Časopis pro pěstování matematiky

Karel Havlíček

Kanálové W-plochy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 78 (1953), No. 4, 347--357

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108701`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 78 (1953)

KANÁLOVÉ W-PLOCHY

KAREL HAVLÍČEK, Praha.

(Došlo dne 30. března 1953.)

DT: 513.785

V článku je ukázáno, že některé vlastnosti kanálových ploch, které jsou známé jako podmínky nutné, jsou zároveň i postačující pro jednotlivé typy těchto ploch. Především jsou zde mezi kanálovými plochami určeny všechny plochy *Weingartenovy*.

1. Formulace problému

Kanálové plochy lze charakterisovat rovnicí

$$C = 0\,, \tag{1}$$

kde C je skalár, jehož konstrukci jsem podal dříve;[1]) protože

$$C = u_{\nu\lambda\mu}\, u_{\alpha\beta\gamma}\, P^{\nu\alpha} P^{\lambda\beta} P^{\mu\gamma}\,,$$

kde $u_{\nu\lambda\mu}$ a $P^{\lambda\mu}$ jsou symetrické tensory, jejichž složky jsou závislé až na třetích parciálních derivacích funkcí, určujících uvažovanou plochu, je rovnice (1) rovnicí diferenciální. Chceme-li mezi kanálovými plochami určit některé speciální plochy, charakterisované jinou diferenciální rovnicí, stačí hledat společné řešení obou diferenciálních rovnic. Tak lze na př. zjistit, které kanálové plochy jsou zároveň plochami přímkovými.[2]) Abychom stanovili mezi kanálovými plochami všechny W-plochy (Weingartenovy plochy), budeme hledat společné řešení rovnice (1) a rovnice

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial K}{\partial u}\,, & \dfrac{\partial H}{\partial u} \\ \dfrac{\partial K}{\partial v}\,, & \dfrac{\partial H}{\partial v} \end{vmatrix} = 0\,, \tag{2}$$

která charakterisuje W-plochy; při tom K, H značí *Gaussovu*, resp. střední křivost plochy vztažené k parametrům u, v.

Protože rozvinutelné plochy ($K = 0$) jsou zde triviálním řešením, vypustíme je ze svých úvah a omezíme se v dalším pouze na plochy nerozvinutelné.

---

[1]) *Havlíček* [1].
[2]) *Havlíček* [2].

Rovněž kruhové body plochy vyloučíme ze svých úvah, neboť v takových bodech nelze sestrojit skalár C. Značí-li $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$ normální křivosti plochy v hlavních směrech, takže tedy je

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}, \quad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

pak kruhové body jsou charakterisovány rovnicí $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$. Celkem tedy budeme v dalším stále předpokládat splnění těchto dvou nerovností:

$$K \neq 0, \quad \frac{1}{R_1} \neq \frac{1}{R_2}. \tag{3}$$

Vedle ploch rozvinutelných je tím vyloučena z našich úvah také koule.

Za podmínek (3) lze rovnici (2) nahradit rovnicí

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial u}, & \frac{\partial R_2}{\partial u} \\ \frac{\partial R_1}{\partial v}, & \frac{\partial R_2}{\partial v} \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

takže naším úkolem je hledati společné řešení rovnic (1) a (4). Protože význam těchto rovnic je nezávislý na volbě parametrů u, v, můžeme výpočet zjednodušit vhodnou volbou parametrů. K tomu účelu se zde hodí parametry hlavní.

2. Pomocné rovnice

Užijeme obvyklé vektorové a tensorové symboliky a terminologie.[3]) V pravoúhlých kartézských souřadnicích jsou parametrické rovnice plochy, vztažené k parametrům u, v symbolisovány vektorovou rovnicí

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \tag{5}$$

která představuje průvodič (radius — vektor) $\mathbf{r}$ bodu plochy jako funkci dvou parametrů u, v.

Za předpokladu, že u, v jsou hlavní parametry, vyjádříme složky prvního metrického tensoru $a_{\lambda\mu}$ resp. druhého metrického tensoru $b_{\lambda\mu}$ klasickým způsobem

$$a_{\mathrm{I\,I}} = E, \quad a_{\mathrm{I\,II}} = a_{\mathrm{II\,I}} = F = 0, \quad a_{\mathrm{II\,II}} = G$$

$$b_{\mathrm{I\,I}} = L, \quad b_{\mathrm{I\,II}} = b_{\mathrm{II\,I}} = M = 0, \quad b_{\mathrm{II\,II}} = N.$$

Jejich diskriminanty označíme

$$A^2 = EG - F^2, \qquad B^2 = LN - M^2.$$

Protože studujeme pouze reálné plochy bez singularit, je vždycky $A > 0$.

[3]) Viz na př. *Havlíček* [2].

Následující vztahy a rovnice tohoto odstavce uvádím rovněž bez důkazu; jsou obsaženy téměř v každé moderní učebnici diferenciální geometrie.[4]) Pro normální křivosti v hlavních směrech máme vzorce

$$\frac{1}{R_1} = \frac{L}{E}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G}, \tag{6}$$

takže $\frac{1}{R_1}$ $\left(\text{resp. } \frac{1}{R_2}\right)$ je normální křivost křivky $v = \text{const}$ (resp. $u = \text{const}$). V důsledku druhé nerovnosti (3) je tedy

$$EN - GL \neq 0 . \tag{7}$$

Jednotkový vektor normály plochy označme $\mathbf{N}$. Formule *Rodriguesovy* pak jsou

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u} = -\frac{1}{R_1}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v} = -\frac{1}{R_2}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} . \tag{8}$$

Christoffelovy symboly $\left\{ {\nu \atop \lambda\mu} \right\}$, určující metrickou konnexi, jsou v hlavních parametrech určeny těmito výrazy:

$$\begin{gathered} \left\{ {\mathrm{I} \atop \mathrm{I\,I}} \right\} = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}, \quad \left\{ {\mathrm{II} \atop \mathrm{II\,II}} \right\} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}, \\ \left\{ {\mathrm{II} \atop \mathrm{I\,II}} \right\} = \left\{ {\mathrm{II} \atop \mathrm{II\,I}} \right\} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}, \quad \left\{ {\mathrm{I} \atop \mathrm{I\,II}} \right\} = \left\{ {\mathrm{I} \atop \mathrm{II\,I}} \right\} = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}, \\ \left\{ {\mathrm{II} \atop \mathrm{I\,I}} \right\} = -\frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \left\{ {\mathrm{I} \atop \mathrm{II\,II}} \right\} = -\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u} . \end{gathered} \tag{9}$$

Pro složky kubického tensoru $b_{\omega\mu\lambda} = \frac{\partial}{\partial \xi^\omega} b_{\mu\lambda} - \left\{ {\alpha \atop \mu\omega} \right\} b_{\alpha\lambda} - \left\{ {\alpha \atop \lambda\omega} \right\} b_{\mu\alpha}$ dostáváme tyto výrazy:

$$\begin{gathered} b_{\mathrm{I\,I\,I}} = \frac{1}{E}\left(E\frac{\partial L}{\partial u} - L\frac{\partial E}{\partial u}\right), \quad b_{\mathrm{I\,I\,II}} = b_{\mathrm{I\,II\,I}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{N}{G} - \frac{L}{E}\right)\frac{\partial E}{\partial v} \\ b_{\mathrm{II\,I\,I}} = \frac{1}{E}\left(E\frac{\partial L}{\partial v} - L\frac{\partial E}{\partial v}\right), \quad b_{\mathrm{I\,II\,II}} = \frac{1}{G}\left(G\frac{\partial N}{\partial u} - N\frac{\partial G}{\partial u}\right) \\ b_{\mathrm{II\,I\,II}} = b_{\mathrm{II\,II\,I}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{L}{E} - \frac{N}{G}\right)\frac{\partial G}{\partial u}, \quad b_{\mathrm{II\,II\,II}} = \frac{1}{G}\left(G\frac{\partial N}{\partial v} - N\frac{\partial G}{\partial v}\right) . \end{gathered} \tag{10}$$

Tento tensor je symetrický, takže

$$b_{\mathrm{I\,I\,II}} = b_{\mathrm{I\,II\,I}} = b_{\mathrm{II\,I\,I}}, \quad b_{\mathrm{I\,II\,II}} = b_{\mathrm{II\,I\,II}} = b_{\mathrm{II\,II\,I}},$$

už dává známé rovnice *Mainardi-Codazziho*, jež v hlavních parametrech tedy zní:

---

[4]) Na př. *Kagan* [3].

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{N}{G}-\frac{L}{E}\right)\frac{\partial E}{\partial v}&=\frac{1}{E}\left(E\frac{\partial L}{\partial v}-L\frac{\partial E}{\partial v}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}-\frac{N}{G}\right)\frac{\partial G}{\partial u}&=\frac{1}{G}\left(G\frac{\partial N}{\partial u}-N\frac{\partial G}{\partial u}\right).\end{aligned}\tag{11}$$

V dalším užijeme *Gaussovy rovnice*, které vyjadřují druhé derivace vektoru (5) jako lineární kombinace tří lineárně nezávislých vektorů $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, $\mathbf{N}$. Tyto rovnice mají v hlavních parametrech tvar

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u^2}&=\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}-\frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}+L\mathbf{N},\\ \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u\,\partial v}&=\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}+\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v},\\ \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v^2}&=-\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}+\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}+N\mathbf{N}.\end{aligned}\tag{12}$$

Konečně pro *Gaussovu* míru křivosti plochy máme jednak vyjádření $K = \frac{B^2}{A^2}$, jednak vyjádření pomocí prvního metrického tensoru (*Gaussova* věta),

$$K=\frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{EA}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{A}\frac{\partial G}{\partial u}\right)+$$
$$+\frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2}{A}\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{A}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{F}{EA}\frac{\partial E}{\partial u}\right),\ \text{kde } A>0\,,$$

což v hlavních parametrech dává rovnici

$$\begin{aligned}\frac{1}{2EG}\left\{E\left[\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v}+\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right]+G\left[\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u}+\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right]\right\}-\\ -\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}=2LN.\end{aligned}\tag{13}$$

3. Kanálové W-plochy

Každá kanálová plocha je obálkou jednoparametrického systému koulí.

Mají-li všechny tyto koule stejný poloměr, pak je známo, že jejich obálka je W-plocha. Druhý běžný případ kanálové W-plochy je rotační plocha.[5]) Jiné kanálové W-plochy už nejsou, jak plyne z následujícího tvrzení:

Věta 1. *Nechť kanálová plocha je W-plochou. Potom je to buď plocha rotační nebo obálka jednoparametrického systému koulí s konstantním poloměrem.*

[5]) Na př. *Kagan* [3], str. 202; 252 a dál.

Důkaz: Daná plocha je podle předpokladu kanálovou, tedy pro ni platí rovnice (1), která v hlavních parametrech se po krácení nenulovým faktorem redukuje na tvar[6])

$$b_{\mathrm{I\,I\,I}}\; b_{\mathrm{II\,II\,II}} = 0\,. \tag{14}$$

Aspoň jeden systém hlavních (křivoznačných) čar jsou kružnice. Protože označení parametrických čar je v naší moci, můžeme předpokládat, že tyto kružnice jsou čáry $u = \mathrm{const}$, takže je $b_{\mathrm{II\,II\,II}} = 0$. K podmínce $b_{\mathrm{I\,I\,I}} = 0$ bychom dospěli pouhou záměnou parametrů. Pro Dupinovu cyklidu je současně $b_{\mathrm{I\,I\,I}} = b_{\mathrm{II\,II\,II}} = 0$. Můžeme se tedy při řešení rovnice (14) bez újmy obecnosti omezit na případ

$$b_{\mathrm{II\,II\,II}} = 0\,. \tag{15}$$

Z poslední rovnice (10) odtud plyne

$$G\frac{\partial N}{\partial v} - N\frac{\partial G}{\partial v} = 0\,,$$

neboť vzhledem k předpokladu $A > 0$ je $G \neq 0$. Tato podmínka je ekvivalentní s rovnicí

$$\frac{\partial R_2}{\partial v} = 0\,, \tag{16}$$

neboť ze (6) plyne $R_2 = \dfrac{G}{N}$, jelikož $N \neq 0$ (neboť podle (3) je $\dfrac{LN}{EG} = K \neq 0$).

(Poznámka: Touto rovnicí (16) v hlavních parametrech je možno také definovat kanálovou plochu, čímž by odpadly některé výpočty v odstavci 2. Budeme je však ještě potřebovat při jiné příležitosti.)

Druhý předpoklad, že daná plocha je W-plochou, vede na rovnici (4). Dosazením ze (16) do (4) tedy docházíme k podmínce

$$\frac{\partial R_2}{\partial u}\frac{\partial R_1}{\partial v} = 0\,, \tag{17}$$

která spolu se (16) charakterisuje kanálové W-plochy. Nyní je třeba rozlišovat dva případy:

$$\mathrm{I.}\ \frac{\partial R_2}{\partial u} = 0\,, \qquad \mathrm{II.}\ \frac{\partial R_1}{\partial v} = 0\,.$$

I. $\dfrac{\partial R_2}{\partial u} = 0$ spolu s podmínkou (16) dává $R_2 = \mathrm{konst}$; ale R_2 je právě poloměr koule, která se dotýká plochy podél příslušné kružnice $u = \mathrm{const}$. To plyne na příklad ihned z věty Meusnierovy, podle níž poloměr kružnice $u = \mathrm{const}$ je kolmým průmětem poloměru R_2, takže existuje koule o poloměru R_2, procházející uvažovanou kružnicí a dotýkající se plochy podél ní. Ke každé

---

[6]) *Havlíček* [1], théorème (3,5), str. 30—31, kde místo tensoru $b_{\nu\lambda\mu}$ je užito tensoru $v_{\nu\lambda\mu} = -\, b_{\nu\lambda\mu}$ (viz Mathematical Reviews, Vol. 11, No 5, p. 396, nebo *Havlíček* [2], poznámka [10]) pod čarou).

kružnici u = const lze takto přiřaditi jedinou kouli, všechny tyto koule mají konstantní poloměr R_2 = konst, jejich středy probíhají křivku[7])

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} + R_2\boldsymbol{N}\,, \tag{18}$$

takže tyto koule tvoří jednoparametrický systém a uvažovaná plocha je tedy jejich obálkou. Vede tedy případ I k obálce koulí o konstantním poloměru, čímž je první část tvrzení věty 1. dokázána.

II. případ, kdy $\dfrac{\partial R_1}{\partial v} = 0$, vyžaduje delšího výpočtu. Uvažovaná kanálová plocha je ovšem zase obálkou jednoparametrického systému koulí, dotýkajících se jí podle kružnic u = const. Středy těchto koulí vytvoří i zde křivku (18), avšak R_2 nemusí zde být konstantní. Dokážeme, že tato rovnice (18) zde je rovnicí přímky; tím bude dokázáno, že daná plocha je rotační, neboť tato přímka středů koulí je zřejmě osou rotace celého jednoparametrického systému koulí.

Z rovnice (18) plyne:

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} + \frac{\partial R_2}{\partial u}\boldsymbol{N} + R_2\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u}\,.$$

Dosazením z rovnic (6) a z první rovnice (8) dostáváme

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} = \frac{EN - GL}{EN}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} + \frac{1}{N^2}\left(N\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial N}{\partial u}\right)\boldsymbol{N}\,.$$

Koeficient při vektoru $\boldsymbol{N}$ upravíme ještě dosazením z druhé rovnice (11), takže

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} = \frac{EN - GL}{EN}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} + \frac{1}{2N}\frac{\partial G}{\partial u}\boldsymbol{N}\right). \tag{19}$$

Dalším derivováním dostaneme

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial u^2} = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{EN - GL}{EN}\right)\right]\cdot\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} + \frac{1}{2N}\frac{\partial G}{\partial u}\boldsymbol{N}\right] + \frac{EN - GL}{EN}\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2N}\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u} + \frac{1}{2N^2}\left(N\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial N}{\partial u}\right)\boldsymbol{N}\right].$$

Dosadíme-li sem za $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}^2}{\partial u^2}$ z první rovnice (12) a za $\dfrac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u}$ z první rovnice (8), máme po kratší úpravě

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial u^2} = {} & \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{EN - GL}{EN}\right)\right]\cdot\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} + \frac{1}{2N}\frac{\partial G}{\partial u}\boldsymbol{N}\right] + \\ & + \frac{EN - GL}{EN}\left[\frac{1}{2EN}\left(N\frac{\partial E}{\partial u} - L\frac{\partial G}{\partial u}\right)\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} - \frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2N^2}\left(N\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial N}{\partial u} + 2LN^2\right)\cdot\boldsymbol{N}\right].\end{aligned} \tag{20}$$

---

[7]) V důsledku druhé z rovnic (8) je totiž $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v} = 0$, takže $\boldsymbol{p}$ závisí pouze na jednom parametru a představuje tedy křivku.

Tento výsledek lze značně zjednodušit. Užijeme-li konečně rovnice $\frac{\partial R_1}{\partial v} = 0$, plynoucí z podmínky (17), máme po dosazení za R_1 ze (6)

$$L \frac{\partial E}{\partial v} - E \frac{\partial L}{\partial v} = 0 ,$$

což dosazeno do první rovnice (11) dává vzhledem k nerovnosti (7) podmínku

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0 \tag{21}$$

a tedy také

$$\frac{\partial L}{\partial v} = 0 .$$

Upravíme především koeficient při $\boldsymbol{N}$ ve výrazu (20). Z rovnice (13) se snadno vypočte $\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}$, což při podmínce (21) dává

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = \frac{1}{2EG} \frac{\partial G}{\partial u} \left(E \frac{\partial G}{\partial u} + G \frac{\partial E}{\partial u} \right) - 2LN$$

a užitím tohoto výsledku po vhodné úpravě dostaneme

$$\frac{1}{2N^2} \left(N \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial N}{\partial u} + 2LN^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{4N} \frac{\partial G}{\partial u} \left[\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{2}{GN} \left(N \frac{\partial G}{\partial u} - G \frac{\partial N}{\partial u} \right) \right] .$$

Poslední člen snadno upravíme dosazením z druhé rovnice (11) a dostaneme postupnými úpravami tento koeficient ve tvaru:

$$\frac{1}{4EN^2} \frac{\partial G}{\partial u} \left(N \frac{\partial E}{\partial u} - L \frac{\partial G}{\partial u} \right) .$$

Dosadíme-li to spolu s (21) do (20), máme

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial u^2} = \Psi . \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} + \frac{1}{2N} \frac{\partial G}{\partial u} \boldsymbol{N} \right) ,$$

kde

$$\Psi = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{EN - GL}{EN} \right) + \frac{EN - GL}{2E^2N^2} \left(N \frac{\partial E}{\partial u} - L \frac{\partial G}{\partial u} \right) .$$

Porovnáním s rovnicí (19) nacházíme vzhledem k (3), že platí

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial u^2} = \Phi . \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} , \tag{22}$$

kde

$$\Phi = \Psi . \frac{EN}{EN - GL} =$$

$$= \frac{EN}{EN - GL} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{EN - GL}{EN} \right) \right] + \frac{1}{2EN} \left(N \frac{\partial E}{\partial u} - L \frac{\partial G}{\partial u} \right) .$$

Vzhledem k tomu, že $\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v} = 0$ (srovnej s poznámkou [7]), je $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}u} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u}$, $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}u^2} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial u^2}$; rovnici (22) lze přepsat na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}u^2} = \Phi \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}u},$$

která charakterisuje přímku. Křivka (18) je tedy přímkou, to znamená, že uvažovaná plocha je obálkou jednomocného systému koulí, jejichž středy vyplní přímku, takže naše plocha je rotační. Tím je věta 1. celá dokázána.

Zvláštním případem kanálových ploch jsou *Dupinovy cyklidy*, charakterisované v hlavních parametrech rovnicemi

$$b_{\mathrm{I\,I\,I}} = b_{\mathrm{II\,II\,II}} = 0\,. \tag{23}$$

Pro ně dává předchozí věta 1. tento výsledek:

Věta 2. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby Dupinova cykloida byla W-plochou, jest: tato plocha je torus* (rotační anuloid).

Důkaz: Protože torus je nutně W-plochou, stačí se omezit na druhou část důkazu. Nechť Dupinova cyklida je W-plochou. Podobně jako v důkaze věty 1. zjistíme, že (23) je ekvivalentní s rovnicemi

$$\text{a)}\ \frac{\partial R_1}{\partial u} = 0\,, \quad \text{b)}\ \frac{\partial R_2}{\partial v} = 0\,, \tag{24}$$

což dosazeno do (4) dává

$$\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial R_2}{\partial u} = 0\,. \tag{25}$$

Rozlišujeme opět dva případy.

I. Nechť $\frac{\partial R_1}{\partial v} = 0$. Spolu s rovnicí (24a) dává tato podmínka výsledek $R_1 =$ $=$ konst; uvažovaná plocha je tedy obálkou koulí o konstantním poloměru a tyto koule se dotýkají plochy podél kružnic $v =$ konst. (Porovnej s případem I, v důkazu věty 1.) Spolu s rovnicí (24b) představuje podmínku pro to, aby plocha byla rotační, na níž křivky $u =$ konst jsou rotačními kružnicemi (což jsme odvodili v důkaze věty 1., případ II.). To znamená, že čáry $v =$ konst, jež jsou zde kružnicemi, jsou meridiány naší plochy, která je tedy rotačním anuloidem.

II. Případ $\frac{\partial R_2}{\partial u} = 0$, dává ovšem stejný výsledek s výměnou označení obou systémů parametrických křivek.

Poznámka: Případ $\frac{\partial R_1}{\partial u} = \frac{\partial R_1}{\partial v} = \frac{\partial R_2}{\partial u} = \frac{\partial R_2}{\partial v} = 0$ vede k podmínkám $b_{\mathrm{II\,I\,I}} = b_{\mathrm{I\,II\,II}} = 0$, což podle rovnic (11) za předpokladu (7) znamená $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$,

$\frac{\partial G}{\partial u} = 0$; podle vzorce (13) pak máme $K = 0$ a naše plocha je rozvinutelná, kterýžto případ jsme předem vyloučili ze svých úvah. Kdybychom opustili předpoklad (7) a připustili $R_1 = R_2$, pak všechny body jsou kruhové a uvažovaná plocha je koule. Tento případ jsme rovněž vyloučili.

4. Některé důsledky.

U kanálových W-ploch je vždycky jedna soustava hlavních (čili křivoznačných) křivek tvořena křivkami geodetickými; u plochy rotační jsou to meridiány, u plochy, která je obálkou koulí o konstantním poloměru jsou to kružnice, podle nichž se tyto koule dotýkají obálky (neboť rovina každé z těchto kružnic prochází zde středem příslušné koule a tedy její normály jsou zároveň normálami obálky, což je charakteristická vlastnost geodetické křivky). Snadno ukážeme, že tato vlastnost je pro kanálové W-plochy charakteristická.

Označíme-li $u = \xi^{\mathrm{I}}$, $v = \xi^{\mathrm{II}}$, pak rovnice geodetických křivek lze užitím tensorové symboliky psát jednoduše ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\nu}{\mathrm{d}t^2} + \begin{Bmatrix} \nu \\ \lambda\mu \end{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}\xi^\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}t} = f(t)\frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}t}, \quad (\nu = \mathrm{I}, \mathrm{II}),$$

kde $f(t)$ je libovolný skalár, t je parametr uvažované křivky. Pro parametrické křivky máme buď $u =$ konst, $v = t$

$$\left(\text{tedy } \frac{\mathrm{d}\xi^{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\xi^{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t^2} = 0\,, \quad \frac{\mathrm{d}\xi^{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}t} = 1\,, \quad \frac{\mathrm{d}^2\xi^{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}t^2} = 0\right)$$

nebo $u = t$, $v =$ konst

$$\left(\frac{\mathrm{d}\xi^{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t} = 1\,, \quad \frac{\mathrm{d}^2\xi^{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}t^2} = 0\,, \quad \frac{\mathrm{d}\xi^{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\xi^{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}t^2} = 0\right),$$

takže nutná a postačující podmínka, aby parametrická křivka $u =$ konst (resp. $v =$ konst) byla geodetickou, je

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}\ \mathrm{II} \end{Bmatrix} = 0 \ \left(\text{resp. } \begin{Bmatrix} \mathrm{II} \\ \mathrm{I}\ \ \mathrm{I} \end{Bmatrix} = 0\right). \tag{26}$$

Předpokládejme opět, že parametry u, v jsou hlavní a ve shodě s označením v předcházejícím odstavci volme kružnice, tvořící jednu soustavu hlavních křivek na kanálové ploše, za křivky $u =$ konst. Nazveme ji první soustavou hlavních křivek; křivky $v =$ konst tvoří pak druhou soustavu hlavních křivek.

Věta 3. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby na kanálové ploše byla první soustava hlavních křivek tvořena křivkami geodetickými, jest: tato plocha je obálkou jednoparametrického systému koulí o konstantním poloměru.*

Důkaz: Kanálová plocha, na níž hlavní křivky $u =$ konst jsou kružnice, je charakterisována rovnicí (15), resp. (16).

Z případu I v důkazu věty 1. víme, že tato plocha je obálkou koulí o konstantním poloměru tehdy a jen tehdy, když ve všech bodech plochy platí

$$\frac{\partial R_2}{\partial u} = 0 ,$$

čili

$$N \frac{\partial G}{\partial u} - G \frac{\partial N}{\partial u} = 0 .$$

Na základě druhé z rovnic (11) je tato rovnice vzhledem k předpokladu (7) ekvivalentní s podmínkou

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 0 ,$$

která je splněna tehdy a jen tehdy, když

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}\ \mathrm{II} \end{Bmatrix} = 0 ,$$

jak snadno zjistíme z poslední rovnice (9). Tak docházíme k první rovnici (26), představující nutnou a postačující podmínku pro to, aby křivky $u =$ konst byly geodetické. Tím je věta 3. dokázána.

Stejného postupu důkazu užijeme i v druhém případě.

Věta 4. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby na kanálové ploše byla druhá soustava hlavních křivek tvořena křivkami geodetickými, jest: tato plocha je rotační.*

Důkaz. Z případu II v důkaze věty 1. víme, že kanálová plocha, na níž $u =$ konst jsou kružnice, je rotační tehdy a jen tehdy, když vedle (16) platí

$$\frac{\partial R_1}{\partial v} = 0 ,$$

čili

$$E \frac{\partial L}{\partial v} - L \frac{\partial E}{\partial v} = 0 .$$

Vzhledem k předpokladu (7) plyne z první rovnice (11), že tato podmínka je splněna tehdy a jen tehdy, když

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0 .$$

Ze vzorců (9) plyne, že tato rovnice je splněna tehdy a jen tehdy, když

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{II} \\ \mathrm{I}\ \ \mathrm{I} \end{Bmatrix} = 0 ,$$

čili, když křivky $v =$ konst jsou geodetické (viz druhou rovnici (26)), čímž je tvrzení věty 4 dokázáno.

LITERATURA

[1] *K. Havlíček:* Sur les surfaces enveloppes de sphères. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, *74*, Praha 1949, 21—40.

[2] *K. Havlíček:* Каналовые линейчатые поверхности. Чехословацкий математический журнал. Т. *1* (*76*), Praha 1951, 213—224; francouzský překlad: Surfaces réglées qui sont enveloppes de sphères, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. *1* (*76*), Praha 1951, 187—197.

[3] *В. Ф. Каган:* Основы теории поверхностей I, огиз, Москва, 1941.