 6$. Nemůže totiž $n \equiv 0, 5 \pmod 6$, poněvadž výraz (2) není celé číslo, jak bylo ukázáno výše. Tím je důkaz dokončen.

Literatura

[1] *J. Novák*: Užití kombinatoriky ke studiu rovinných konfigurací $(12_4, 16_3)$. Časopis pro pěstování matematiky, *84*, 1959, 257—282.

[2] *C. Berge*: Théorie des graphes et ses applications. Paris 1958.

[3] *H. Hanani*: On quadruple systems. Canadian Journal of Mathematics, No 1, 1960, 145—157.

[4] *G. Tarry*: Le problème des 36 officiers. C. R. Assoc. Franc. Sci., *1* (1900), 122—123.

[5] *M. Reiss*: Über eine Steinersche combinatorische Aufgabe. J. reine und angew. Math., *56* (1859), 326—344.

Резюме

ВКЛАД В ТЕОРИЮ КОМБИНАЦИЙ

ИРЖИ НОВАК (Jiří Novák), Либерец

В статье изучаются некоторые системы комбинаций объема k из данных n элементов, т. наз. *комбинаты* $[n, k, r]$. Под комбинатом $[n, k, r]$ понимают группу всех тех комбинаций объема k из данных n элементов, любые две из которых содержат самое больше r общих элементов. Большое внимание уделяется т. наз. *комбинатам плотным*. Плотный комбинат характеризован тем, что каждая комбинация объема r встречается в наибольшем возможном числе m комбинаций объема k. $m = [(n - r)/(k - r)]$. Плотные комбинаты находятся в узкой связи с *$p-k-n$ системами*, к числу которых пирнадлежат, напр., штейнеровские тройки. Под системой $p-k-n$ подразумевают такую систему комбинаций объема k из n элементов, где каждая комбинация объема p содержится точно в одной конбинации объема k. Система $p-k-n$ является плотным комбинатом $[n, k, p - 1]$. Благодаря трудам М. Рейсса [5] и

Г. Ганани [3] можно было доказать, что плотные комбинаты [n, 3, 1] существуют тогда и только тогда, если $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 6$ и плотные комбинаты [n, 4, 2] тогда и только тогда, если $n \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod 6$.

В статье далее приведены: необходимое условие для существования плотных комбинатов [n, k, r], примеры разных комбинатов и теорема о возникновении комбината [$n - 1$, k, r] из плотного комбината [n, k, r].

Что касается комибнатов [n, 3, 1], изучается тоже вопрос минимального числа комбинаций в комбинате, и приводятся все возможные типы комбинатов для $n = 7, 8, 9$.

Zusammenfassung

BEITRAG ZUR THEORIE DER KOMBINATIONEN

JIŘÍ NOVÁK, Liberec

Die vorliegende Arbeit behandelt bestimmte Systeme der Kombinationen k-ter Klasse von n gegebenen Elementen, die sog. *Kombinate* [n, k, r]. Unter dem Kombinat [n, k, r] versteht man das System aller Kombinationen k-ter Klasse derart, dass beliebige zwei Kombinationen höchstens r-Elemente gemeinsam haben. Die grösste Aufmerksamkeit wird den sog. *dichten* Kombinaten gewidmet. Jede Kombination r-ter Klasse ist in $m = [(n - r)/(k - r)]$ Kombinationen k-ter Klasse eines dichten Kombinats enthalten. Das ist die grösste mögliche Anzahl. Die dichten Kombinate stehen in einem engen Zusammenhang mit $p - k - n$ *Systemen*, zu denen zum Beispiel die Steinerschen Dreier Systeme gehören. Unter dem $p - k - n$ System versteht man ein solches System von Kombinationen k-ter Klasse von n Elementen, dass jede Kombination p-ter Klasse genau in einer Kombination k-ter Klasse enthalten ist. Das $p - k - n$ System ist ein dichtes Kombinat [$n, k, p - 1$]. Dank den Arbeiten von M. REISS [5] und H. HANANI [3] konnte es bewiesen werden, dass die dichten Kombinate [n, 3, 1] dann und nur dann existieren, wenn $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 6$ ist und die dichten Kombinate [n, 4, 2] dann und nur dann, wenn $n \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod 6$ ist.

In der Arbeit wird weiter die notwendige Existenzbedingung der dichten Kombinate [n, k, r] angegeben. Es werden Beispiele verschiedener Kombinate und der Satz über die Entstehung des Kombinats [$n - 1, k, r$] aus dem dichten Kombinat [n, k, r] angeführt.

Bei den Kombinaten [n, 3, 1] wird auch die Frage der Minimalanzahl der Kombinationen studiert. Abschliessend führt der Autor die Ergebnisse der Diskussion an, der die Kombinate [n, 3, 1] für $n = 7, 8, 9$ unterworfen wurden.