Anton Kotzig

Paare Hajóssche Graphen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 2, 236--241

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108736`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

PAARE HAJÓSSCHE GRAPHEN

ANTON KOTZIG, Bratislava

(Eingelangt am 29. Juli 1960, nach Verkürzung am 12. November 1962)

In der Arbeit wird die Konstruktion sowie die Eigenschaften der sogenannten Hajós'schen Graphen untersucht. Es sei $\bar{I} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ (wo n eine beliebige natürliche Zahl ist) eine Menge von Intervallen in der Menge aller reellen Zahlen. Ein Graph $H(\bar{I})$ wird Hajós'scher Graph (kurz H-Graph) genannt, wenn $I_1, I_2, \ldots, I_n$ Knotenpunkte des Graphen $H(\bar{I})$ sind und wenn die Knotenpunkte $I_a \neq I_b$ von $H(\bar{I})$ durch eine (und zwar eine einzige) Kante dann und nur dann in $H(\bar{I})$ verbunden sind, wenn $I_a \cap I_b \neq 0$ ist. Insbesondere wird die Klasse der paaren H-Graphen behandelt.

1

G. HAJÓS, der sich als erster mit der Konstruktion und den Eigenschaften der durch Intervallenmengen definierten Graphen beschäftigte, hatte auf dem Kolloquium über graphentheoretische Fragen in Halle (März 1960) folgende Frage gestellt:

Welche Eigenschaften muss ein endlicher Graph G haben, wenn er ein H-Graph sein soll. Unmittelbar aus der Definition des H-Graphen ist klar, dass ein H-Graph keinen Zweieck enthält. Wir wiederhollen auch einige Hilfsätze, die schon früher G. Hajós abgeleitet hatte und an welche er auf dem Kolloquium erinnerte (siehe z. B. die Arbeit [2]):

Lemma 1. *Ein Graph G ist dann und nur dann ein H-Graph, wenn jede seiner Komponenten*[1]) *ein H-Graph ist.*

Lemma 2. *Es sei K ein beliebiger, mehr als drei Knotenpunkte besitzende Kreis des H-Graphen G; dann existieren in K solche zwei Knotenpunkte, die im Graph G durch eine nicht zu K gehörende Kante verbunden sind.*

Lemma 3. *Es sei G ein beliebiger H-Graph mit n Knotenpunkten, und sei G' ein Graph, den wir durch Entfernung beliebiger m Knotenpunkte*[2]) *aus G erhalten* $(m < n)$; *dann ist G' ein H-Graph.*

---

[1]) Bei D. KÖNIG (siehe [1]) wird der zusammenhängende Bestandteil des Graphen die Komponente genannt.

[2]) Wenn aus dem Graph ein beliebiger Knotenpunkt entfernt wird, so müssen natürlich auch alle diejenigen Kanten, die mit diesem Knotenpunkte inzident sind, aus dem Graph ebenfalls entfernt werden.

Die Beweise sind sehr einfach, so dass es nicht notwendig ist, diese anzuführen.

Die oben erwähnten Bedingungen, unter welchen ein Graph ein H-Graph ist, vermehren wir nun um eine weitere. Wir beweisen folgenden Satz:[3])

Satz 1. *Es sei G_0 ein Teilgraph des zusammenhägenden H-Graphen G, welcher durch Entfernung einer Artikulation a aus G entsteht. Dann existieren höchstens zwei solche Komponenten des Graphen G_0, welche die folgende Eigenschaft besitzen: ein gewisser Knotenpunkt der Komponente ist durch keine Kante mit dem Knotenpunkte a verbuden.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass im Graph G_0 solche drei verschiedene Komponenten G_1, G_2, G_3 existieren, dass ein gewisser Knotenpunkt u_i $(i = 1, 2, 3)$ des Graphen G_i durch keine Kante mit a verbunden ist. Es sei $\bar{G}$ ein Teilgraph des Graphen G, der aus folgenden Elementen besteht: (1) Knotenpunkt a und sämtliche Knotenpunkte aus G_1, G_2, G_3; (2) alle Kanten und nur Kanten von G, welche zwei dieser Knotenpunkte verbinden. Laut Lemma 3 ist $\bar{G}$ ein H-Graph. Es gibt also eine gewisse Menge von Intervallen $\bar{I} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ derart, dass $H(\bar{I}) = \bar{G}$ gilt. Bezeichnen wir mit M_i die Menge aller Zahlen, welche mindestens zu einem Intervall von allen denjenigen Intervallen, welche den Knotenpunkten aus G_i $(i = 1, 2, 3)$ entsprechen, gehören. Es sei M_0 das Intervall von $\bar{I}$, welches dem Knotenpunkte a entspricht. Da G_i ein zusammenhängender Graph ist, muss M_i ein Intervall sein. Die Graphen G_1, G_2, G_3 sind drei verschiedene Komponenten des Graphen G_0. Daraus folgt, dass keine zwei Intervalle von $\{M_1, M_2, M_3\}$ einen gemeinsamen Punkt besitzen. Dann existiert aber eine solche Permutation (p_1, p_2, p_3) der Zahlen 1, 2, 3, dass folgendes gilt: eine beliebige Zahl aus M_{p_1} ist kleiner als eine beliebige Zahl aus M_{p_2}, und diese ist kleiner als eine beliebige Zahl aus M_{p_3}. Wir setzten voraus, dass G ein zusammenhängender Graph ist. Danach ist der Knotenpunkt a im Graph G (bzw. im Graph $\bar{G}$) durch eine Kante mindestens mit einem Knotenpunkt des Graphen G_1, G_2, G_3 verbunden. Daraus ergibt sich, dass die Intervalle M_{p_2}, M_0 und auch die Intervalle M_{p_3}, M_0 ein gemeinsammes Element besitzen. Dann gehört aber jedes Element aus M_{p_2} auch zu M_0. Das heisst, dass jeder Knotenpunkt aus G_{p_2} im Graph $\bar{G}$ (und auch im Graph G) mit dem Knotenpunkt a durch eine Kante verbunden ist. Das widerspricht jedoch unserer Voraussetzung. Dieser Widerspruch beweist unseren Satz.

2

Der abgeleitete Satz 1 ermöglicht die Konstruktion und die Eigenschaften jedes paaren[4]) H-Graphen zu beschreiben.

---

[3]) Inzwischen wurde eine Arbeit (siehe [3]) mit einer ähnlichen Problematik veröffentlicht. Dort abgeleitete Ergebnisse sind im engen Zusammenhang mit unserem Satz 1.

[4]) Ein Graph G ist ein paarer Graph, wenn er keinen Kreis mit ungerader Knotenpunktanzahl enthält.

Lemma 4. *Ein paarer H-Graph enthält keinen Kreis.*

Beweis. Laut der Definition des H-Graphen ist es klar, dass ein H-Graph kein Zweieck enthält. Aus Lemma 2 (mit Hilfe der vollständigen Induktion) folgt, dass ein paarer H-Graph kein n-Eck (wo $n > 2$) enthält.

Daraus folgt, dass jede Komponente eines paaren H-Graphen entweder ein isolierter Knotenpunkt, oder ein Baum ist.

Ein beliebiger n-Stern[5]) ist ein H-Graph. Wenn $I_0 = \langle 0, 2n + 1 \rangle$, $I_k = \langle 2k - 1, 2k \rangle$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ und $\bar{I} = \{I_0, I_1, \ldots, I_n\}$, dann ist $H(\bar{I})$ ein n-Stern. Jeder Baum mit drei Knotenpunkten ist ein 2-Stern.

Es sei G ein beliebiger Baum, der mindestens drei Knotenpunkte besitzt. Der Graph G^*, den wir aus G durch Entfernung sämtlicher Knotenpunkte ersten Grades bekommen, wird der Grund des Baumes G genannt.

Lemma 5. *Es sei G ein Baum mit mindestens drei Knotenpunkten. Der Grund G^* des Baumes G ist entweder ein isolierter Knotenpunkt (falls G ein Stern ist), oder ein Baum (falls G kein Stern ist).*

Der Beweis ist ersichtlich.

Satz 2. *Ein beliebiger paarer Graph G ist dann und nur dann ein H-Graph, wenn für jede seiner Komponenten G_i folgendes gilt: Die Komponente G_i ist entweder (1) ein isolierter Knotenpunkt, oder (2) ein Stern, oder (3) G_i ist ein Baum dessen Grund ein Weg ist.*

Beweis. Laut den obenerwähnten Tatsachen ist es klar, dass im Falle (1) und (2) G_i ein H-Graph ist. Wir müssen also nur folgendes beweisen:

I. Wenn der Grund B^* des Baumes B ein Weg ist, dann ist B ein H-Graph.

II. Der Grund eines H-Baumes besitzt keinen Knotenpunkt höheren als zweiten Grades.[6])

I. Es sei B ein Baum, dessen Grund B^* ein Weg ist;

$$B^* = u_1, h_{1,2}, u_2, \ldots, u_{n-1}, h_{n-1,n}, u_n$$

(u_i sind Knotenpunkte, $h_{i,i+1}$ sind Kanten, wobei die Kante $h_{i,i+1}$ die Knotenpunkte $u_i \neq u_{i+1}$ verbindet). Es seinen $v_{i,1}, v_{i,2}, \ldots, v_{i,m_i}$ sämmtliche Knotenpunkte ersten Grades von B, welche durch eine Kante mit dem Knotenpunkt u_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ im Graph B verbunden sind (es ist nicht ausgeschlossen, dass für gewisses $i \in \{2, 3, \ldots, n - 1\}$ m_i gleich Null ist).

[5]) Unter dem n-Stern ($n > 0$) verstehen wir einen Graph, welcher mit folgendem Graph G^0 isomorph ist — G^0 besitzt die Knotenpunkte $u_0, u_1, \ldots, u_n$; jeder Knotenpunkt u_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ist durch eine einzige Kante mit u_0 verbunden und ausserdem besitzt G^0 keine weitere Kante. Der Knotenpunkt u_0 heisst das Zentrum des n-Sternes.

[6]) Ein Baum, der keinen Knotenpunkt höheren als zweiten Grades besitzt, ist natürlich ein Weg.

Bilden wir zuerst die Menge $\bar{I}_0$ von Intervallen folgendermassen:

$$\bar{I}_0 = \{I_1, I_2, \dots, I_n\} \; ; \quad I_k = \langle 2k - 2, 2k + 1 \rangle \, .$$

Es ist klar, dass $H(\bar{I}_0) = B^*$ gilt. Für jede Zahl $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, für welche $m_i > 0$ ist, bilden wir die Intervallmenge $\bar{I}_i = \{I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,m_i}\}$ wie folgt:

$$I_{i,j} = \left\langle 2k - 1 + \frac{2j - 1}{2m_i + 1}, 2k - 1 + \frac{2j}{2m_i + 1} \right\rangle \quad (j = 1, 2, \dots, m_i) \, .$$

Es ist ersichtlich, dass keine zwei Intervalle von $\bar{I}_i$ ein gemeinsames Element besitzen und dass ein beliebiges Intervall von $\bar{I}_i$ eine Teilmenge der Menge I_i darstellt. Weiter gilt, dass die Menge $I_{i,j} \cap I_k$ für beliebige $j \in \{1, 2, \dots, m_i\}$ leer ist, wenn $i \neq k$. Konstruieren wir die Menge $\bar{I}$ folgendermassen:

$$\bar{I} = \bigcup_{k=0}^{n} \bar{I}_k \, .$$

Aus der Konstruktion der Menge $\bar{I}$ folgt die Gleichung: $H(\bar{I}) = B$. Also B ist ein H-Graph.

II. Es sei nun B_0 ein beliebiger H-Baum mit mehr als drei Knotenpunkten, welcher kein Stern ist. Es sei B_0^* sein Grund und es sei u_0 ein beliebiger Knotenpunkt von B_0^* derart, welcher in B_0^* von höherem als zweitem Grade ist. Es seien v_1, v_2, v_3 solche drei verschiedene Knotenpunkte von B_0^*, welche mit dem Knotenpunkt u_0 durch eine Kante verbunden sind. Es sei w_i $(i = 1, 2, 3)$ ein beliebiger solcher Knotenpunkt von B_0 $(w_i \neq u_0)$, welcher im Graph B_0 durch eine Kante mit v_i verbunden ist. Ein solcher Knotenpunkt jedenfalls existiert (sonst ist v_i im B_0 ein Knotenpunkt ersten Grades und gehört nicht zu B_0^* – Widerspruch). Der Knotenpunkt w_i ist durch keine Kante mit u_0 verbunden (weil B_0 kein Dreieck enthält; u_0, v_i und v_i, w_i sind schon durch eine Kante verbunden). Wenn wir aus dem Graph B_0 die Artikulation u_0 entfernen, entsteht ein Graph B_1, welcher mindestens drei Komponenten besitzt. Die Knotenpunkte v_1, v_2, v_3 gehören zu verschiedenen Komponenten des Graphen B_1 und die Knotenpunkte v_i, w_i gehören zu derselben Komponente von B_1.

Es existieren also in B_1 mindestens drei Komponenten derart, dass jede von ihnen solchen Knotenpunkt enthält, welcher im Graph B_0 durch keine Kante mit der Artikulation u_0 verbunden ist. Laut Satz 1 ist B_0 kein H-Graph, was einen Widerspruch darstellt. Darum kann der Grund des H-Baumes keinen Knotenpunkt höheren als zweiten Grades besitzen, und laut Lemma 5 ist der Grund des H-Baumes ein Weg. Dies beweist den erwähnten Satz.

Satz 2 gibt also die gesuchte Antwort auf die Frage von Hajós für den Fall des paaren Graphen.

Literatur

[1] *D. König*: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936.

[2] *A. Hajnal, J. Surányi*: Über die Auflösung von Graphen in volständige Teilgraphen. Ann. Univ. scient., Budapest, Sec. math., 1958, *1*, 113—121.

[3] *C. G. Lekkerkerker, J. Ch. Boland:* Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line. Fundam. math. *51* (1962), 1, 45—64.

Výtah

PÁRNE HAJÓSOVSKÉ GRAFY

ANTON KOTZIG, Bratislava

Nech $\bar{I} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ (kde n je ľubovoľné prirodzené číslo) je množina intervalov v množine všetkých reálnych čísel. Graf $H(\bar{I})$ sa nazýva hajósovský (skrátene H-graf), ak $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sú vrcholy grafu $H(\bar{I})$ a ak vrcholy I_a, I_b z $\bar{I}$ sú v tomto grafe spojené hranou (a to jedinou hranou) práve vtedy, keď $I_a \cap I_b \neq \emptyset$.

G. HAJÓS položil otázku, aké podmienky musí splňovať konečný graf, aby bol H-grafom.

V práci dokazuje sa táto veta:

Veta 1. *Nech G_0 je podgraf súvislého H-grafu G, ktorý vznikne odstránením istej artikulácie a z grafu G. Potom existujú najviac dve také komponenty grafu G_0, ktoré majú túto vlastnosť: istý vrchol komponenty nie je spojený hranou s vrcholom a.*
Z vety 1 sa vyvodzujú dôsledky pre párné H-grafy.

Dokazuje sa, že párny H-graf neobsahuje žiadnu kružnicu. Z toho vyplýva, že ľubovoľná komponenta párneho H-grafu je buď izolovaný vrchol alebo strom. Ľubovoľná m-hviezda je H-graf.

Nech G je ľubovoľný strom, ktorý obsahuje najmenej tri vrcholy. Graf G^*, ktorý vznikne z G odstránením všetkých vrcholov prvého stupňa nazveme základom stromu G. Je zrejmé, že základ stromu je buď izolovaný vrchol (ak G je hviezda) alebo strom (ak G nie je hviezda). Dokazuje sa táto veta:

Veta 2. *Ľubovoľný strom G je práve vtedy H-grafom, keď o každej jeho komponente G_i platí: komponenta G_i je buď* (1) *izolovaný vrchol, alebo* (2) *G_i je hviezda, alebo* (3) *G_i je taký strom, že jeho základom je cesta.*

Pretože podľa predošlého párny H-graf neobsahuje žiadnu kružnicu, dáva veta 2 odpoveď na Hajósovu otázku pre prípad párneho grafu.

Резюме

ЧЕТНЫЕ ХАЙОШЕВСКИЕ ГРАФЫ

АНТОН КОЦИГ (Anton Kotzig), Братислава

Пусть $\bar{I} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ (где n — произвольное натуральное число) — множество интервалов в множестве всех действительных чисел. Граф $H(\bar{I})$ называется хайошевским (сокращенно H-графом), если $I_1, I_2, \ldots, I_n$ — вершины графа $H(\bar{I})$ и если вершины $\bar{I}_a \neq \bar{I}_b$ из $\bar{I}$ в этом графе соединены ребром (и только единственным ребром) тогда и только тогда, когда $I_a \cap I_b \neq \emptyset$.

Г. Хайош задал вопрос, каким условиям должен удовлетворять конечный граф, чтобы он был H-графом.

В работе доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть G_0 — подграф связного H-графа G, который получается удалением из графа G некоторой точки сочленения a. Тогда существует не более двух, обладающих следующими свойствами, компонент графа G_0: некоторая из вершин компоненты не соединена ребром в G с вершиной a.*

Из теоремы 1 выводятся следствия для четных H-графов.

Доказывается, что четный H-граф не содержит никакой окружности. Из этого вытекает, что любая компоненета четного H-графа является либо изолированной вершиной, либо деревом. Любая m — звезда будет H-графом.

Пусть G — произвольное дерево, содержащее хотя бы три вершины. Граф G^*, который получается удалением из G всех вершин первой степени, мы назовем основой дерева G. Очевидно, основой дерева будет либо изолированная вершина (если G — звезда), либо дерево (если G не является звездой). Автор доказывает следующую теорему:

Теорема 2. *Произвольное дерево G будет H-графом тогда и только тогда, когда для каждой его компоненеты G_i имеет место*: *компонента является либо* (1) *изолированной вершиной, либо* (2) *звездой, либо* (3) *таким деревом, основой которого является путь.*

Так как, согласно сказанному, четный H-граф не содержит никакой окружности, то вторая теорема дает ответ на вопрос, заданный Хайошом, для случая четного графа.