Časopis pro pěstování matematiky

Miroslav Fiedler

O zobecněné Gräffeho metodě a její modifikaci

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 2, 194--199

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108731

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

O ZOBECNĚNÉ GRÄFFEHO METODĚ A JEJÍ MODIFIKACI

MIROSLAV FIEDLER, Praha

(Došlo dne 15. prosince 1961)

V tomto článku chceme upozornit na možnost numerického řešení algebraické rovnice pomocí Gräffeho metody, zobecněné v tom smyslu, že se počítají postupně rovnice, jejichž kořeny jsou m^k-té mocniny kořenů dané rovnice ($m \geqq 2$). Kromě vzorců pro vlastní Gräffeho posloupnost jsou podány i vzorce pro druhou posloupnost, pomocí které se snadno najdou i komplexní kořeny.

1. V tomto odstavci uvedeme některé definice a algebraické věty, které budeme v dalším potřebovat. Přitom všechna čísla, která se zde vyskytují, jsou (obecně) komplexní.

(1,1) *Je-li $f(x)$ polynom a m přirozené číslo, pak existují a jsou jednoznačně určeny polynomy $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)$ tak, že*

$$f(x) = f_0(x^m) + x f_1(x^m) + \ldots + x^{m-1} f_{m-1}(x^m).$$

Důkaz je zřejmý.

(1,2) *Nechť $f(x), g(x)$ jsou polynomy, m přirozené číslo a ε primitivní*[1]) $\sqrt[m]{1}$. *Potom polynom*

$$\varphi(x) = \frac{1}{m} [g(x) f(\varepsilon x) f(\varepsilon^2 x) \ldots f(\varepsilon^{m-1} x) + \\ + f(x)\, g(\varepsilon x) f(\varepsilon^2 x) \ldots f(\varepsilon^{m-1} x) + \ldots + f(x) f(\varepsilon x) \ldots g(\varepsilon^{m-1} x)] \tag{1}$$

je polynom v x^m.

Důkaz. Pišme podle (1,1)

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{m-1} x^i \varphi_i(x^m).$$

Poněvadž $\varphi(\varepsilon x) = \varphi(x)$, platí

$$\varphi(\varepsilon x) = \sum_{i=0}^{m-1} \varepsilon^i x^i \varphi_i(x^m) = \sum_{i=0}^{m-1} x^i \varphi_i(x^m).$$

[1]) Viz např. [5], str. 405.

Odtud $\varphi_i(x) = 0$ pro $i = 1, \ldots, m - 1$, tj. $\varphi(x) = \varphi_0(x^m)$. Lemma je dokázáno.

(1,3) Definice. *Nechť jsou splněny předpoklady* (1,2). *Potom polynom* $h(x)$, *pro který platí*

$$h(x^m) = \varphi(x)\,, \tag{2}$$

kde $\varphi(x)$ *je polynom z* (1), *označíme symbolem*

$$h(x) = f(x) \overset{m}{\circ} g(x)\,. \tag{3}$$

Poznámka. Speciálně je $f(x) \overset{m}{\circ} f(x) = l(x)$, kde

$$l(x^m) = f(x) f(\varepsilon x) \ldots f(\varepsilon^{m-1} x)\,. \tag{4}$$

(1,4) Věta. *Nechť* $f(x)$ *je polynom,* m *přirozené číslo. Má-li rovnice* $f(x) = 0$ *kořen* α, *má rovnice* $f(x) \overset{m}{\circ} f(x) = 0$ *kořen* α^m. *Je-li obráceně* u *kořenem* $f(x) \overset{m}{\circ} f(x) = 0$, *pak některá* $\sqrt[m]{u}$ *je kořenem* $f(x) = 0$. *Tento kořen je jednoduchý, jestliže* u *je jednoduchým kořenem* $f(x) \overset{m}{\circ} f(x) = 0$.

Důkaz. Plyne ihned z (4).

(1,5) *Nechť* $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ $(m \geqq 1)$ *jsou neurčité (nad tělesem komplexních čísel) a nechť* ε *je primitivní* $\sqrt[m]{1}$. *Potom pro*

$$F(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}) = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, & a_{m-1} \\ a_{m-1}, & a_0, & a_1, & \ldots, & a_{m-2} \\ a_{m-2}, & a_{m-1}, & a_0, & \ldots, & a_{m-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_0 \end{vmatrix} \tag{5}$$

platí

$$\sum_{j=0}^{m-1} b_j \frac{\partial F}{\partial a_j} = m \begin{vmatrix} b_0, & b_1, & b_2, & \ldots, & b_{m-1} \\ a_{m-1}, & a_0, & a_1, & \ldots, & a_{m-2} \\ a_{m-2}, & a_{m-1}, & a_0, & \ldots, & a_{m-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_0 \end{vmatrix}, \tag{6}$$

$$F(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}) = \prod_{k=0}^{m-1} (a_0 + a_1 \varepsilon^k + a_2 \varepsilon^{2k} + \ldots + a_{m-1} \varepsilon^{(m-1)k})\,, \tag{7}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} b_j \frac{\partial F}{\partial a_j} = \sum_{j=0}^{m-1} (b_0 + b_1 \varepsilon^j + \ldots + b_{m-1} \varepsilon^{(m-1)j}) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m-1} (a_0 + a_1 \varepsilon^i + \ldots + a_{m-1} \varepsilon^{(m-1)i})\,. \tag{8}$$

Důkaz. Derivováním (5) dostaneme

$$\sum_{j=0}^{m-1} b_j \frac{\partial F}{\partial a_j} = \begin{vmatrix} b_0, & b_1, & \ldots, & b_{m-1} \\ a_{m-1}, & a_0, & \ldots, & a_{m-2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_1, & a_2, & \ldots, & a_0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots, & a_{m-1} \\ b_{m-1}, & b_0, & \ldots, & b_{m-2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_1, & a_2, & \ldots, & a_0 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots, & a_{m-1} \\ a_{m-1}, & a_0, & \ldots, & a_{m-2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_0 \end{vmatrix}.$$

Všechny determinanty pravé strany si však jsou rovny, neboť každý přejde cyklickou permutací řádků a zároveň sloupců v první. Platí tedy (6). Vztah (7) je dokázán např. v [2], str. 97–99. Vztah (8) plyne ovšem derivováním z (7).

(1,6) Věta. *Je-li pro polynomy $f(x)$, $g(x)$ a přirozené číslo m*

$$f(x) = f_0(x^m) + x\, f_1(x^m) + \ldots + x^{m-1}\, f_{m-1}(x^m)\,, \tag{9}$$
$$g(x) = g_0(x^m) + x\, g_1(x^m) + \ldots + x^{m-1}\, g_{m-1}(x^m)\,,$$

potom platí

$$f(x) \overset{m}{\circ} g(x) = \begin{vmatrix} g_0(x), & g_1(x), & g_2(x), & \ldots, & g_{m-1}(x) \\ x f_{m-1}(x), & f_0(x), & f_1(x), & \ldots, & f_{m-2}(x) \\ x f_{m-2}(x), & x f_{m-1}(x), & f_0(x), & \ldots, & f_{m-3}(x) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x f_1(x), & x f_2(x), & x f_3(x), & \ldots, & f_0(x) \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Speciálně je

$$f(x) \overset{m}{\circ} f(x) = \begin{vmatrix} f_0(x), & f_1(x), & f_2(x), & \ldots, & f_{m-1}(x) \\ x f_{m-1}(x), & f_0(x), & f_1(x), & \ldots, & f_{m-2}(x) \\ x f_{m-2}(x), & x f_{m-1}(x), & f_0(x), & \ldots, & f_{m-3}(x) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x f_1(x), & x f_2(x), & x f_3(x), & \ldots, & f_0(x) \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Důkaz. Dosadíme-li do (5) a (6)

$$a_0 = f_0(x^m),\ a_1 = x f_1(x^m),\ \ldots,\ a_{m-1} = x^{m-1} f_{m-1}(x^m)\,,$$
$$b_0 = g_0(x^m),\ b_1 = x\, g_1(x^m),\ \ldots,\ b_{m-1} = x^{m-1}\, g_{m-1}(x^m)\,,$$

dostáváme odtud vzhledem k (1), (2), (6) a (8) pro $h(x) = f(x) \overset{m}{\circ} g(x)$

$$m\, h(x^m) = m \begin{vmatrix} g_0(x^m), & x\, g_1(x^m), & x^2\, g_2(x^m), & \ldots, & x^{m-1}\, g_{m-1}(x^m) \\ x^{m-1} f_{m-1}(x^m), & f_0(x^m), & x f_1(x^m), & \ldots, & x^{m-2} f_{m-2}(x^m) \\ x^{m-2} f_{m-2}(x^m), & x^{m-1} f_{m-1}(x^m), & f_0(x^m), & \ldots, & x^{m-3} f_{m-3}(x^m) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x f_1(x^m), & x^2 f_2(x^m), & x^3 f_3(x^m), & \ldots, & f_0(x^m) \end{vmatrix}.$$

Násobme v tomto determinantu druhý řádek x, třetí $x^2, \ldots, m$-tý x^{m-1} a dělme (x je neurčitá) druhý sloupec x, třetí $x^2, \ldots, m$-tý x^{m-1}; je tedy

$$h(x^m) = \begin{vmatrix} g_0(x^m), & g_1(x^m), & \ldots, & g_{m-1}(x^m) \\ x^m f_{m-1}(x^m), & f_0(x^m), & \ldots, & f_{m-2}(x^m) \\ x^m f_{m-2}(x^m), & x^m f_{m-1}(x^m), & \ldots, & f_{m-3}(x^m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^m f_1(x^m), & x^m f_2(x^m), & \ldots, & f_0(x^m) \end{vmatrix}$$

Odtud plyne (10), specialisací pro $g = f$ pak (11). Věta je dokázána.

(1,7) *Nechť $f(x)$, $g_1(x)$ a $g_2(x)$ jsou polynomy, m přirozené číslo a ξ kořen rovnice $f(x) = 0$. Potom pro $h_i(x) = f(x) \overset{m}{\circ} g_i(x)$, $i = 1, 2$, platí*

$$h_1(\xi^m)\, g_2(\xi) - h_2(\xi^m)\, g_1(\xi) = 0\,. \tag{12}$$

Důkaz. Plyne bezprostředně z (1) a (2).

2. Věty z předchozího odstavce umožňují numericky řešit algebraickou rovnici metodou zobecňující Gräffeho metodu a její modifikaci uvedenou např. v [1] nebo [3]: Definujme si totiž pro danou rovnici $f(x) = 0$ Gräffeho zobecněnou posloupnost polynomů $\overset{k}{f}(x)$ a přidruženou posloupnost $\overset{k}{g}(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ vztahy

$$\overset{0}{f}(x) = f(x)\,, \quad \overset{0}{g}(x) = nx\,f(x) - x^2 f'(x)\,, \tag{13}$$
$$\overset{k+1}{f}(x) = \overset{k}{f}(x) \overset{m}{\circ} \overset{k}{f}(x)\,, \quad \overset{k+1}{g}(x) = \overset{k}{f}(x) \overset{m}{\circ} \overset{k}{g}(x)\,,$$

kde $f'(x)$ je derivace polynomu $f(x)$ a n jeho stupeň.

Podle věty (1,4) mají rovnice $\overset{k}{f}(x) = 0$ jako kořeny m^k-té mocniny kořenů původní rovnice. Je-li $m \geqq 2$, potom s rostoucím k se absolutní hodnoty kořenů rovnic $\overset{k}{f}(x) = 0$ stále více od sebe odlišují, takže pro dosti velké k lze známým způsobem rozdělit rovnici $\overset{k}{f}(x) = 0$ na několik rovnic menších stupňů, jejichž kořeny jsou přibližně rovny kořenům $\overset{k}{f}(x) = 0$. Ve větě (2,1), která odpovídá větě 3 z [3], ukážeme, jak lze najít kořen původní rovnice, známe-li jednoduchý kořen rovnice $\overset{k}{f}(x) = 0$.

(2,1) Věta. *Nechť $u \neq 0$ je jednoduchý kořen rovnice $\overset{k}{f}(x) = 0$, $k \geqq 0$. Potom existuje jednoduchý kořen α rovnice $f(x) = 0$ tak, že $u = \alpha^{m^k}$. Tento kořen je dán vzorcem*

$$\alpha = -\frac{\overset{k}{g}(u)}{u\,\overset{k}{f}{}'(u)}\,. \tag{14}$$

Důkaz. Existence jednoduchého kořene α plyne snadno indukcí z (1,4). Označíme-li $u_i = \alpha^{m^i}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, potom u_i je zřejmě jednoduchý nenulový kořen rovnice $\overset{i}{f}(x) = 0$. Je však pro $i = 1, \ldots, k$ podle (13) a (4)

$$m x^m \overset{i}{f}{}'(x^m) = x \frac{\mathrm{d}\overset{i}{f}(x^m)}{\mathrm{d}x} = x\,[\,\overset{i-1}{f}{}'(x)\,\overset{i-1}{f}(\varepsilon x) \ldots \overset{i-1}{f}(\varepsilon^{m-1}x) +$$

$$+ \varepsilon\, \overset{i-1}{f}(x)\,\overset{i-1}{f}{}'(\varepsilon x) \ldots \overset{i-1}{f}(\varepsilon^{m-1}x) + \ldots + \varepsilon^{m-1}\, \overset{i-1}{f}(x)\,\overset{i-1}{f}(\varepsilon x) \ldots \overset{i-1}{f}{}'(\varepsilon^{m-1}x)]\,,$$

tj., označíme-li na okamžik

$$w_i(x) = x\,\overset{i}{f}{}'(x)\,, .$$

platí

$$w_i(x) = \overset{i-1}{f}(x) \overset{m}{\circ} w_{i-1}(x)\,.$$

Poněvadž

$$\overset{i}{f}(u_i) = 0\,, \quad u_i \overset{i}{f}{}'(u_i) \neq 0\,,$$

je podle (13) a (1,7) pro $i = 1, \ldots, k$

$$\frac{\overset{i-1}{g}(u_{i-1})}{u_{i-1}\,\overset{i-1}{f}{}'(u_{i-1})} = \frac{\overset{i-1}{g}(u_{i-1})}{w_{i-1}(u_{i-1})} = \frac{\overset{i}{g}(u_{i-1}^m)}{w_i(u_{i-1}^m)} = \frac{\overset{i}{g}(u_i)}{u_i\,\overset{i}{f}{}'(u_i)}\,,$$

tj.

$$-\frac{\overset{k}{g}(u)}{u\,\overset{k}{f}{}'(u)} = -\frac{\overset{0}{g}(\alpha)}{\alpha\,\overset{0}{f}{}'(\alpha)} = -\frac{-\alpha^2 f'(\alpha)}{\alpha f'(\alpha)} = \alpha\,.$$

Tím je věta dokázána.

Tato věta poskytuje možnost numericky řešit algebraickou rovnici, jestliže ještě v případě, že všechny kořeny rovnice mají (skoro) stejné absolutní hodnoty, užijeme metody uvedené v [4]. Je ovšem možno (a je to také numericky výhodnější) užít k výpočtu kořenů původní rovnice místo věty (2,1) relací analogických relacím (19) nebo (23) z [3].

Závěrem se zmiňme o praktické upotřebitelnosti této metody pro $m > 2$ (pro $m = 2$ je to ovšem metoda totožná s metodou v [3]). Domníváme se, že jen případ $m = 3$ by mohl mít praktickou důležitost, neboť případ $m = 4$ se výhodněji počítá dvojí aplikací případu $m = 2$ a pro $m > 4$ jsou vzorce již značně složité. Pro $m = 3$ je podle (10)

$$\overset{k+1}{f}(x) = [\overset{k}{f}_0(x)]^3 + x[\overset{k}{f}_1(x)]^3 + x^2[\overset{k}{f}_2(x)]^3 - 3x\,\overset{k}{f}_0(x)\,\overset{k}{f}_1(x)\,\overset{k}{f}_2(x)\,,$$

$$\overset{k+1}{g}(x) = \overset{k}{g}_0(x)\,[(\overset{k}{f}_0(x))^2 - x\,\overset{k}{f}_1(x)\,\overset{k}{f}_2(x)] +$$

$$+ x\,\overset{k}{g}_1(x)\,[(\overset{k}{f}_1(x))^2 - \overset{k}{f}_0(x)\,\overset{k}{f}_2(x)] + x\,\overset{k}{g}_2(x)\,[x(\overset{k}{f}_2(x))^2 - \overset{k}{f}_0(x)\,\overset{k}{f}_1(x)]\,.$$

V tomto případě $m = 3$ je výhodné, že kladným kořenům původní rovnice odpovídají opět kladné kořeny transformovaných rovnic a záporným opět záporné. Jestliže tedy sestrojíme pouze první Gräffeho posloupnost $\overset{k}{f}(x)$ a ukáže-li se, že daná rovnice má vesměs reálné kořeny (anebo jen jednu dvojici komplexně sdružených kořenů), je ovšem zbytečně sestrojovat druhou posloupnost $\overset{k}{g}(x)$ a odmocňování reálných kořenů bude jednoznačné.

Literatura

[1] *S. Brodetsky, G. Smeal*: On Graeffe's Method for Complex Roots of Algebraic Equations. Proc. Cambridge Phil. Soc. *22* (1924), 83–87.

[2] *B. Bydžovský*: Základy teorie determinantů a matic a jich užití. Praha 1930.

[3] *M. Fiedler*: Über das Gräffesche Verfahren. Čech. mat. žurnal *5* (1955), 506–516.

[4] *M. Fiedler*: Numerické řešení algebraických rovnic, které mají kořeny o skoro stejné absolutní hodnotě. Apl. mat. *1* (1956), 4–22.

[5] *V. Kořínek*: Základy algebry. Praha 1953.

Резюме

ОБ ОБОБЩЕННОМ МЕТОДЕ ГРЭФЕ И ЕГО ВИДОИЗМЕНЕНИИ

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР (Miroslav Fiedler), Praha

В работе обобщается метод Лобачевского-Грэфе для решения алгебраического уравнения и его видоизменение для вычисления комплексных корней. Это обобщение состоит в том, что вместо обычной последовательности используется последовательность таких полиномов, корни любого из которых являются m-ыми ($m \geqq 2$) степенями корней предыдущего полинома.

Zusammenfassung

ÜBER DAS VERALLGEMEINERTE GRÄFFESCHE VERFAHREN UND SEINE MODIFIKATION

MIROSLAV FIEDLER, Praha

Das Gräffesche Verfahren zur Auflösung von algebraischen Gleichungen sowie seine Modifikation zum Auffinden von komplexen Wurzelpaaren wird hier für den Fall verallgemeinert, in dem jedes nächste Gräffesche Polynom die m-te Potenzen ($m \geqq 2$) der Wurzeln des vorstehenden Polynoms als seine Wurzeln hat.