Alexander Doktor; Jindřich Nečas; Rudolf Švarc

Poznámka k aplikacím Laplaceovy transformace na abstraktní diferenciální rovnice parabolického typu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 101 (1976), No. 1, 7--19

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108689

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

POZNÁMKA K APLIKACÍM LAPLACEOVY TRANSFORMACE NA ABSTRAKTNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PARABOLICKÉHO TYPU

Alexander Doktor, Jindřich Nečas, Rudolf Švarc, Praha

(Došlo dne 27. prosince 1973)

ÚVOD

O Laplaceově transformaci reálných funkcí již byla napsána řada publikací a učebnic, např. [1], [2], [3], [4], [5] popřípadě [6], kde lze nalézt odkazy na další literaturu. Použití Laplaceovy transformace při řešení diferenciálních rovnic je poměrně jednoduché a často se dobře hodí i v praktických úlohách techniky a při konkrétních výpočtech. Přitom, jak ukážeme v dalším textu, má Laplaceova transformace blízký vztah k definici slabého řešení parciálních diferenciálních rovnic, se kterou pracují moderní metody.

Laplaceovu transformaci lze dále přirozeným způsobem rozšířit na funkce s hodnotami v Hilbertově prostoru. Při řešení evolučních rovnic (např. rovnice parabolické) je pak možné pomocí tohoto zobecnění výhodně používat známé věty z funkcionální analýzy, nebo teorie diferenciálních rovnic eliptického typu. Výsledky dosažené touto metodou přitom odpovídají výsledkům dosaženým jiným způsobem, např. pomocí teorie analytických pologrup.

Přes uvedené výhody ustoupila Laplaceova transformace v poslední době do pozadí a proto si dovolujeme v této poznámce předložit čtenáři několik příkladů na její použití. Zároveň zde stručně vybudujeme již zmíněné zobecnění Laplaceovy transformace, které sice není složité, ale běžná dostupná literatura se o něm nezmiňuje.

LAPLACEOVA TRANSFORMACE ABSTRAKTNÍCH FUNKCÍ

Laplaceova transformace $\hat{u}$ reálné funkce $u \in L_{1,\mathrm{loc}}\langle 0, \infty)$ je definována integrálem

$$(1) \qquad \hat{u}(p) \equiv \int_0^\infty e^{-pt} u(t)\,\mathrm{d}t \equiv \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-pt} u(t)\,\mathrm{d}t$$

a lze ji výhodně použít při řešení některých úloh pro diferenciální rovnice (viz např.

[2], [3]). Například úloha

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)\,, \quad x \in (0, 1)\,, \quad t > 0\,,$$
$$u(x, 0) = 0\,, \quad u(0, t) = 0\,, \quad u(1, t) = h(t)$$

má řešení

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \hat{h}(p) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{(p)}\,.\, x}{\operatorname{sh} \sqrt{p}} e^{pt} \,\mathrm{d}p\,, \quad \sigma > 0\,.$$

Přirozeným zobecněním je definice Laplaceovy transformace pro abstraktní funkci u (tj. zobrazení s hodnotami v Hilbertově prostoru) a její použití na řešení abstraktní diferenciální rovnice, která zahrnuje jako speciální případ např. parabolické rovnice ve více proměnných.

Mějme tedy komplexní Hilbertův prostor H se skalárním součinem $(.\,,\,.)$ a normou $\|\cdot\|$ a dále abstraktní funkci $u : (0, \infty) \mapsto H$ takovou, že $u \in L_2(0, \infty; H)$, tj. takovou že $\int_0^\infty \|u(t)\|^2 \,\mathrm{d}t < \infty$.

Pro $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > 0$ pak Laplaceovu transformaci $\hat{u}$ funkce u definujeme vztahem (1), kde ovšem nyní všechny integrály bereme v Bochnerově smyslu. Připomeňme proto nejprve stručně definici a základní vlastnosti Bochnerova integrálu (viz např. [7], [8]).

Je-li $f : (a, b) \mapsto H$ jednoduchá funkce, tj. funkce tvaru $f(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(t)\,.\,c_i$, kde $c_1, \ldots, c_n \in H$ a $B_i \subset (a, b)$ jsou měřitelné navzájem disjunktní množiny konečné Lebesgueovy míry, definujeme její Bochnerův integrál vztahem

$$\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t \equiv \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)\,.\,c_i \in H$$

(μ budiž Lebesgueova míra v $\mathbb{R}$).

Zobrazení $f : (a, b) \mapsto H$ se nazývá silně měřitelná funkce, jestliže existuje posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých funkcí taková, že $\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\| = 0$ pro skoro všechna t. Je-li f silně měřitelná funkce, je reálná funkce $\|f(\cdot)\|$ lebesgueovsky měřitelná. Platí-li pro silně měřitelnou funkci dále $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|f_n(s) - f(s)\| \,\mathrm{d}s = 0$, existuje $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t) \,\mathrm{d}t$ a je nezávislá na volbě posloupnosti $\{f_n\}$. Můžeme pak definovat Bochnerův integrál funkce f vztahem

$$\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t \equiv \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t) \,\mathrm{d}t\,,$$

kde f_n jsou příslušné jednoduché funkce. Takto zavedený Bochnerův integrál je tedy prvkem prostoru H a platí pro něj důležitá Bochnerova věta:

Věta (Bochnerova). *Silně měřitelná funkce* $f : (a, b) \mapsto H$ *má Bochnerův integrál právě když reálná funkce* $\|f(\cdot)\|$ *má konečný Lebesgueův integrál. Pak navíc platí*

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqq \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t\,.$$

Nyní tedy už máme výrazu (1) připsán smysl i pro funkci u s hodnotami v prostoru H a díky omezení na $u \in L_2(0, \infty; H)$ příslušné integrály konvergují (pro $\mathrm{Re}\, p > 0$); tedy $\hat{u}$ je zobrazení

$$\hat{u} : \{p \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, p > 0\} \mapsto H\,.$$

Zřejmě $\hat{u}$ je holomorfní funkce, tj. pro každé $v \in H$ je funkce $(\hat{u}(\cdot), v)$ holomorfní v běžném smyslu.

Takto zavedená Laplaceova transformace má známý algebraický vztah k derivaci:

Tvrzení 1. *Nechť funkce* $u \in L_2(0, \infty; H)$ *má slabou derivaci* u' (*tj. existuje funkce* $u' \in L_{1,\mathrm{loc}}(0, \infty; H)$ *taková, že*

$$\int_a^b u'(t)\,\mathrm{d}t = u(b) - u(a)$$

pro každé $0 < a < b$). *Buď také* $u' \in L_2(0, \infty; H)$. *Pak platí*

$$\widehat{u'}(p) = p\,\hat{u}(p) - u(0)\,. \tag{2}$$

(*Hodnota* $u(0)$ *má zde smysl, protože v našem případě je i* $u \in C(\langle 0, \infty); H)$; *je totiž zřejmě*

$$\|u(t) - u(s)\| \leqq \left| \int_s^t \|u'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau \right| \leqq |t - s|^{1/2} \left(\int_0^\infty \|u'(\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau \right)^{1/2}.)$$

Dále platí rovnost

$$\frac{1}{2\pi} \sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{u}(\sigma + i\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty \|u(t)\|^2\,\mathrm{d}t\,, \tag{3}$$

vztah pro inverzní transformaci

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} \frac{\hat{u}(p)}{p}\, e^{pt}\,\mathrm{d}p = \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{pro} \quad t \geqq 0\,, \tag{4}$$
$$= 0 \quad \text{pro} \quad t < 0$$

a následující tvrzení o reprezentaci pro Laplaceovu transformaci:

Věta 2. *Buď $U \in \{p \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Re} p > 0\} \mapsto H$. Pak nutná a postačující podmínka pro to, aby U byla Laplaceovou transformací originálu $u \in L_2(0, \infty; H)$ je, aby U byla holomorfní a*

$$\sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|U(\sigma + i\tau)\|^2 \, d\tau < \infty\,.$$

APLIKACE LAPLACEOVY TRANSFORMACE NA ABSTRAKTNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Uvažujme nyní dva komplexní Hilbertovy prostory V, H takové, že $V \subset H$ algebraicky a topologicky (tj. existuje konstanta $c_1 > 0$ taková, že $\|v\|_H \leqq c_1 \|v\|_V$ pro každé $v \in V$) a přitom V je hustý v H ($\overline{V} = H$). Označme $\tilde{V}$ prostor všech funkcionálů na V které jsou spojité a antilineární, tj. pro $\phi \in \tilde{V}$ platí $\langle \phi, v + w \rangle = \langle \phi, v \rangle + \langle \phi, w \rangle$, $\langle \phi, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle \phi, v \rangle$, $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ($\langle \phi, v \rangle$ značíme hodnotu funkcionálu ϕ na prvku v).

Laplaceovy transformace použijeme k řešení této abstraktní diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = f(t)\,, \quad t > 0 \tag{5}$$

s počáteční podmínkou

$$u(0) = u_0\,, \tag{6}$$

kde $f : (0, \infty) \mapsto H$ a $A : V \mapsto \tilde{V}$ je omezený lineární operátor ($A \in \mathscr{L}(V, \tilde{V})$).

Jako model k tomuto abstraktnímu případu si můžeme představovat tuto smíšenou úlohu pro parabolickou rovnici druhého řádu: pro omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ volíme $H = L_2(\Omega)$, $V = W_0^{1,2}(\Omega)$ (prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ je definován jako uzávěr množiny $\mathscr{D}(\Omega)$ v prostoru $W^{1,2}(\Omega)$, tj. v normě $\|f\|_{1,2} \equiv \|f\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial f / \partial x_i\|_{L_2(\Omega)}$). Pro funkce $a_{i,j} \in L_\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \ldots, N$ pak operátor A definujeme předpisem

$$\langle Aw, v \rangle \equiv \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}(x) \, \mathrm{d}x\,, \quad w, v \in W_0^{1,2}(\Omega)\,. \tag{7}$$

($\bar{v}$ označujeme funkci komplexně sdruženou k v). Pak abstraktní úloha (5), (6) neznamená nic jiného než hledání tzv. slabého nebo zobecněného řešení úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f(x, t)\,, \quad x \in \Omega\,, \quad t > 0\,, \tag{8}$$

$$u(x, 0) = u_0(x)\,, \quad x \in \Omega\,, \tag{9}$$

$$u(x, t) = 0\,, \quad x \in \partial\Omega\,, \quad t > 0\,. \tag{10}$$

Zobecněným řešením úlohy (8)–(10) ve smyslu testovacích funkcí rozumíme funkci $u \in L_2(0, \infty; W_0^{1,2}(\Omega))$ takovou, že je splněna integrální identita

$$(11) \qquad \int_0^\infty \int_\Omega \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - \int_\Omega u_0(x) \, \varphi(x, 0) \, \mathrm{d}x = $$
$$= \int_0^\infty \int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

pro všechny tzv. testovací funkce φ z nějakého prostoru V, jehož volba zaručuje, že pro klasické řešení (tj. $u \in C^2(\bar{\Omega} \times \langle 0, \infty))$) úlohy (8)–(10) platí (11) a naopak pro dosti hladké zobecněné řešení jsou splněny rovnice (8)–(10).

Vraťme se k abstraktní úloze (5), (6). Formální použití Laplaceovy transformace na funkci $u : \langle 0, \infty) \mapsto V$ nám rovnici (5) a počáteční podmínku (6) převede na rovnici

$$(12) \qquad p \, \hat{u}(p) - u_0 + A \, \hat{u}(p) = \hat{f}(p) \, .$$

Tohoto vztahu také použijeme k definici slabého řešení ve smyslu Laplaceovy transformace:

Definice 3. Buď $f \in L_2(0, \infty; H)$, $u_0 = 0$. Řekneme, že úloha (5), (6) má slabé řešení, jestliže existuje funkce $U : \{p \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, p > 0\} \mapsto V$, která je holomorfní a taková, že platí

$$(13) \qquad (p \, U(p), v)_H + \langle A \, U(p), v \rangle = (\hat{f}(p), v)_H \quad \text{pro} \quad v \in V ,$$

$$(14) \qquad \sup_{\sigma > 0} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \|U(\sigma + i\tau)\|_V^2 \, \mathrm{d}\tau < \infty \, .$$

Nerovnost (14) nám zaručuje existenci funkce $u \in L_2(0, \infty; V)$ takové, že $\hat{u}(p) = U(p)$. Tímto u pak rozumíme slabé řešení.

Poznámka 4. Uvědomíme-li si význam rovnice (13) a definici Laplaceovy transformace např. ve speciálním případě (8)–(10), vidíme, že použití Laplaceovy transformace lze chápat jako použití speciálních testovacích funkcí tvaru $\varphi(x, t) = e^{-pt} \, v(x)$, $v \in V$ při definici zobecněného řešení ve smyslu testovacích funkcí.

Definice 3 nám umožnila se zbavit derivace a další výsledky lze očekávat od podrobnějšího zkoumání operátoru A, tj. v podstatě od řešení eliptických diferenciálních rovnic.

Věta 5. *Nechť platí*

$$(15) \qquad \exists c_2 > 0 \quad \forall u \in V : \mathrm{Re} \langle Au, u \rangle \geqq c_2 \|u\|_V^2 ,$$

a buď $u_0 = 0$. Potom existuje právě jedno slabé řešení úlohy (5), (6).

Důkaz. Z (15) (tzv. V-elipticita operátoru A) snadno dostaneme

$$\left|(pu, u)_H + \langle Au, u\rangle\right| \geqq c_2\|u\|_V^2, \quad u \in V, \quad \operatorname{Re} p > 0 .$$

Můžeme tedy použít Laxovu-Milgramovu větu (viz např. [8]):

Věta (Laxova-Milgramova). *Budiž $S(u, v)$ sesquilineární forma definovaná na Hilbertově prostoru H (tj. zobrazení $S : H \times H \mapsto \mathbb{C}$ lineární v první a antilineární ve druhé proměnné: $S(u, v + w) = S(u, v) + S(u, w)$, $S(u, \lambda v) = \bar{\lambda}\, S(u, v)$), která je spojitá a splňuje podmínku*

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall v \in H : \left|S(v, v)\right| \geqq \alpha\|v\|_H^2 .$$

Pak ke každému spojitému lineárnímu funkcionálu ϕ na H existuje právě jeden prvek $u \in H$ tak, že platí

$$\phi(v) = S(v, u)\,, \quad \forall v \in H\,,$$

přičemž $\|u\|_H \leqq (1/\alpha)\,\|\phi\|_{H^*}$.

Podle této věty pro každé $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > 0$ existuje $U(p) \in V$ jež je řešením rovnice (13) a zároveň je vidět jednoznačnost řešení.

Zbylé vlastnosti funkce U pak plynou z toho, že rezolventa

$$R(p) \equiv (pI - A)^{-1} : \tilde{V} \mapsto V$$

je holomorfní operátorová funkce, $\|R(p)\| \leqq 1/c_2$.

Poznámka 7. Podmínka (15) je ve speciální úloze (8)–(10) splněna, požadujeme-li elipticitu koeficientů a_{ij}, tj. platí-li:

$$\exists c_3 > 0 \ \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{C}^N \ \forall \text{s.v. } x \in \Omega : \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\, \xi_i \bar{\xi}_j \geqq c_3 \sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^2 .$$

Poznámka 8 (o regularitě „v prostoru“). Máme-li ještě další dva Hilbertovy prostory $H_1 \subset V$, $H_2 \subset V$ a zjistíme-li, že rezolventa $R(p)$ jako operátor z H_2 do H_1 je holomorfní zobrazení omezené pro $\operatorname{Re} p > 0$, můžeme ve vztahu (14) uvažovat normu v H_1 a dostaneme řešení $u \in L_2(0, \infty; H_1)$.

V našem konkrétním modelu (8)–(10) můžeme např. brát $H_2 = L_2(\Omega)$, $H_1 = W^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$, v případě hladké oblasti a koeficientů vidíme, že jde o regularitu eliptické diferenciální rovnice.

Poznámka 9 (o regularitě v čase). Máme-li navíc $f' \in L_2(0, \infty; H_2)$, $f(0) = 0$, je

$$\sup_{\operatorname{Re} p > 0} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |p|^2)\, \|\hat{f}(\sigma + i\tau)\|_{H_2}^2 \,\mathrm{d}\tau < \infty\,,$$

odkud

$$\sup_{\operatorname{Re} p > 0} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |p|^2) \|\hat{u}(\sigma + i\tau)\|_{H_1}^2 \, d\tau < \infty ,$$

takže je $u' \in L_2(0, \infty; H_1)$, tedy také $u \in C(\langle 0, \infty); H_1)$, má smysl $u(0)$ a je $u(0) = u_0 = 0$.

Podobně můžeme uvažovat vyšší derivace.

Poznámka 10 (o splnění původní rovnice). Předpokládejme, že o operátoru A dále platí

$$\operatorname{Im} \langle Au, u \rangle \leqq c_4 \|u\|_H^2 \;\; \forall u \in V . \tag{16}$$

Dosadíme-li do (13) speciálně $v = \hat{u}(p)$, dostaneme

$$\sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |p|^2) \|\hat{u}(\sigma + i\tau)\|_H^2 \, d\tau \leqq c \sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{f}(p)\|_H^2 \, dp .$$

Odtud $u' \in L_2(0, \infty; H)$ $(u(0) = 0)$, takže $u' \in L_2(0, \infty; \tilde{V})$, a tedy pro s.v. $t \in (0, \infty)$ je ve smyslu $\tilde{V}$ splněna původní rovnice (5).

Doposud jsme se zabývali případem $A \in \mathscr{L}(V; \tilde{V})$. Uvažujme nyní operátor

$$B : \mathbb{D}(B) \subset V \to H$$

obecně neomezený, ale uzavřený s hustým definičním oborem $(\overline{\mathbb{D}(B)} = H)$.

Na $\mathbb{D}(B)$ zavádíme normu grafu, indukovanou skalárním součinem

$$(u, v)_{\mathbb{D}(B)} = (u, v)_V + (Bu, Bv)_H , \quad u, v \in V ,$$

při které je $\mathbb{D}(B)$ díky uzavřenosti B úplný.

Modifikujme nyní pro tento případ definici řešení:

Definice 11. Buď $f \in L_2(0, \infty; H)$, $u_0 \in \mathbb{D}(B)$. Řekneme, že úloha $u' + Bu = f$, $u(0) = u_0$ má slabé řešení ve smyslu Laplaceovy transformace, jestliže existuje funkce $U : \{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p > 0\} \mapsto U(p) \in \mathbb{D}(B)$ holomorfní pro $\operatorname{Re} p > 0$ taková, že

$$p\, U(p) - u_0 + B\, U(p) = \hat{f}(p) , \quad \forall \operatorname{Re} p > 0 , \tag{17}$$

$$\sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|U(\sigma + i\tau)\|_{\mathbb{D}(B)}^2 \, d\tau < \infty . \tag{18}$$

Existuje tedy $u \in L_2(0, \infty; \mathbb{D}(B))$ taková, že $\hat{u}(p) = U(p)$; slabým řešením míníme tuto funkci u.

Nyní dostaneme větu (s jistou modifikací) jako v [6]:

Věta 12. *Nechť platí*

$$\exists c_5 > 0\, \forall \operatorname{Re} p > 0 : \|(pI + B)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H;H)} \leqq \frac{c_5}{1 + |p|}\,. \tag{19}$$

Potom pro každé $u_0 \in \mathbb{D}(B)$ existuje právě jedno slabé řešení úlohy $u' + Bu = f$, $u(0) = u_0$.

Důkaz. Nerovnost (19) zaručuje, že

$$\|(pI + B)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H;\mathrm{D}(B))} \leqq c\,.$$

Položíme-li v případě $u_0 = 0$

$$U(p) = (pI + B)^{-1} \hat{f}(p)\,,$$

dostaneme z předchozí nerovnosti příslušné vlastnosti U. Pro $u_0 \neq 0$, $u_0 \in \mathbb{D}(B)$ pak stačí využít toho, že funkce $u_0 e^{-t}$ je partikulární řešení.

Poznámka 13. Podmínka (19) je splněna např. platí-li: B je samoadjungovaný a

$$\exists c_6 > 0\ \forall u \in \mathbb{D}(B) : (Bu, u)_H \geqq c_6 \|u\|_H^2\,.$$

Nerovnost (19) s $c_5 \leqq 1$, uvažovaná jen pro p přirozená, je podle Hilleho-Yosidovy věty (viz [8]) nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby operátor $-B$ byl infinitesimálním generátorem pologrupy neexpanzivních operátorů $\{T(t)\}_{t \geqq 0} \subset \mathscr{L}(H; H)$. (Pak pro každé $u_0 \in \mathbb{D}(B)$ je funkce $u(t) = T(t)\, u_0$ $C^{(1)}$ – řešením úlohy $u' + Bu = 0$, $u(0) = u_0$.)

Platnost (19) pro $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > 0$ (s obecnou konstantou c_5) pak zaručuje dokonce existenci holomorfní operátorové pologrupy s infinitesimálním generátorem $-B$.

DODATEK

Důkaz tvrzení 1. Jelikož $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = u'$ s.v. v $(0, \infty)$, plyne vztah (2) z věty o integraci per partes (vzhledem k předpokladům je funkce u absolutně spojitá).

Důkaz rovnosti (3). Pro funkci $g \in L_2(\mathbb{R}, H)$ můžeme běžným způsobem zavést její Fourierovu transformaci $\tilde{g} \in L_2(\mathbb{R}, H)$; pro $g \in L_2(\mathbb{R}, H) \cap L_1(\mathbb{R}, H)$ je definována předpisem

$$\tilde{g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\tau} g(t)\,\mathrm{d}t\,;$$

protože $L_2(\mathbb{R}, H) \cap L_1(\mathbb{R}, H)$ je hustý v $L_2(\mathbb{R}, H)$ a platí Parsevalova rovnost, lze tento předpis rozšířit na $L_2(\mathbb{R}, H)$. Důkaz Parsevalovy rovnosti pro reálné funkce je uveden např. v [4], [9] a lze jej snadno zobecnit na náš případ. Platí tedy: Jsou-li $g, h \in L_2(\mathbb{R}, H)$, pak

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{g}(t), \tilde{h}(t))\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} (g(t), h(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

Položme nyní $u(t) = 0$ pro $t < 0$. Pak se snadno ověří, že

$$\hat{u}(\sigma + i\tau) = \widetilde{(e^{-\sigma t}\,u(t))}\,(\tau)$$

pro $\sigma > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$. Nyní podle Parsevalovy rovnosti

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{u}(\sigma + i\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau = \int_{0}^{\infty} \|e^{-\sigma t}\,u(t)\|^2\,\mathrm{d}t\,,$$

tedy stačí dokázat, že

$$\sup_{\sigma>0}\int_{0}^{\infty} \|e^{-\sigma t}\,u(t)\|^2\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} \|u(t)\|^2\,\mathrm{d}t\,,$$

avšak k tomu zřejmě stačí, aby

$$\lim_{\sigma\to 0+}\int_{0}^{\infty} e^{-2\sigma t}\|u(t)\|^2\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} \|u(t)\|^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Tato rovnost ale vyplývá z věty o Lebesgueově integrálu závislém na parametru, jejíž předpoklady lze snadno ověřit (za integrabilní majorantu lze vzít přímo $\|u(t)\|^2$).

Důkaz věty 2 pro reálné funkce je uveden např. v [4], důkaz dodatku v [2]. Nechť $\sup\limits_{\sigma>0}\int_{-\infty}^{\infty} \|U(\sigma + i\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau = A < +\infty$. Nejprve potřebujeme dokázat, že pro každé $\delta > 0$ je U omezená na množině $\{p \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,p \geqq \delta\}$. Zvolme tedy takové δ. Nechť $0 < \varrho < \delta$. Pak pro $p \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,p \geqq \delta$ je podle Cauchyovy věty, jejíž platnost pro holomorfní funkce s hodnotami v Hilbertově prostoru H lze snadno ověřit,

$$U(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varrho(p)} \frac{U(z)}{z - p}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} U(p + \varrho e^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

tedy

$$\tfrac{1}{2}\delta^2\|U(p)\| = \left(\int_0^\delta \varrho \, d\varrho\right)\|U(p)\| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 0,2\pi\rangle \times \langle 0,\delta\rangle} \|U(p + \varrho e^{i\varphi})\| \, \varrho \, d\varphi \, d\varrho =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma + i\tau - p| \leqq \delta} \|U(\sigma + i\tau)\| \, d\sigma \, d\tau \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma - \operatorname{Re} p| \leqq \delta}\left(\int_{|\tau - \operatorname{Im} p| \leqq \delta} \|U(\sigma + i\tau)\| \, d\tau\right) d\sigma \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma - \operatorname{Re} p| \leqq \delta}\left(\int_{|\tau - \operatorname{Im} p| \leqq \delta} \|U(\sigma + i\tau)\|^2 \, d\tau \int_{|\tau - \operatorname{Im} p \leqq \delta|} d\tau\right)^{1/2} d\sigma \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma - \operatorname{Re} p| \leqq \delta} (A \, . \, 2\delta)^{1/2} \, d\sigma = \frac{(A \, . \, 2\delta)^{1/2} \, . \, 2\delta}{2\pi},$$

odkud

$$\|U(p)\| \leqq \frac{2}{\pi}\left(\frac{2A}{\delta}\right)^{1/2}.$$

Položme pro $x \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$$\phi(x, \sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\sigma + i\tau) \frac{1}{(\sigma + i\tau)^2} e^{(\sigma + i\tau)x} \, d\tau \,. \tag{20}$$

Zvolme pevně $x \in \mathbb{R}$. Nechť $\sigma > 0$, $\vartheta > \sigma$. Ukážeme, že $\phi(x, \sigma) = \phi(x, \vartheta)$. Pro každé $a > 0$ definujeme

$$K_a = \{p; \ \operatorname{Re} p \in \langle \sigma, \vartheta \rangle, \ \operatorname{Im} p = a \text{ nebo } \operatorname{Im} p = -a\},$$

$$M_a = \{p; \ \operatorname{Re} p = \sigma \text{ nebo } \operatorname{Re} p = \vartheta, \ \operatorname{Im} p \in \langle -a, a \rangle\},$$

zorientujeme-li nyní křivku $\Gamma_a = K_a \cup M_a$, je

$$\int_{\Gamma_a} U(p) \, p^{-2} e^{px} \, dp = 0$$

neboť Γ_a je uzavřená křivka a integrand je holomorfní v $\{p; \ \operatorname{Re} p > 0\}$. Podle předchozího existuje $B > 0$ tak, že $\|U(p)\| \leqq B$ na $\{p; \ \operatorname{Re} p \geqq \sigma\}$. Dále

$$\|\phi(x, \vartheta) - \phi(x, \sigma)\| \leqq \lim_{a \to \infty} \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{K_a} U(p) \, p^{-2} e^{px} \, dp\right\| \leqq$$

$$\leqq \frac{B}{2\pi} \, . \lim_{a \to \infty} \int_{K_a} |p^{-2} e^{px}| \, dp \leqq \frac{B}{2\pi}(e^{\sigma x} + e^{\vartheta x}) \lim_{a \to \infty} \int_\sigma^\vartheta \frac{1}{\lambda^2 + a^2} \, d\lambda \leqq$$

$$\leqq \frac{B}{2\pi}(e^{\sigma x} + e^{\vartheta x}) \, . \lim_{a \to \infty} \frac{\pi}{a} = 0 \,.$$

Je tedy $\phi(x, \sigma)$ konstantní podle σ a lze psát $\phi(x, \sigma) = \phi(x)$. Nechť $x < 0$, $\sigma > 0$, $a > 0$, $\|U\| \leqq B$ pro $\operatorname{Re} p > \sigma$. Pak podle Cauchyovy věty

$$\left\| \int_{\sigma - ia}^{\sigma + ia} U(p)\, p^{-2} e^{px} \, \mathrm{d}p \right\| = \frac{1}{r} \left\| \int_{-\theta}^{\theta} U(re^{i\varphi}) \exp\left(xre^{i\varphi} - i\varphi\right) \mathrm{d}\varphi \right\| \leqq$$

$$\leqq \frac{B}{r} \int_{-\theta}^{\theta} \exp\left(xr \cos \varphi\right) \mathrm{d}\varphi \leqq \frac{B\pi}{r},$$

integrovali jsme po křivce $p = re^{i\varphi}$, $\operatorname{Re} p > \sigma$, $r^2 = \sigma^2 + a^2$, $|\varphi| \leqq \theta < \pi$. Odtud

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} U(p)\, p^{-2} e^{px} \, \mathrm{d}p = 0 ,$$

tedy $\phi(x) = 0$ pro $x < 0$.

Pro $\sigma > 0$ je podle Hölderovy nerovnosti $U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-1} \in L_1(\mathbb{R})$. (20) lze zřejmě derivovat a derivace je záměnná s integrálem, takže

$$\phi'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-1} e^{(\sigma + i\tau)x} \, \mathrm{d}\tau . \tag{21}$$

Funkce ϕ' je spojitá v $\mathbb{R}$ a podle předchozího je $\phi'(x) = 0$ pro $x < 0$, tedy $\phi'(x) = 0$ pro $x \leqq 0$. (21) lze opět derivovat a

$$\phi''(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sigma + i\tau)\, e^{(\sigma + i\tau)x} \, \mathrm{d}\tau$$

je spojitá na $\mathbb{R}$, tedy $\phi'' \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Dále

$$\phi(x) = \int_0^x \left(\int_0^y \phi''(z) \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y . \tag{22}$$

Pro $\sigma > 0$ je z (20)

$$e^{-\sigma x} \phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sigma + i\tau)\,(\sigma + i\tau)^{-2} e^{i\tau x} \, \mathrm{d}\tau .$$

Protože $U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-2} \in L_2(\mathbb{R})$, je

$$\lim_{a \to \infty} \left\| \int_{-a}^{a} e^{-\sigma x} \phi(x)\, e^{-i\tau x} \, \mathrm{d}x - U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-2} \right\|_{L_2} = 0$$

(podle věty o inverzní Fourierově transformaci). Integrál určující $\hat{\Phi}(\sigma + i\tau)$ konverguje, tedy $\hat{\Phi}(\sigma + i\tau) = U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-2}$ a jako v důkazu (2) je

$$\int_0^\infty \phi''(x)\, e^{-px}\, dx = p^2 \hat{\Phi}(p) = p^2\, U(p)\, p^{-2} = U(p)\,.$$

Dokážeme-li, že $\phi'' \in L_2(\mathbb{R})$, je ϕ'' podle předchozího hledanou funkcí a $U(p) = \widehat{\phi''}(p)$, $\operatorname{Re} p > 0$. Dokázali jsme, že $\phi'' \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, ale z věty o integraci per partes je

$$\int_0^\infty \phi''(x)\, e^{-\sigma x}\, dx = \sigma \int_0^\infty \phi'(x)\, e^{-\sigma x}\, dx\,,$$

neboť ϕ' je z $L_1(\mathbb{R})$ a je spojitá, takže $\phi'' \in L_1(\mathbb{R})$ a podle Parsevalovy rovnosti

$$\text{(23)} \qquad \int_{-\infty}^\infty \|U(\sigma + i\tau)\|^2\, d\tau = 2\pi \int_{-\infty}^\infty \|\widehat{(\phi''(x)\, e^{-\sigma x})}(\tau)\|^2\, d\tau =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^\infty \|\phi''(x)\|^2\, e^{-2\sigma x}\, dx\,,$$

z toho ovšem vyplývá, že $\phi'' \in L_2(\mathbb{R})$.

Nechť $u \in L_2(0, \infty; H)$, $\sigma > 0$. Položme $u(x) = 0$ pro $x < 0$. Pak

$$\int_0^\infty \|u(x)\|\, e^{-\sigma x}\, dx \leqq \left(\int_0^\infty \|u(x)\|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty e^{-2\sigma x}\, dx\right)^{1/2} < +\infty\,,$$

takže

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma + i\tau)x}\, u(x)\, dx$$

je absolutně konvergentní v $\sigma + i\tau$ pro všechna $\tau \in \mathbb{R}$ a $\hat{u}$ je holomorfní na $\{p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} p > 0\}$. Obdobně jako v (23)

$$\sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^\infty \|\hat{u}(\sigma + i\tau)\|^2\, d\tau = \sup_{\sigma > 0} 2\pi \int_{-\infty}^\infty \|u(x)\|^2\, e^{-2\sigma x}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^\infty \|u(x)\|^2\, dx < +\infty\,.$$

V první části jsme ukázali, že

$$\phi'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty U(\sigma + i\tau)(\sigma + i\tau)^{-1}\, e^{(\sigma + i\tau)x}\, d\tau\,,$$

ale $\phi''(x) = u(x)$, neboť z (3) plyne: $\hat{u} = 0 \Rightarrow u = 0$ s. v. Tedy platí dodatek.

Literatura

[1] *S. Bochner, K. Chandrasekharan:* Fourier Transforms. Princeton 1949.
[2] *G. Doetsch:* Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Springer-Berlin 1937.
[3] *J. J. Tranter:* Integral transforms in mathematical physics. (Ruský překlad: Moskva 1956)
[4] *J. Kučera, Š. Schwabik:* Integrální transformace. (Skripta.) Praha 1969.
[5] В. И. Кузнецов, В. А. Диткин: Справочник по операционному исчислению. Основы теории и таблицы формул. Москва 1951.
[6] *J. L. Lions, E. Magenes:* Problémes aux limites non homogénes et applications II. Paris 1968.
[7] *S. Fučík, O. John, A. Kufner:* Prostory funkcí I. (Integrovatelné funkce.) (Skripta.) Praha 1974.
[8] *K. Yosida:* Functional Analysis. Springer 1965.
[9] *S. Bochner:* Vorlesungen über Fourierische Integrale. Leipzig 1932.

Adresy autorů: A. Doktor, 113 82 Praha 1, Jungmanovo nám. 8 (Výzkumný ústav mechanizace, automatizace a technologie výroby stavebních dílců), J. Nečas a R. Švarc, 118 00 Praha 1, Malostranské n. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

Summary

A REMARK TO APPLICATIONS OF THE LAPLACE TRANSFORM TO ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

ALEXANDER DOKTOR, JINDŘICH NEČAS, RUDOLF ŠVARC, Praha

The solution of abstract linear differential equation $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t + Au(t) = f(t)$ with initial condition $u(0) = u_0$ is obtained by means of the Laplace transform of functions with values in Hilbert spaces. This generalization of the Laplace transform is briefly built up in the Appendix. Existence theorems proved by this method correspond to those obtained by another methods, e.g. by means of theory of analytic semigroups.