Jiří Štulc; Jiří Veselý

Souvislost cyklické a radiální variace cesty s její délkou a ohybem

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 1, 80--116

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108666`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

SOUVISLOST CYKLICKÉ A RADIÁLNÍ VARIACE CESTY S JEJÍ DÉLKOU A OHYBEM

JIŘÍ ŠTULC, JIŘÍ VESELÝ, Praha

(Došlo dne 14. října 1966)

Tento článek pojednává o vlastnostech cyklické a radiální variace cesty. Shrnuje přehledně některé výsledky z citovaných prací [2]–[4] a zpracovává podrobněji výsledky ohlášené bez důkazů v [1]. Některá tvrzení, a to zejména v část 1, která má přípravný charakter, uvedeme bez důkazu s odkazem na citovanou literaturu. V části 2 je vyšetřen vztah cyklické a radiální variace cesty k její délce, části 3 je věnována studiu ohybu cesty a jeho vztahu k rotaci cesty studované RADONEM.

1. Symbolem E_k budeme označovat euklidovský k-rozměrný prostor s obvyklou normou, kterou budeme značit $|\ldots|$. Budeme převážně pracovat v E_2, který ztotožňujeme s rovinou komplexních čísel. Základní pojmy a označení z teorie komplexních čísel a funkcí jsou užívány v běžném smyslu. Pod pojmem cesta budeme rozumět spojité zobrazení (omezeného) intervalu J do E_k; obraz intervalu J při tomto zobrazení budeme nazývat grafem cesty. Pro $k = 1$ budeme místo cesta obvykle říkat funkce. Je-li ψ cesta definovaná na intervalu J, definujeme

$$\text{(1.1)} \qquad \operatorname{var}_\psi [J] = \sup \sum_{j=1}^{n} |\psi(b_j) - \psi(a_j)| ,$$

kde supremum bereme přes všechny konečné systémy kompaktních nepřekrývajících se intervalů $\langle a_j, b_j \rangle \subset J$, $j = 1, \ldots, n$. Bude-li to z typografických důvodů vhodné, použijeme označení $\operatorname{var} [\psi; J]$ místo $\operatorname{var}_\psi [J]$. Řekneme, že ψ je cesta konečné délky, je-li $\operatorname{var}_\psi [J] < +\infty$. Dělením D intervalu J nazýváme každou konečnou množinu navzájem různých bodů z intervalu J, jejichž souřadnice jsou uspořádány podle velikosti, tj.

$$D = \{t_j\}_{j=0}^{n} = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_n\} , \quad t_j \in J , \quad j = 1, \ldots, n .$$

Dělení D přiřazujeme číslo $v(D)$, definované vztahem (α, β jsou krajní body J)

$$\text{(1.2)} \qquad v(D) = \max_{1 \leq j \leq n} [t_0 - \alpha, t_j - t_{j-1}, \beta - t_n] ,$$

které nazýváme normou dělení D. V dalším nechť ψ jest cesta definovaná na intervalu J. Je-li $J = \langle a, b\rangle$ kompaktní interval a přiřadíme-li každému dělení D tvaru $D = \{a = t_0 < \ldots < t_n = b\}$ číslo

$$V_\psi(D) = \sum_{j=1}^{n} |\psi(t_j) - \psi(t_{j-1})|\,, \tag{1.3}$$

je známo, že platí

$$\operatorname{var}_\psi [\langle a, b\rangle] = \lim_{\nu(D)\to 0} V_\psi(D)\,. \tag{1.4}$$

Uvažujeme-li var_ψ jakožto funkci intervalu na systému všech intervalů obsažených v J, lze z ní Carathéodoryho metodou (viz např. [11]) získat vnější míru na systému všech podmnožin intervalu J, resp. po zúžení tohoto oboru úplnou míru, kterou budeme značit var_ψ. Je-li f funkce definována na intervalu J, $\operatorname{var}_f [J] < +\infty$, je známo, že v každém bodě $t \in J$ (se zřejmou výjimkou, týkající se krajních bodů) existují vlastní jednostranné limity $f(t+), f(t-)$. (Viz [11], str. 370.) Zavedeme-li označení

$$\psi^{-1}(z) = \{t;\, t \in J,\, \psi(t) = z\} \tag{1.5}$$

a označíme-li symbolem $N_\psi(z, M)$ počet bodů množiny

$$\psi^{-1}(z) \cap M\,, \quad M \subset J\,, \tag{1.6}$$

platí následující tvrzení ($\varkappa_1$ značí jednorozměrnou Hausdorffovu míru v E_k.):

1.1. Věta. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J, G otevřená množina v J. Potom $N_\psi(z; G)$ je $\varkappa_1$-měřitelná funkce proměnné z a platí*

$$\operatorname{var}_\psi [G] = \int_{\psi(J)} N_\psi(z; G)\, d\varkappa_1(z)\,. \tag{1.7}$$

Toto tvrzení je známo pro případ $G = J$, J kompaktní; ve speciálním případě pro reálné funkce je to tak zvaná Banachova věta. Odtud vyplývá i platnost věty ve formulaci 1.1 (viz [8]). Důsledkem této věty jsou následující jednoduchá lemmata:

1.2. Lemma. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J, H uzavřená množina v J, $\varkappa_1\, \psi(H) = 0$. Je-li γ systém všech komponent I množiny $J - \psi^{-1}(H)$, platí*

$$\sum_{I \in \gamma} \operatorname{var}_\psi [I] = \operatorname{var}_\psi [J]\,.$$

1.3. Lemma. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J, $\operatorname{var}_\psi [J] < +\infty$. Pak*

$$\operatorname{var}_\psi [M] = \int_{\psi(J)} N_\psi(z; M)\, d\varkappa_1(z)$$

pro každou množinu $M \subset J$ typu G_δ.

1.4. Lemma. *Nechť ψ je cesta konečné délky definovaná na intervalu J. Potom pro $M \subset J$ platí* $\text{var}_\psi [M] = 0$ *právě když platí* $\varkappa_1\ \psi(M) = 0$.

Důkaz viz [3], lemma 3.4.

V dalším již pracujeme stále jen s cestami v E_2. Pro cestu ψ definovanou na intervalu J a bod $z \in E_2$ budeme symbolem $\psi - z$ značit cestu φ definovanou na intervalu J předpisem

$$\varphi(t) = \psi(t) - z\,, \quad t \in J\,.$$

Pokud to bude možné, budeme používat tohoto zkráceného označení. Cestu ψ budeme nazývat uzavřenou, bude-li definována na kompaktním intervalu $\langle a, b \rangle$ a bude-li $\psi(a) = \psi(b)$. Jestliže pro každé dva různé body t_1, t_2 intervalu J, z nichž aspoň jeden je vnitřní, platí $\psi(t_1) \neq \psi(t_2)$, řekneme, že cesta ψ je jednoduchá. Graf jednoduché uzavřené cesty je tedy Jordanova křivka. Omezenou komponentu doplňku Jordanovy křivky v E_2 nazveme Jordanovou oblastí. Symboly $\text{Re}\, z$ resp. $\text{Im}\, z$ budeme značit reálnou resp. imaginární část čísla $z \in E_2$; pro $z \neq 0$ bude $\arg z$ značit množinu $\{\alpha;\ \alpha \in E_1,\ z = |z|\ e^{i\alpha}\}$. Je-li F komplexní, od nuly různá funkce na topologickém prostoru T, potom spojitou větví $\arg F$ nazýváme spojitou funkci α na prostoru T, pro kterou platí $\alpha(x) \in \arg F(x)$ pro každé $x \in T$.

1.5. Lemma. *Je-li F komplexní, od nuly různá funkce definovaná na souvislém topologickém prostoru T, α_1, α_2 spojité větve* $\arg F$ *na T, pak existuje celé číslo k tak, že platí $\alpha_1 - \alpha_2 = 2k\pi$ na T.*

Pro $\varrho \geqq 0$, $z^0 \in E_2$ budeme v dalším užívat označení

$$(1.8) \qquad K_\varrho(z^0) = \{z;\ z \in E_2,\ |z - z^0| < \varrho\}\,, \quad C_\varrho(z^0) = \{z;\ z \in E_2,\ |z - z^0| = \varrho\}\,.$$

1.6. Lemma. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J, $z^0 \in E_2$, $z^0 \notin \psi(J)$. Pak existuje spojitá větev* $\arg [\psi - z^0]$ *na J.*

1.7. Lemma. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J, G jednoduše souvislá oblast v E_2, $\psi(J) \cap G = \emptyset$. Potom existuje spojitá větev* $\arg [\psi - z]$ *na množině $J \times G$ ($t \in J$, $z \in G$).*

Důkaz stručně naznačíme: Pro $t_0 \in J$ existuje spojitá větev $\arg [\psi(t_0) - z]$ na množině G (viz [12], kapitola IV., § 3). Označme ji $\beta(z)$. Podle předešlého tvrzení existuje $\gamma_z(t)$ – spojitá větev $\arg [\psi(t) - z]$ na intervalu J; volíme ji tak, aby platilo $\gamma_z(t_0) = \beta(z)$. Položíme-li $\alpha(t, z) = \gamma_z(t)$, je α hledanou spojitou větví $\arg [\psi - z]$ na množině $J \times G$.

1.8. Lemma. *Nechť G je Jordanova oblast, $z^0 \in \bar{G}$ (uzávěr G). Potom ke každému okolí $U(z^0)$ bodu z^0 existuje Jordanova oblast G_1, pro kterou platí:*

$$G \cup \{z^0\} \subset G_1 \subset G \cup U(z^0)\,.$$

Důkaz. Pro $z^0 \in G$ stačí klást $G_1 = G$. Nechť tedy je $z^0 \in \bar{G} - G = H$ (hranice tvořená Jordanovou křivkou). Existuje homeomorfismus h zobrazující $C_1(0)$ na H, který je možno rozšířit (viz [9], kap. IX, § 54, V.) na homeomorfismus zobrazující sféru $S = E_2 \cup \{\infty\}$ na sebe. Nechť tento rozšířený homeomorfismus převádí komponentu U množiny $S - C_1(0)$ na G a nechť pro bod $\zeta \in C_1(0)$ jest $h(\zeta) = z^0$. Potom lze za G_1 klásti $G_1 = h(U \cup K_\varrho(\zeta))$, kde $\varrho > 0$ je zvoleno dostatečně malé.

1.9. Lemma. *Nechť G je Jordanova oblast, $z^0 \in \bar{G}$, ψ cesta definovaná na intervalu J, při čemž je $\psi(J) \cap (G \cup \{z^0\}) = \emptyset$. Pak existuje spojitá větev* arg $[\psi - z]$ *na množině $J \times (G \cup \{z^0\})$*

Důkaz. V případě $z^0 \in G$ se tvrzení redukuje na lemma 1.7. Nechť je tedy $z^0 \in \bar{G} - G$. Zvolme posloupnost kompaktních intervalů I_n, $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = J$, $I_n \subset I_{n+1}$. Pro všechna n je $z^0 \notin \psi(I_n)$; zvolme tedy posloupnost okolí bodu z^0 tak, aby platilo $U_n(z^0) \cap \psi(I_n) = \emptyset$ pro každé n. Podle 1.8 určíme Jordanovy oblasti G_n tak, aby platilo

$$G \cup \{z^0\} \subset G_n \subset G \cup U_n(z^0)$$

a užitím 1.7 vybereme spojité větve arg $[\psi - z]$ na množinách $I_n \times G_n$, které označíme α_n. Výběr lze provést tak, aby α_{n+1} byla rozšířením α_n z množiny $I_n \times (G \cup \{z^0\})$ na množinu $I_{n+1} \times (G \cup \{z^0\})$. Položíme-li $\alpha(t, z) = \alpha_n(t, z)$, kde n volíme tak, aby bylo $t \in I_n$, jest potom α hledanou spojitou větví arg $[\psi - z]$ na množině $I \times \times (G \cup \{z^0\})$.

1.10. Definice. Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J, $\psi(t) \neq 0$ pro $t \in J$. Nechť J je interval o krajních bodech a, b, $a < b$ (nemusí být kompaktní). Označme ϑ spojitou větev arg ψ na J. Existují-li konečné limity

$$\vartheta(a+) = \lim_{t \to a+} \vartheta(t)\,, \quad \vartheta(b-) = \lim_{t \to b-} \vartheta(t)\,, \tag{1.9}$$

definujeme

$$\Delta_t \arg [\psi(t); J] = \Delta \arg [\psi; J] = \vartheta(b-) - \vartheta(a+)\,. \tag{1.10}$$

Definovaný přírůstek arg ψ na intervalu J je zřejmě nezávislý co do existence i hodnoty na volbě spojité větve arg ϑ.

1.11. Lemma. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak funkce* Δ arg $[\psi - z; \langle a, b \rangle]$ *je harmonickou funkcí proměnné z na množině $E_2 - - \psi(\langle a, b \rangle)$.*

Důkaz viz [2], lemma 1.10. Má-li ψ konečnou délku, lze využít vztahu

$$\Delta \arg [\psi - z; \langle a, b \rangle] = \operatorname{Im} \int_a^b \frac{d\psi(t)}{\psi(t) - z}\,, \tag{1.11}$$

ze kterého též vyplývá

$$\lim_{|z| \to +\infty} \Delta \arg [\psi - z; \langle a, b\rangle] = 0 . \tag{1.12}$$

1.12. Definice. Je-li ψ uzavřená cesta definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak pro body $z \in E_2 - \psi(\langle a, b\rangle)$ definujeme

$$\operatorname{ind}_\psi z = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg [\psi - z; \langle a, b\rangle] . \tag{1.13}$$

Funkce ind_ψ nabývá pouze celočíselných hodnot a jest konstantní funkcí na každé komponentě množiny $E_2 - \psi(\langle a, b\rangle)$. Je-li ψ Jordanova křivka, nabývá ind_ψ hodnoty 0 na neomezené komponentě množiny $E_2 - \psi(\langle a, b\rangle)$, na omezené komponentě pak hodnoty 1 resp. -1; v souhlase s tím říkáme, že cesta jest kladně resp. záporně orientovaná.

1.13. Lemma. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J a nechť U je uzavřená úsečka o koncových bodech z^1, z^2 disjunktní s grafem ψ. Pak platí*

$$|\Delta \arg [\psi - z^1; J] - \Delta \arg [\psi - z^2; J]| \leqq 2\pi . \tag{1.14}$$

Důkaz viz [2], lemma 1.6.

1.14. Definice. Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J. Řekneme, že bod $\zeta \in E_2$ jest ψ-normální, je-li $\Delta \arg [\psi - \zeta; I]$ definován pro každou komponentu I množiny $J - \psi^{-1}(\xi)$ (viz (1.5)). Pak klademe

$$\bar{\Delta}_\psi(\zeta) = \sum |\arg [\psi - \zeta; I]| , \tag{1.15}$$

kde sčítáme přes všechny komponenty I množiny $J - \psi^{-1}(\zeta)$. Podobně je-li J_1 interval, $J_1 \subset J$ a ζ je ψ-normální bod, klademe

$$\bar{\Delta}_\psi(\zeta; J_1) = \sum |\Delta \arg [\psi - \zeta; I]| , \tag{1.16}$$

kde sčítáme přes všechny komponenty I množiny $J_1 - \psi^{-1}(\zeta)$.

1.15. Věta. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J, $z \in E_2 - \psi(J)$ je ψ-normální bod. Nechť C_z je množina všech ψ-normálních bodů $\zeta \in \psi(J)$, pro něž je $\{z + \tau(\zeta - z); \tau \in \langle 0, 1)\} \cap \psi(J) = \emptyset$.*

Pak je

$$|\Delta \arg [\psi - z; J]| \leqq \inf_{\zeta \in C_z} [(N_\psi(\zeta) + 1) . 2\pi + \bar{\Delta}_\psi(\zeta)] , \tag{1.17}$$

kde $N_\psi(\zeta)$ udává počet bodů množiny $\psi^{-1}(\zeta)$.

Důkaz. Zvolme $\zeta \in C_z$ tak, aby $N_\psi(\zeta) < +\infty$. Nechť $\{I_k\}_{k=1}^p$ je systém komponent množiny $J - \psi^{-1}(\zeta)$; užitím 1.13 dospíváme k odhadu $|\Delta \arg [\psi - z; J]| \leqq \leqq \sum_{j=1}^p |\arg [\psi - \zeta; I_j]| + \sum_{j=1}^p |\Delta \arg [\psi - \zeta; I_j] - \Delta \arg [\psi - z; I_j]| \leqq \bar{\Delta}_\psi(\zeta) + 2\pi p \leqq \leqq \bar{\Delta}_\psi(\zeta) + 2\pi(N_\psi(\zeta) + 1)$. Odtud přechodem k infimu obdržíme dokazovaný vztah (1.17).

1.16. Definice. Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J. Koncové body J označíme $a, b, a < b$. Pro $t \in (a, b)$ definujeme

$$\tau_\psi^+(t) = \lim_{u \to t+} \frac{\psi(u) - \psi(t)}{|\psi(u) - \psi(t)|}, \quad -\tau_\psi^-(t) = \lim_{u \to t-} \frac{\psi(u) - \psi(t)}{|\psi(u) - \psi(t)|}, \tag{1.18}$$

pokud ovšem tyto limity existují. Pokud existují příslušné limity, definujeme analogicky $\tau_\psi^+(a)$, $\tau_\psi^-(b)$. Jestliže pro bod $t \in J$ existují obě limity a jsou si rovny, označíme jejich společnou hodnotu $\tau_\psi(t)$. Platí:

1.17. Věta. *Nechť $\psi = \psi_1 + i\,\psi_2$ je cesta konečné délky definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom pro* var_ψ*-skoro všechna $t \in J$ jsou definovány symboly $\tau_\psi^+(t)$, $\tau_\psi^-(t)$ a jsou si rovny, tj. veličina $\tau_\psi(t)$ je definována* var_ψ*-skoro všude na intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li f funkce definována na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak platí*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\psi_1 = \int_a^b f \,.\, \mathrm{Re}\, \tau_\psi \,\mathrm{d}\, \mathrm{var}_\psi\,, \quad \int_a^b f \,\mathrm{d}\psi_2 = \int_a^b f \,.\, \mathrm{Im}\, \tau_\psi \,\mathrm{d}\, \mathrm{var}_\psi\,, \tag{1.19}$$

jakmile mají smysl levé strany. Speciálně pak platí

$$\psi(b) - \psi(a) = \int_a^b \tau_\psi \,\mathrm{d}\, \mathrm{var}_\psi\,. \tag{1.20}$$

Důkaz. Položme $s(a) = 0$, $s(t) = \mathrm{var}_\psi [\langle a, t\rangle]$, $t \in (a, b\rangle$. Potom $s(t)$ je spojitá neklesající funkce zobrazující interval $\langle a, b\rangle$ na jistý interval $\langle 0, L\rangle$. Je-li $u \in \langle 0, L\rangle$, je $s^{-1}(u)$ interval v $\langle a, b\rangle$, na němž je ψ konstantní. Označíme-li $\varphi(u) = \varphi_1(u) + i\,\varphi_2(u)$ hodnotu ψ na tomto intervalu, dostaneme cestu φ definovanou na intervalu $\langle 0, L\rangle$, jež má následující vlastnosti: je-li I interval, $I \subset \langle 0, L\rangle$ pak $\varkappa_1 I = \mathrm{var}_\psi [s^{-1}(I)] = \mathrm{var}_\varphi [I]$. Odtud plyne, že pro každou množinu $M \subset \langle 0, L\rangle$ platí $\varkappa_1 M = \mathrm{var}_\psi [s^{-1}(M)] = \mathrm{var}_\varphi M$. Označíme M_1 množinu těch $u \in \langle 0, L\rangle$, pro něž $\varphi'(u)$ neexistuje nebo $|\varphi'(u)| \neq 1$ a M_2 množinu všech $u \in \langle 0, L\rangle$ pro něž jest $s^{-1}(u)$ nedegenerovaný interval. Pak ale je $\varkappa_1 M_1 = 0$ (viz [10], kap. 1 № 5), $\varkappa_1 M_2 = 0$, neboť M_2 jest nejvýše spočetná množina. Platí tedy

$$\mathrm{var}_\psi [s^{-1}(M_1) \cup s^{-1}(M_2)] = 0 \tag{1.21}$$

Pro $t \notin s^{-1}(M_1) \cup s^{-1}(M_2)$ platí

$$\lim_{u \to t} \frac{\psi(u) - \psi(t)}{s(u) - s(t)} = \lim_{u \to t} \frac{\varphi(s(u)) - \varphi(s(t))}{s(u) - s(t)} = \varphi'(s(t)),$$

$$\tau_\psi^+(t) = \lim_{u \to t+} \frac{\psi(u) - \psi(t)}{|\psi(u) - \psi(t)|} = \lim_{u \to t+} \frac{\psi(u) - \psi(t)}{s(u) - s(t)} : \lim_{u \to t+} \frac{|\psi(u) - \psi(t)|}{s(u) - s(t)} =$$

$$= \varphi'(s(t)) : |\varphi'(s(t))| = \varphi'(s(t)),$$

$$\tau_\psi^-(t) = \lim_{u \to t-} \frac{\psi(t) - \psi(u)}{|\psi(u) - \psi(t)|} = \lim_{u \to t-} \frac{\psi(t) - \psi(u)}{s(t) - s(u)} : \lim_{u \to t-} \frac{|\psi(u) - \psi(t)|}{s(t) - s(u)} =$$

$$= \varphi'(s(t)) : |\varphi'(s(t))| = \varphi'(s(t)),$$

a tedy pro tato t platí $\tau_\psi(t) = \varphi'(s(t))$ (vzhledem k (1.21)) pro var_ψ-skoro všechna t z intervalu $\langle a, b\rangle$.

Nechť f jest funkce definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Definujme pro $\langle 0, L\rangle - M_2$ (kde s^{-1} je prostá funkce) funkci F předpisem $F(u) = f(s^{-1}(u))$. Pak $F(s(t)) = f(t)$ pro var_ψ-skoro všechna $t \in \langle a, b\rangle$ (resp. také pro var_{ψ_i}-skoro všechna t, $i = 1, 2$) a užitím vět o transformaci Lebesgue-Stieltjesova a Lebesgueova integrálu (viz [6], [7]) obdržíme

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}\psi_1(t) = \int_a^b F(s(t))\, \mathrm{d}\varphi_1(s(t)) = \int_0^L F(u)\, \mathrm{d}\varphi_1(u) = \int_0^L F(u)\, \varphi'(u)\, \mathrm{d}u =$$

$$= \int_a^b F(s(t))\, \varphi'(s(t))\, \mathrm{d}s(t) = \int_a^b f(t) \,.\, \mathrm{Re}\, \tau_\psi(t)\, \mathrm{d}s(t) = \int_a^b f \,.\, \mathrm{Re}\, \tau_\psi\, \mathrm{d}\, \mathrm{var}_\psi.$$

Analogicky obdržíme i druhou část (1.19). Důsledkem (1.19) je pak (1.20).
V dalším využijeme ještě následujícího tvrzení:

1.18. Lemma. *Nechť σ je neklesající funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť f je na intervalu $\langle a, b\rangle$ σ-integrovatelná. Položme $F(a) = 0$, $F(t) = \int_a^t f(u)\, \mathrm{d}\sigma(u)$ pro $t \in (a, b\rangle$. Potom platí:*

$$\mathrm{var}_F\, [\langle a, b\rangle] = \int_a^b |f(u)|\, \mathrm{d}\sigma(u).$$

Důkaz viz [10], kap. V., № 90, pozn. 1 pod čarou na str. 241.

Zavedeme ještě následující označení: nechť $z^1, z^2 \neq 0$, potom klademe

$$z^1 \circ z^2 = \mathrm{Re}\, z^1\, \mathrm{Re}\, z^2 + \mathrm{Im}\, z^1\, \mathrm{Im}\, z^2 \tag{1.22}$$

(skalární součin vektorů z^1, z^2). Jsou-li $z^1, z^2 \in E_2$, položíme

$$\text{(1.23)} \qquad \operatorname{arc}(z^1, z^2) = \arccos \frac{z^1 \circ z^2}{|z^1|\,|z^2|}$$

(velikost neorientovaného úhlu vektorů z^1, z^2). Zřejmě je $\operatorname{arc}(z^1, z^2)$ spojitou funkcí proměnných z^1, z^2. Pro $\alpha, \beta \in E_1$ platí zřejmě

$$\text{(1.24)} \qquad \operatorname{arc}(e^{i\alpha}, e^{i\beta}) \leqq |\beta - \alpha|$$

při čemž rovnost nastává právě tehdy, je-li $|\beta - \alpha| \leqq \pi$.

1.19. Lemma. *Nechť* $z^1, z^2 \in E_2$, $|z^1| = |z^2| = 1$. *Pak platí*

$$\text{(1.25)} \qquad |z^1 - z^2| \leqq \operatorname{arc}(z^1, z^2) \leqq \frac{\pi}{2}|z^1 - z^2|$$

a

$$\text{(1.26)} \qquad \lim_{|z^1 - z^2| \to 0} \frac{|z^1 - z^2|}{\operatorname{arc}(z^1, z^2)} = 1 .$$

Důkaz. Označíme-li $\alpha = \operatorname{arc}(z^1, z^2)$ je $z^1 \circ z^2 = \cos \alpha$ a (1.25) lze po úpravě přepsat do tvaru

$$\sin \frac{\alpha}{2} \leqq \frac{\alpha}{2} \leqq \frac{\pi}{2} \sin \frac{\alpha}{2},$$

jehož platnost je pro $\alpha < \pi$ zřejmá. Podobně je

$$\lim_{|z^1 - z^2| \to 0} \frac{|z^1 - z^2|}{\operatorname{arc}(z^1, z^2)} = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{2 \sin \alpha/2}{\alpha} = 1 ,$$

což bylo dokázati.

1.20. Lemma. *Pro* $z^1 \neq 0 \neq z^2$ *platí*

$$\text{(1.27)} \qquad |z^1 - z^2| \leqq \big||z^1| - |z^2|\big| + |z^1| \operatorname{arc}(z^1, z^2)$$

Důkaz. Položme $z^1 = |z^1|\, e^{i\alpha}$, $z^2 = |z^2|\, e^{i\beta}$. Podle předchozího lemmatu je

$$|z^1 - z^2| = \big||z^1|\, e^{i\alpha} - |z^1|\, e^{i\beta} + |z^1|\, e^{i\beta} - |z^2|\, e^{i\beta}\big| \leqq$$
$$\leqq |z^1|\, |e^{i\alpha} - e^{i\beta}| + \big||z^1| - |z^2|\big| \leqq |z^1| \operatorname{arc}(z^1, z^2) + \big||z^1| - |z^2|\big| ,$$

což bylo dokázati.

1.21. Definice. Nechť ψ je jednoduchá cesta definovaná na intervalu J o koncových bodech a, b. Je-li $z \in \psi(J)$, $\psi^{-1}(z) = t$ položíme

$$\omega^\psi(z) = \operatorname{arc}\left(\tau_\psi^+(t), \tau_\psi^-(t)\right), \tag{1.28}$$

existují-li limity $\tau_\psi^+(t)$, $\tau_\psi^-(t)$. Je-li $\psi^{-1}(z) = \{a, b\}$ a existují-li $\tau_\psi^+(a)$, $\tau_\psi^-(b)$ klademe

$$\omega^\psi(z) = \operatorname{arc}\left(\tau_\psi^+(a), \tau_\psi^-(b)\right). \tag{1.28'}$$

Pro jiná z není ω^ψ definováno. Bod $z \in \psi(y)$ nazveme úhlovým bodem cesty ψ, je-li $\omega^\psi(z)$ definováno a je $\omega^\psi(z) > 0$.

1.22. Lemma. *Nechť ψ je cesta konečné délky definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$, $|\psi(t)| > 0$ pro $t \in (a, b)$. Potom platí*

$$|\psi(b)| - |\psi(a)| = \int_a^b \frac{\psi}{|\psi|} \circ \tau_\psi \, \mathrm{d}\, \mathrm{var}_\psi .$$

Důkaz. Funkce $\alpha(\zeta) = |\zeta|$ má na množině $G = \{\zeta; |\zeta| > 0\}$ spojité parciální derivace prvého řádu a je grad $\alpha(\zeta) = \zeta/|\zeta|$. Podle 1.17, 1.18 platí pro $a < t_1 < t_2 < b$

$$|\psi(t_2)| - |\psi(t_1)| = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\psi_1}{|\psi_1|} \mathrm{d}\psi_1 + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\psi_2}{|\psi_2|} \mathrm{d}\psi_2 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\psi}{|\psi|} \circ \tau_\psi \, \mathrm{d}\, \mathrm{var}_\psi .$$

Žádaný vztah obdržíme limitním přechodem pro $t_1 \to a+$, $t_2 \to b-$.

1.23. Lemma. *Nechť ψ je cesta konečné délky definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom pro $z \in E_2$ platí*

$$|\psi(b) - z| - |\psi(a) - z| = \int_a^b \frac{\psi - z}{|\psi - z|} \circ \tau_\psi \, \mathrm{d}\, \mathrm{var}_\psi .$$

Důkaz. Pro $\psi^{-1}(z) \cap (a, b) = \emptyset$ platí tvrzení podle 1.22. Nechť proto $\psi^{-1}(z) \cap$ $\cap (a, b) \neq \emptyset$, $c = \inf \psi^{-1}(z)$, $d = \sup \psi^{-1}(z)$. Označme γ systém všech komponent I množiny $\langle c, d\rangle - \psi^{-1}(z)$. Podle 1.22 pro $I \in \gamma$ platí

$$\int_I \frac{\psi - z}{|\psi - z|} \circ \tau_\psi \, \mathrm{d}\, \mathrm{var}_\psi = 0 .$$

Dále je

$$-|\psi(a) - z| = |\psi(c) - z| - |\psi(a) - z| = \int_a^c \frac{\psi - z}{|\psi - z|} \circ \tau_\psi \, \mathrm{d}\, \mathrm{var}_\psi ,$$

$$|\psi(b) - z| = |\psi(b) - z| - |\psi(d) - z| = \int_d^b \frac{\psi - z}{|\psi - z|} \circ \tau_\psi \, \mathrm{d}\, \mathrm{var}_\psi .$$

Jelikož podle 1.4 je $\operatorname{var}_\psi [\psi^{-1}(z)] = 0$, vyplývá odtud sečtením všech těchto vztahů

$$\int_a^b \frac{\psi - z}{|\psi - z|} \circ \tau_\psi \, d \operatorname{var}_\psi = \int_{\langle a,b \rangle - \psi^{-1}(z)} \frac{\psi - z}{|\psi - z|} \circ \tau_\psi \, d \operatorname{var}_\psi =$$

$$= \int_a^c \frac{\psi - z}{|\psi - z|} \circ \tau_\psi \, d \operatorname{var}_\psi +$$

$$+ \sum_{I \in \gamma} \int_I \frac{\psi - z}{|\psi - z|} \circ \tau_\psi \, d \operatorname{var}_\psi + \int_d^b \frac{\psi - z}{|\psi - z|} \circ \tau_\psi \, d \operatorname{var}_\psi = |\psi(b) - z| - |\psi(a) - z| ,$$

což bylo dokázati.

1.24. Lemma. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J, $\psi(t) \neq 0$ pro $t \in J$, a α nechť jest spojitá větev* arg ψ *na intervalu J. Pak jsou si rovny následující veličiny:*

i) $\operatorname{var}_\alpha [J]$,

ii) $\operatorname{var} [\psi/|\psi|; J]$,

iii) $\sup \sum_{j=1}^{n} \operatorname{arc} (\psi(b_j), \psi(a_j))$,

kde supremum bereme přes všechny konečné systémy nepřekrývajících se intervalů $\langle a_j, b_j \rangle \subset J$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Důkaz. Stačí zřejmě předpokládat, že interval J jest kompaktní. Potom pro libovolné dělení $D = \{t_j\}_{j=0}^n$ intervalu J je podle 1.22 a 1.21

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\psi(t_j)}{|\psi(t_j)|} - \frac{\psi(t_{j-1})}{|\psi(t_{j-1})|} \right| \leqq \sum_{j=1}^{n} \operatorname{arc} (\psi(t_{j-1}), \psi(t_j)) \leqq \sum_{j=1}^{n} |\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})| .$$

Odtud přechodem k supremu přes všechna dělení D intervalu J plyne

$$\operatorname{var}_{\psi/|\psi|} [J] \leqq \sup_D \sum_{j=1}^{n} \operatorname{arc} (\psi(t_{j-1}), \psi(t_j)) \leqq \operatorname{var}_\alpha [J] .$$

Pro libovolné $k > 1$ lze nalézt $\delta > 0$ tak, aby platilo zároveň

$$t_1, t_2 \in J , \quad |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |\alpha(t_1) - \alpha(t_2)| < \pi$$

a

$$|z^1| = |z^2| = 1 , \quad |z^1 - z^2| < \delta \Rightarrow \operatorname{arc} (z^1, z^2) \leqq k|z^1 - z^2| .$$

Je-li $\nu(D) < \delta$, platí

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{arc} (\psi(t_{j-1}), \psi(t_j)) \leqq k \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\psi(t_j)}{|\psi(t_j)|} - \frac{\psi(t_{j-1})}{|\psi(t_{j-1})|} \right| .$$

Odtud pro $\nu(D) \to 0$ vyplývá vzhledem k (1.4) pro libovolné $k > 1$ vztah $\operatorname{var}_\alpha [J] \leqq$ $\leqq k \, . \operatorname{var}_{\psi/|\psi|} [J]$, z nějž vyplývá platnost 1.24.

1.25. Lemma. *Nechť z^1, z^2, ζ jsou tři navzájem různé body z E_2. Buď $\delta > 0$ tak malé, že platí $z^j \notin K_\delta(\zeta)$ pro $j = 1, 2$. Označme $F_j(z)$ spojitou větev* $\arg [z - z^j]$ *na kruhu $K_\delta(\zeta)$. Existuje-li $c \in E_2$, $c \neq 0$ tak, že platí*

$$c \circ \operatorname{grad} F_j(\zeta) = 0 \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \tag{1.29}$$

leží body ζ, z_1, z_2 na jedné přímce.

Důkaz. Bez újmy obecnosti můžeme zvolit $z^1 = x_0 + iy_1$, $z^2 = x_0 + iy_2$. Předpokládejme, že bod $\zeta = \xi + i\eta$ neleží na přímce L určené body z^1, z^2. Lze zvolit $\delta > 0$ tak, aby platilo $K_\delta(\zeta) \cap L = \emptyset$. Funkce $F_j(z) = F_j(x + iy)$ se pak liší pouze o konstantu od funkce $\operatorname{arctg}((y - y_j)/(x - x_0))$ na kruhu $K_\delta(\zeta)$, takže je – píšeme-li příslušný vektor ve tvaru komplexního čísla –

$$\operatorname{grad} F_j(\zeta) = -\frac{\eta - y_j}{|\zeta - z^j|^2} + i\frac{\xi - x_0}{|\zeta - z^j|^2}, \quad j = 1, 2.$$

Platí-li pro $c \neq 0$ vztah (1.29), má matice

$$\begin{pmatrix} -(\eta - y_1), & \xi - x_0 \\ -(\eta - y_2), & \xi - x_0 \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

hodnost 1, což je ve sporu s předpokladem, že body ζ, z^1, z^2 neleží na jedné přímce. Tím jest lemma 1.25 dokázáno.

1.26. Lemma. *Nechť z^1, z^2, ζ jsou tři navzájem různé body z E_2. Nechť $F_j(z) = |z - z^j|$, $j = 1, 2$. Platí-li pro tyto funkce F_j a $c \neq 0$ vztah (1.29), leží body ζ, z^1, z^2 na jedné přímce.*

Důkaz lze provésti analogicky jako u předešlého lemmatu – stačí si uvědomit, že $\operatorname{grad} F_j(z) = (z - z^j)/|z - z^j|$, $j = 1, 2$.

Nyní odvodíme několik tvrzení o odhadech vzdáleností pomocí úseček a úhlů, které v dalším textu budeme potřebovat.

1.27. Lemma. *Nechť $z^1, z^2 \in E_2$, $z^1 \neq z^2$. Nechť K je souvislá kompaktní množina disjunktní s přímkou L, určenou body z^1, z^2. Pak existuje konstanta $k > 0$ tak, že pro libovolné $u, v \in K$ platí*

$$|u - v| \leqq k \sum_{j=1}^{2} \big||u - z^j| - |v - z^j|\big|. \tag{1.31}$$

Důkaz. V opačném případě existují – vzhledem ke kompaktnosti množiny K – konvergentní posloupnosti bodů $\{u^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{v^n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$, pro něž je

$$\lim_{n\to\infty} u^n = u^0, \quad \lim_{n\to\infty} v^n = v^0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u^n - v^n}{|u^n - v^n|} = c \neq 0$$

a zároveň platí

$$(1.32) \qquad |u^n - v^n| > n \sum_{j=1}^{2} \big| |u^n - z^j| - |v^n - z^j| \big|$$

pro každé přirozené n.

Z této nerovnosti však vyplývá limitním přechodem pro $n \to \infty$, $|u^0 - z^j| = |v^0 - z^j|$, $j = 1, 2$, tj. body u^0, v^0 leží na kružnici C^j se středem z^j, $j = 1, 2$. Kdyby množina $C^1 \cap C^2$ byla jednobodová, ležel by tento bod na přímce L, tj. $u^0 = v^0 \in K \cap L$, což jest ve sporu s $K \cap L = \emptyset$. Je-li $C^1 \cap C^2$ dvoubodová množina, jsou oba průsečíky C^1, C^2 přímkou L oddělovány. Ze souvislosti kontinua K plyne, že přímka L nemůže oddělovat body $u^0 \in K$, $v^0 \in K$, jinak by bylo totiž opět $K \cap L \neq \emptyset$. Proto u^0, v^0 musí splynout s jedním z průsečíků C^1, C^2 — označme jej ζ. Pro dostatečně veliká n je

$$|u^n - z^j| - |v^n - z^j| = (u^n - v^n) \circ \operatorname{grad} F_j(\zeta) + |u^n - v^n| \, o_n(1)\,,$$

kde F_j má týž význam jako v lemmatu 1.26 a $o_n(1) \to 0$ pro $n \to \infty$. Za pomoci (1.32) odtud obdržíme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\big| |u^n - z^j| - |v^n - z^j| \big|}{|u^n - v^n|} = c \circ \operatorname{grad} F_j(\zeta) = 0 \quad \text{pro} \quad j = 1, 2\,.$$

Užitím lemmatu 1.26 však dospíváme k hledanému sporu, a tedy 1.27 platí.

1.28. Lemma. *Nechť body z^1, z^2, z^3 neleží na jediné přímce. Potom pro $r > 0$ existuje konstanta $k_r > 0$ tak, že platí*

$$(1.33) \qquad |u - v| < k_r \sum_{j=1}^{3} \big| |u - z^j| - |v - z^j| \big|\,,$$

jakmile je $|u| < r$, $|v| < r$.

Důkaz. V opačném případě existují — vzhledem k omezenosti $K_r(0)$ — konvergentní posloupnosti bodů $\{u^n\}_{n=1}^{\infty}, \{v^n\}_{n=1}^{\infty} \subset K_r(0)$, $\lim_{n\to\infty} u^n = u^0$, $\lim_{n\to\infty} v^n = v^0$ a to tak, že platí

$$(1.34) \qquad |u^n - v^n| > n \sum_{j=1}^{3} \big| |u^n - z^j| - |v^n - z^j| \big|\,.$$

Odtud ale plyne limitním přechodem pro $n \to \infty$

$$|u^0 - z^j| = |v^0 - z^j|\,, \quad j = 1, 2, 3\,,$$

tj. pro $u^0 \neq v^0$ by body z^j ležely na jediné přímce—symetrále úsečky $\overline{u^0 - v^0}$. Proto předpokládejme $u^0 = v^0 = \zeta$. Bod ζ neleží alespoň na jedné z přímek, určených body

z^j, $j = 1, 2, 3$ – nechť je to na příklad přímka L určená body z^1, z^2. Zvolíme nyní $\delta > 0$ tak, aby $\overline{K_\delta(\zeta)} \cap L = \emptyset$ a aplikujeme lemma 1.27. Tím určíme $k > 0$ tak, že platí

$$|u - v| < k \sum_{j=1}^{2} \big||u - z^j| - |v - z^j|\big|$$

pro libovolné $u, v \in \overline{K_\delta(\zeta)}$. Pro dostatečně velká n je $u^n, v^n \in K_\delta(\zeta)$, a je tedy

$$|u^n - v^n| \leqq k \sum_{j=1}^{2} \big||u^n - z^j| - |v^n - z^j|\big| ,$$

což jest ve sporu s (1.34). Tím jest lemma 1.28 dokázáno.

1.29. Lemma. *Nechť $z^1, z^2 \in E_2$, $z^1 \neq z^2$. Nechť C je kompaktní množina v E_2 disjunktní s přímkou L, určenou body z^1, z^2. Pak existuje konstanta $k > 0$ tak, že pro libovolná $u, v \in C$ platí:*

$$|u - v| \leqq k \sum_{j=1}^{2} \operatorname{arc}(u - z^j, v - z^j) . \tag{1.35}$$

Důkaz. Při důkazu sporem budeme postupovat analogicky jako při důkazu lemmatu 1.27. Zkonstruujeme opět posloupnosti bodů $\{u^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{v^n\}_{n=1}^{\infty} \subset C$ tak, že je

$$\lim_{n\to\infty} u^n = u^0 \in C , \quad \lim_{n\to\infty} v^n = v^0 \in C , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u^n - v^n}{|u^n - v^n|} = c \neq 0$$

a zároveň platí

$$|u^n - v^n| > n \sum_{j=1}^{2} \operatorname{arc}(u^n - z^j, v^n - z^j) . \tag{1.36}$$

Odtud obdržíme limitním přechodem pro $n \to \infty$ $\operatorname{arc}(u^0 - z^j, v^0 - z^j) = 0$, $j = 1, 2$. Jelikož $u^0, v^0 \in C$, $C \cap L = \emptyset$, musí být $u^0 = v^0 = \zeta$. Zvolíme $\delta > 0$ tak, aby $K_\delta(\zeta) \cap L = \emptyset$. Nechť $F_j(\zeta)$ jsou spojité větve $\arg[z - z^j]$ na kruhu $K_\delta(\zeta)$, $j = 1, 2$. Pro dostatečně velká n máme

$$\operatorname{arc}(u^n - z^j, v^n - z^j) = |F_j(u^n) - F_j(v^n)| = |(u^n - v^n) \circ \operatorname{grad} F_j(\zeta)| + o(|u^n - v^n|) ,$$

kde $o(|u^n - v^n|) / |u^n - v^n| \to 0$ pro $n \to \infty$. Odtud ale plyne

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arc}(u^n - z^j, v^n - z^j)}{|u^n - v^n|} = c \circ \operatorname{grad} F_j(\zeta) , \quad j = 1, 2 ,$$

z čehož podle lemmatu 1.25 plyne spor, neboť $\zeta \in C$, $C \cap L = \emptyset$.

1.30. Lemma. *Nechť body* $z^1, z^2, z^3 \in E_2$ *neleží na téže přímce. Potom pro každé* $r > 0$ *existuje konstanta* $k_r > 0$ *tak, že platí*

$$(1.37) \qquad |u - v| \leqq k_r \sum_{j=1}^{3} \operatorname{arc}(u - z^j, v - z^j)$$

pro libovolné body $u, v \in K_r(0) - \{z^1, z^2, z^3\}$.

Důkaz. Analogicky jako při nepřímém důkazu lemmatu 1.28 lze předpokládat, že pro jisté $r > 0$ existují konvergentní posloupnosti bodů $\{u^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{v^n\}_{n=1}^{\infty} \subset K_r(0) - \{z^1, z^2, z^3\}$, pro které platí $\lim_{n\to\infty} u^n = u^0$, $\lim_{n\to\infty} v^n = v^0$ a zároveň

$$(1.38) \qquad |u^n - v^n| > n \sum_{j=1}^{3} \operatorname{arc}(u^n - z^j, v^n - z^j).$$

Kdyby bylo $u^0 \neq v^0$, pak podle předpokladu alespoň jeden z bodů z^j, $j = 1, 2, 3$ nemůže ležet na přímce, určené body u^0, v^0; nechť to je na příklad bod z^1. Pak ale z (1.38) plyne

$$0 < \operatorname{arc}(u^0 - z^1, v^0 - z^1) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arc}(u^n - z^1, v^n - z^1) \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |u^n - v^n|,$$

což jest spor. Je tedy $u^0 = v^0 = \zeta$. Bod ζ neleží alespoň na jedné z přímek, určených body z^1, z^2, z^3; nechť je to na příklad přímka L, určená body z^1, z^2. Zvolíme $\delta > 0$ tak, aby $\overline{K_\delta(\zeta)} \cap L = \emptyset$ aplikujeme lemma 1.29. Existuje tedy $k > 0$ tak, že pro $u, v \in \overline{K_\delta(\zeta)}$ platí

$$|u - v| \leqq k \sum_{j=1}^{2} \operatorname{arc}(u - z^j, v - z^j).$$

Pro dostatečně velká n je $u^n, v^n \in K_\delta(\zeta)$, čímž obdržíme spor s (1.38) a tvrzení jest dokázáno.

Na závěr prvé části uvedeme ještě jedno tvrzení, které využijeme ve třetí části.

1.31. Lemma. *Nechť* f *jest spojitá funkce na intervalu* J. *Je-li* f *klesající zprava v každém bodě intervalu* J, *pak jest klesající funkcí na intervalu* J.

Důkaz. Dokážeme nejprve, že funkce f jest nerostoucí na intervalu J, tj. že pro libovolnou dvojici bodů $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2$ platí $f(t_1) \geqq f(t_2)$. Položme $\alpha = \sup \{t;\ t \in \langle t_1, t_2 \rangle, f(t) \leqq f(t_1)\}$. Ze spojitosti f plyne $f(\alpha) \leqq f(t_1)$. Kdyby bylo $\alpha < t_2$, platilo by pro $t \in (\alpha, t_2\rangle$, $f(t) > f(t_1) \geqq f(\alpha)$, což je ve sporu s tím, že funkce f jest v bodě α klesající zprava. Je tedy $\alpha = t_2$ a $f(t_1) \geqq f(t_2)$ pro libovolné dva body $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in J$. Jelikož však pro $t_1 < t_2$ existuje podle předpokladu bod $t \in (t_1, t_2)$ takový, že je $f(t_1) > f(t)$, plyne odtud aplikací prvé části důkazu $f(t_1) > f(t) \geqq f(t_2)$, tj. funkce f je klesající v intervalu J.

2. Dříve než začneme zkoumat vztah mezi délkou cesty a její cyklickou resp. radiální variací, seznámíme se blíže s vlastnostmi těchto funkcí.

2.1. Definice. Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J, $z \in E_2$ a G otevřená množina v J. Potom definujeme funkci v^ψ předpisem

$$(2.1) \qquad v^\psi(z; G) = \sum_{I \in \gamma} \operatorname{var}\left[\frac{\psi - z}{|\psi - z|}; I\right],$$

kde γ je systém všech komponent I množiny $G - \psi^{-1}(z)$. Pro $r > 0$ položme

$$(2.2) \qquad G_r = \{t; t \in J, |\psi(t) - z| < r\}$$

a definujme dále

$$v_r^\psi(z) = v^\psi(z; G_r).$$

Zřejmě je $v^\psi(z; J) = v_\infty^\psi(z)$; index ∞ budeme vypouštět a psát pouze $v^\psi(z)$. Hodnotu funkce $v^\psi(z)$ $(v_r^\psi(z))$ nazveme cyklickou variací cesty ψ v bodě z (s poloměrem r).

2.2. Definice. Nechť ψ je cesta definovanána intervalu J, $z \in E_2$, G otevřená množina v J a $\beta \in E_1$. Symbolem $\mu^\psi(\beta; z, G)$ označíme počet prvků $(0 \leqq \mu^\psi(\beta; G) \leqq +\infty)$ množiny $\{t; t \in G, 0 \neq \psi(t) - z = e^{i\beta}|\psi(t) - z|\}$. Pro G_r – viz (2.2) – položíme $\mu_r^\psi(\beta; z) = \mu^\psi(\beta; z, G_r)$ a budeme opět psát stručněji $\mu^\psi(\beta; z)$ místo $\mu_\infty^\psi(\beta; z)$. Funkci $\mu^\psi(\beta; z)$ $(\mu_r^\psi(\beta; z))$ proměnné β nazveme cyklickou indikatricí cesty ψ v bodě z (s poloměrem r).

2.3. Věta. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J, $z \in E_2$. Nechť I je interval v $J - \psi^{-1}(z)$. Potom jsou si rovny tyto veličiny:*

i) $\operatorname{var}_\alpha[I]$, *kde α je libovolná spojitá větev* $\arg[\psi - z]$ *na intervalu I,*

ii) $v^\psi(z; I)$,

iii) $\sup \sum_{j=1}^{n} \operatorname{arc}(\psi(b_j) - z, \psi(a_j) - z)$, *kde supremum bereme přes všechny konečné systémy nepřekrývajících se intervalů $\langle a_j, b_j\rangle \subset J$, $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Důkaz. Tvrzení plyne bezprostředně z definice 2.1 a tvrzení 1.24.

2.4. Věta. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J, $z \in E_2$. Nechť G je otevřená množina v J. Potom funkce $\mu^\psi(\beta; z, G)$ je měřitelnou funkcí proměnné β a platí*

$$(2.3) \qquad \int_0^{2\pi} \mu^\psi(\beta; z, G)\, d\beta = v^\psi(z; G).$$

Důkaz. Viz [5], lemma 2.1–2.4.

Takto definovanou cyklickou variací cesty lze využít na příklad při studiu logaritmického potenciálu v blízkosti hranice, při řešení Dirichletovy úlohy v E_2 a podobně. (Viz [2]–[4].) Shrneme nejdůležitější vlastnosti funkce v^ψ, dokázané v citovaných pracích.

2.5. Lemma. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J. Potom pro $z \in E_2$ je*

$$v^\psi(z) \leqq \liminf_{\zeta \to z} v^\psi(\zeta)\,, \tag{2.4}$$

tj. funkce v^ψ jest zdola polospojitá v E_2 (viz [2], 1.12).

2.6. Lemma. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$, $\operatorname{var}_\psi [\langle a, b\rangle] < +\infty$. Pak funkce v^ψ je lokálně lipschitzovská na $E_2 - \psi(\langle a, b\rangle)$* (viz opět [2], 1.12).

2.7. Lemma. *Nechť ψ je cesta konečné délky definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce v^ψ je subharmonická na $E_2 - \psi(\langle a, b\rangle)$.*

Důkaz. Sestrojíme posloupnost ekvidistantních dělení $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ intervalu $\langle a, b\rangle$ na 2^n intervalů. Z lemmatu 1.11 vyplývá, že $\Delta \arg [\psi - z; \langle t_{j-1}, t_j\rangle]$, $\langle t_{j-1}, t_j\rangle \subset \subset \langle a, b\rangle$ je harmonická funkce na $E_2 - \psi(\langle t_{j-1}, t_j\rangle)$. Označíme-li ϑ_z pro $z \in E_2 - - \psi(\langle a, b\rangle)$ spojitou větev $\arg [\psi - z]$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ pak funkce $V_{\vartheta_z}(D_n)$ (viz (1.3)) jsou subharmonickými funkcemi proměnné z a na množině $E_2 - \psi(\langle a, b\rangle)$ platí

$$v^\psi(z) = \operatorname{var}_{\vartheta_z} [\langle a, b\rangle] = \lim_{n \to \infty} V_{\vartheta_z}(D_n)\,.$$

Funkce $V_{\vartheta_z}(D_n)$ tvoří neklesající posloupnost a konvergují ke spojité funkci v^ψ (viz 2.6); odtud již plyne platnost dokazovaného tvrzení.

2.8. Lemma. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J, $\zeta \in E_2$. Je-li $v^\psi(\zeta) < +\infty$, je bod ζ ψ-normální* (*viz* 1.14) *a platí*

$$\bar{\Delta}_\psi \leqq v^\psi(\zeta)\,. \tag{2.5}$$

Důkaz. Označme γ systém všech komponent I množiny $J - \psi^{-1}(\zeta)$, nechť α_I je libovolná spojitá větev $\arg [\psi - \zeta]$ na intervalu I. Z předpokladu $v^\psi(\zeta) = = \sum_{I \in \gamma} \operatorname{var}_{\alpha_I} [I] < +\infty$ vyplývá existence limit $\alpha_I(a_I+)$, $\alpha_I(b_I-)$, kde $a_I < b_I$ jsou krajní body intervalu I pro každé $I \in \gamma$. Z nerovnosti

$$|\Delta \arg [\psi - \zeta; I]| = |\alpha_I(b_I-) - \alpha_I(a_I+)| \leqq \operatorname{var}_{\alpha_I} [I]$$

plyne ψ-normalita bodu ζ a odhad

$$\bar{\Delta}_\psi(\zeta) = \sum_{I \in \gamma} |\Delta \arg [\psi - \zeta; I]| \leqq \sum_{I \in \gamma} \operatorname{var}_{\alpha_I} [I] = v^\psi(\zeta)\,.$$

2.9. Věta. *Nechť ψ je omezená cesta definovaná na intervalu J a nechť body $z^1, z^2, z^3 \in E_2$ neleží na jedné přímce. Pak platí*

$$\mathrm{var}_\psi [J] < +\infty ,$$

jakmile je

$$\sum_{j=1}^{3} v^\psi(z^j) < +\infty . \tag{2.6}$$

Důkaz. Označme γ_1 systém všech komponent množiny $J - \psi^{-1}(\{z^1, z^2, z^3\})$. Zvolíme-li $r > 0$ takové, aby platilo $\psi(J) \subset K_r(0)$ platí podle 1.30

$$\sum_{k=1}^{n} |\psi(b_k) - \psi(a_k)| \leqq k_r \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{3} \mathrm{arc}\,(\psi(b_k) - z^j, \psi(a_k) - z^j) ,$$

kde $\langle a_k, b_k \rangle$, $k = 1, 2, \ldots, n$ tvoří systém nepřekrývajících se intervalů v I. Přechodem k supremu přes všechny možné tyto systémy lze obdržet pro libovolný $I \in \gamma_1$

$$\mathrm{var}_\psi [I] \leqq k_r \sum_{j=1}^{3} v^\psi(z^j) .$$

Vzhledem k aditivitě funkce v^ψ vyplývá odtud za pomoci věty 1.4 nerovnost

$$\mathrm{var}_\psi [J] = \sum_{I \in \gamma_1} \mathrm{var}_\psi [I] \leqq k_r \sum_{j=1}^{3} v^\psi(z^j) < +\infty ,$$

čímž jest tato věta dokázána.

2.10. Věta. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J a nechť $z^1, z^2 \in E_2$, $z^1 \neq z^2$. Potom pro libovolnou otevřenou množinu G v J, pro niž jest $\overline{\psi(G)}$ kompaktní a disjunktní s přímkou, určenou body z^1, z^2, platí:*

$$\mathrm{var}_\psi [G] < +\infty ,$$

jakmile je

$$\sum_{j=1}^{2} v^\psi(z^j; G) < +\infty . \tag{2.7}$$

Důkaz lze provést analogicky jako důkaz předešlého tvrzení za pomoci lemmatu 1.29.

Přistupme nyní k definici a vyšetřování vlastností radiální variace cesty ψ.

2.11. Definice. Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J, $z \in E_2$ a G otevřená množina v J. Potom definujeme funkci u^ψ předpisem

$$u^\psi(z; G) = \mathrm{var}_{|\psi(t) - z|} [G] . \tag{2.8}$$

Pro $r > 0$ nechť G_r je definována jako v (2.2). Potom definujeme

$$u_r^\psi(z) = u^\psi(z; G_r). \tag{2.9}$$

Podobně jako u funkce v^ψ budeme psát stručněji $u^\psi(z)$ místo $u_\infty^\psi(z)$. Hodnotu funkce $u^\psi(z)$ $(u_r^\psi(z))$ nazveme cyklickou variací cesty ψ v bodě z (s poloměrem r).

2.12. Definice. Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J, $z \in E_2$ a nechť G je otevřená množina v J, $\varrho \in E_1$, $\varrho > 0$. Označíme symbolem $v^\psi(\varrho; z, G)$ počet prvků množiny

$$\{t; t \in G, |\psi(t) - z| = \varrho\}.$$

Platí zřejmě

$$0 \leqq v^\psi(\varrho; z, G) \leqq +\infty.$$

Pro G_r – srovnej s (2.2) – položíme $v_r^\psi(\varrho; z) = v^\psi(\varrho; z, G_r)$ a budeme stručněji psát $v^\psi(\varrho; z)$ místo $v_\infty^\psi(\varrho, z)$. Funkci $v^\psi(\varrho; z)$ $(v_r^\psi(\varrho; z))$ proměnné ϱ nazveme radiální indikatricí cesty ψ v bodě z (s poloměrem r).

2.13. Věta. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J, $z \in E_2$ a G otevřená množina v J. Potom funkce v^ψ $(\varrho; z, G)$ je měřitelnou funkcí proměnné ϱ na intervalu* $(0, +\infty)$ *a platí*

$$\int_0^{+\infty} v^\psi(\varrho; z, G)\, d\varrho = u^\psi(z; G). \tag{2.10}$$

D ů k a z plyne bezprostředně z předešlých definic 2.11 a 2.12 a z tvrzení 1.1.

2.14. Poznámka. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J; z vlastností variace a definice* 2.11 *funkce u^ψ vyplývá pro $z \in E_2$*

$$u^\psi(z) = \operatorname{var}_{|\psi(t)-z|}[J] \leqq \operatorname{var}_{\psi-z}[J] = \operatorname{var}_\psi[J]. \tag{2.11}$$

2.15. Věta. *Nechť ψ je cesta konečné délky definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$; τ^ψ je dáno předpisem z definice* 1.16, *$z \in E_2$. Potom funkce*

$$h(t) = \frac{\psi(t) - z}{|\psi(t) - z|} \circ \tau^\psi(t) \tag{2.12}$$

je definována pro var_ψ*-skoro všechna $t \in \langle a, b\rangle$ a platí*

$$u^\psi(z) = \int_a^b |h|\, d \operatorname{var}_\psi. \tag{2.13}$$

Důkaz. Tvrzení o definičním oboru funkce h plyne z definice cesty ψ a funkce τ^ψ (srovnej též s větou 1.17). Podle lemmatu 1.23 platí pro libovolné $t \in \langle a, b \rangle$

$$|\psi(t) - z| = |\psi(a) - z| + \int_a^t h \, \mathrm{d} \operatorname{var}_\psi .$$

Pomocí lemmatu 1.18 a definice 2.11 vyplývá odtud ihned vztah (2.13).

2.16. Věta. *Nechť ψ je cesta konečné délky definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom funkce u^ψ jest konečná a spojitá v E_2. Dále: k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $k_\varepsilon > 0$ tak, že pro každou dvojici bodů $z^1, z^2 \in E_2$, z nichž alespoň jeden jest od $\psi(\langle a, b \rangle)$ vzdálen o více nežli ε, platí*

$$|u^\psi(z^1) - u^\psi(z^2)| \leqq \operatorname{var} \left[|\psi(t) - z^1| - |\psi(t) - z^2| ; \langle a, b \rangle \right] \leqq k_\varepsilon |z^1 - z^2|$$

a funkce u^ψ jest lokálně lipschitzovská na množině $E_2 - \psi(\langle a, b \rangle)$.

Důkaz. Konečnost funkce u^ψ je patrna z věty 2.15. Zvolme libovolně z a posloupnost bodů $\{z^n\}_{n=1}^\infty \subset E_2$ tak, že platí $\lim_{n \to \infty} z^n = z$. Pak ale též pro každé $t \in \langle a, b \rangle - \psi^{-1}(z)$ platí

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\psi(t) - z^n}{|\psi(t) - z^n|} = \frac{\psi(t) - z}{|\psi(t) - z|} .$$

S přihlédnutím k větě 1.4 vyplývá odtud podle lemmatu 1.23

$$\lim_{n \to \infty} u^\psi(z^n) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b \frac{\psi - z^n}{|\psi - z^n|} \circ \tau^\psi \, \mathrm{d} \operatorname{var}_\psi = \int_a^b \frac{\psi - z}{|\psi - z|} \circ \tau^\psi \, \mathrm{d} \operatorname{var}_\psi = u^\psi(z) ,$$

tj. funkce u^ψ jest v bodě z spojitá.

Zvolme nyní $z^1, z^2 \in E_2$ tak, aby na příklad bylo $|z^1 - \psi(t)| \geqq \varepsilon > 0$ pro všechna $t \in \langle a, b \rangle$. Potom platí následující odhad

$$\left| \frac{\psi(t) - z^1}{|\psi(t) - z^1|} - \frac{\psi(t) - z^2}{|\psi(t) - z^2|} \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{|z^1 - z^2| \, |\psi(t) - z^2| + |\psi(t) - z^2| \, \big| |\psi(t) - z^1| - |\psi(t) - z^2| \big|}{|\psi(t) - z^1| \, |\psi(t) - z^2|} \leqq 2 \frac{|z^1 - z^2|}{\varepsilon} .$$

Užitím lemmatu 1.18 plyne odtud dále

$$|u^\psi(z^1) - u^\psi(z^2)| \leqq \operatorname{var} \left[|\psi(t) - z^1| - |\psi(t) - z^2| ; \langle a, b \rangle \right] =$$

$$= \int_a^b \left| \left(\frac{\psi(t) - z^1}{|\psi(t) - z^1|} - \frac{\psi(t) - z^2}{|\psi(t) - z^2|} \right) \circ \tau^\psi \right| \mathrm{d} \operatorname{var}_\psi \leqq$$

$$\leqq \int_a^b \left| \frac{\psi(t) - z^1}{|\psi(t) - z^1|} - \frac{\psi(t) - z^2}{|\psi(t) - z^2|} \right| \mathrm{d} \operatorname{var}_\psi \leqq \frac{2}{\varepsilon} |z^1 - z^2| \operatorname{var}_\psi [\langle a, b \rangle] ,$$

čímž jest tvrzení 2.16 dokázáno.

V citované literatuře může čtenář nalézti některé další vlastnosti funkcí u^ψ, v^ψ, důležité pro studium logaritmického potenciálu apod. V následující poznámce uvedeme několik ilustrativních příkladů, dokreslujících vlastnosti studovaných funkcí.

2.17. Poznámka. V prvním z příkladů ukážeme, že funkce u^ψ nemusí splňovat Lipschitzovu podmínku v bodech grafu ψ, v dalších pak ověříme, že v případech cesty, která nemá konečnou délku, nemusí být funkce u^ψ, v^ψ spojité i mimo graf ψ.

Příklad 1. Zvolme posloupnost přirozených čísel $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ a klesající posloupnost nezáporných čísel $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby platilo

$$r_n < \frac{1}{n}, \quad r_n q_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{(n+1)}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Definujme cestu ψ_n na intervalu $\langle 1/(2n+1), 1/2n \rangle$ tak, aby popisovala q_n-násobný oběh kružnice $C_{r_n}(0)$ (na smyslu oběhu nezáleží), při čemž počáteční a koncový bod ζ_n cesty ψ_n splývají a je $\zeta_n = r_n$. Nyní definujme na intervalu $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ cestu ψ takto:

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(t) = \psi_n(t) \quad \text{pro} \quad t \in \left\langle \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right\rangle, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

na intervalech $\langle 1/2(n+1), 1/(2n+1) \rangle$ položíme $\operatorname{Im} \psi = 0$ a za $\operatorname{Re} \psi$ volíme lineární funkci takovou, aby platilo

$$\psi\left(\frac{1}{2(n+1)}\right) = \zeta_{n+1}, \quad \psi\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \zeta_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Pro takto definovanou cestu ψ platí

$$\operatorname{var}_\psi [\langle 0, \tfrac{1}{2} \rangle] = \tfrac{1}{2} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} q_n r_n = \tfrac{1}{2} + 2\pi < +\infty.$$

Dále platí

$$u^\psi(0) = \frac{1}{2}, \quad u^\psi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{n} q_n + \sum_{k=n}^{\infty} q_n r_n \geqq \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{n}},$$

z čehož vyplývá

$$\frac{u^\psi(1/n) - u^\psi(0)}{1/n} \geqq \frac{2}{\sqrt{n}} n = 2\sqrt{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty,$$

tj. pro cestu ψ konečné délky není funkce u^ψ lipschitzovská v bodě $0 \in \psi(\langle 0, \frac{1}{2} \rangle)$.

Příklad 2. Definujme cestu $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ předpisem $\psi_1(0) = 0$, $\psi_1(t) = t \sin 1/t$ pro $t \in (0, 1\rangle$, $\psi_2(t) = 0$ pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Čtenář snadno nahlédne, že pro každé reálné z je $v^{\psi}(z) = 0$, zatímco pro $z = x + iy, y \neq 0$ je již $v^{\psi}(z) = +\infty$. Funkce v^{ψ} není tedy spojitá na příklad v žádném bodě množiny $\{z; \operatorname{Re} z = z < -1\} \subset E_2 - \psi(\langle 0, 1 \rangle)$.

Příklad 3. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost reálných čísel, $\lim_{n \to \infty} a_n = a \in E_1$ a nechť $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající posloupnost čísel z intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$ taková, že platí $\lim_{n \to \infty} \gamma_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 = +\infty$. Položme

$$\psi_n(t) = \exp i\gamma_n \frac{2(t - a_n)}{a_{n+1} - a_n} \quad \text{pro} \quad t \in \left\langle a_n, \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \right\rangle,$$

$$\psi_n(t) = \exp i\gamma_n \frac{2(a_{n+1} - t)}{a_{n+1} - a_n} \quad \text{pro} \quad t \in \left\langle \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, a_{n+1} \right\rangle.$$

Nyní definujme cestu ψ na intervalu $\langle a_1, a \rangle$ předpisem $\psi(a) = 1$, $\psi(t) = \psi_n(t)$ pro $t \in \langle a_n, a_{n+1} \rangle$. Protože je $|\psi(t) - 0| = 1$ pro $t \in \langle a_1, a \rangle$, je $u^{\psi}(0) = 0$, avšak pro $x \in (0, 1)$ platí

$$\left| \psi\left(\frac{a_{n+1} + a_n}{2}\right) - x \right| - |\psi(a_n) - x| = |e^{i\gamma_n} - x| - |1 - x| =$$

$$= \sqrt{((\cos \gamma - x)^2 + \sin^2 \gamma_n)} - (1 - x) =$$

$$= \frac{2x(1 - \cos \gamma_n)}{\sqrt{(1 - 2x \cos \gamma_n + x^2)} + (1 - x)} \geqq 2x \sin^2 \frac{\gamma_n}{2} >$$

$$> 2x \left(\frac{2}{\pi} \frac{\gamma_n}{2}\right)^2 = \frac{2x}{\pi^2} \gamma_n^2 .$$

Odtud vzhledem k definici funkce u^{ψ} vyplývá $u^{\psi}(z) = +\infty$ pro $z \in (0, 1)$, takže funkce u^{ψ} není spojitá v bodě $0 \notin \psi(\langle a_1, a \rangle)$.

Nyní přistoupíme k odhadům $\operatorname{var}_{\psi} [J]$, tentokráte však pomocí funkce u^{ψ}.

2.18. Věta. *Nechť ψ je omezená cesta definovaná na intervalu J a nechť body $z^1, z^2, z^3 \in E_2$ neleží na jedné přímce. Potom je-li*

$$\sum_{j=1}^{3} u^{\psi}(z^j) < +\infty ,$$

je též

$$\operatorname{var}_{\psi} [J] < +\infty .$$

Důkaz. Čtenář snadno nahlédne, že důkaz lze lehce provésti užitím lemmatu 1.28 k součtům $V_{\psi}(D)$ – podobně jako při důkazu tvrzení 2.9.

Analogickým způsobem lze použitím lemmatu 1.27 dokázati následující tvrzení:

2.19. Věta. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J, $z^1, z^2 \in E_2$, $z^1 \neq z^2$. Potom pro libovolnou množinu G otevřenou v J, pro niž je $\overline{\psi(G)}$ kompaktní a disjunktní s přímkou, určenou body z^1, z^2 platí*

$$\operatorname{var}_\psi [G] < +\infty ,$$

je-li

$$\sum_{j=1}^{2} u^\psi(z^j; G) < +\infty .$$

Znalost hodnot funkcí u^ψ nebo v^ψ ve třech resp. dvou vhodně zvolených bodech nám umožňuje provést odhad $\operatorname{var}_\psi [J]$, tj. délky příslušné cesty. Na závěr ukážeme, že v některých případech postačí znalost hodnot u^ψ, v^ψ v jediném bodě; platí totiž následující tvrzení:

2.20. Věta. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu J, $z \in E_2$. Je-li*

$$u^\psi(z) + v^\psi(z) < +\infty ,$$

je též

$$\operatorname{var}_\psi [J] < +\infty .$$

Důkaz. Z konečnosti $u^\psi(z)$ plyne omezenost funkce $|\psi(t)|$ na intervalu J jistou konstantou $r \in (0, +\infty)$. Označíme-li γ systém všech komponent I množiny $J - \psi^{-1}(z)$, plyne z lemmatu 1.20 pro libovolné $I \in \gamma$

$$\operatorname{var}_\psi [I] \leqq r\, v^\psi(z; I) + u^\psi(z; I) .$$

Odtud plyne užitím lemmatu 1.2

$$\operatorname{var}_\psi [J] \leqq r\, v^\psi(z) + u^\psi(z) ,$$

což bylo dokázati.

3. V 1.21 jsme definovali pojem úhlového bodu cesty. Vraťme se nyní k tomuto pojmu. Nechť ψ je jednoduchá uzavřená cesta (kladně orientovaná) definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$; její graf označíme C. V dalším stále předpokládáme, že platí

$$\sup_{\zeta \in C} v^\psi(\zeta) < +\infty . \tag{3.1}$$

Rozšíříme cestu ψ z intervalu $\langle a, b\rangle$ na celé E_1 předpisem

$$\psi(t + k) = \psi(t) , \quad \text{kde} \quad k = b - a .$$

(Potom zřejmě je ψ periodická na E_1 s periodou k.) Libovolnému $s \in E_1$ přiřadíme funkci α_s takto: α_s je spojitá větev $\arg [\psi(t) - \psi(s)]$ na intervalu $(s, s + k)$ – tato zřejmě existuje dle výkladu v první části stati – a provedeme rozšíření α_s na E_1.

Vzhledem k nerovnosti (3.1) je

$$v^{\psi}(\psi(s)) = \text{var}_{\alpha_s} [(s, s + k)] < +\infty ,$$

a tedy z vlastností funkce s konečnou variací plyne existence vlastních limit $\alpha_s(s+)$, $\alpha_s((s + k) -)$. Položíme $\alpha_s(s) = \alpha_s(s+)$ a provedeme rozšíření α_s z intervalu $\langle s, s + k)$ na celé E_1 předpisem

$$\alpha_s(t + k) = \pi + \alpha_s(t) . \tag{3.2}$$

Pro takto definovanou funkci α_s se v [4] dokazují následující tvrzení:

3.1. Lemma. *Nechť platí předešlé označení. Potom je* (viz 1.21)

$$|\alpha_s(s) - \alpha_s(s-)| = \omega^{\psi}(\psi(s)) \quad \text{pro} \quad s \in E_1 . \tag{3.3}$$

Důkaz. Viz 1.6 v [4].

3.2. Lemma. *Nechť opět platí předešlé označení. Potom množina všech úhlových bodů na C je nejvýše spočtená.*

Důkaz viz 1.7 v [4].

Zavedeme následující stručnější označení (viz (1.23)). Nechť $z^1, z^2, z^3 \in E_2$ jsou tři navzájem různé body; položíme

$$\begin{aligned} \text{arc}\,(z^1, z^2, z^3) &= \text{arc}\,(z^1 - z^2, z^3 - z^2) , \\ \text{arc}^*\,(z^1, z^2, z^3) &= \text{arc}\,(z^1 - z^2, z^2 - z^3) . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Z elementární geometrie trojúhelníka víme, že je

$$\text{arc}\,(z^1, z^2, z^3) + \text{arc}\,(z^2, z^3, z^1) = \text{arc}^*\,(z^2, z^1, z^3) . \tag{3.5}$$

3.3. Lemma. *Nechť z^k, $k = 0, 1, \ldots, n + 1$ jsou navzájem různé body z E_2. Pak platí nerovnost*

$$\sum_{k=1}^{n} \text{arc}\,(z^k, z^0, z^{k+1}) \leqq \sum_{k=1}^{n} \text{arc}^*\,(z^{k-1}, z^k, z^{k+1}) . \tag{3.6}$$

Důkaz. Podle (3.5) platí

$$\text{arc}\,(z^k, z^0, z^{k+1}) = \text{arc}^*\,(z^0, z^k, z^{k+1}) - \text{arc}\,(z^0, z^{k+1}, z^k) , \quad k = 1, 2, \ldots, n . \tag{3.7}$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pro úhly

$$\text{arc}\,(z^0 - z^k, z^k - z^{k+1}) \leqq \text{arc}\,(z^0 - z^k; z^{k-1} - z^k) + \text{arc}\,(z^{k-1} - z^k, z^k - z^{k+1})$$

plyne přepisem

$$(3.8)\quad \operatorname{arc}^*(z^0, z^k, z^{k+1}) \leqq \operatorname{arc}(z^0, z^k, z^{k-1}) + \operatorname{arc}^*(z^{k-1}, z^k, z^{k+1}), \quad k = 2, \ldots, n.$$

Sečtením vztahů (3.7) a (3.8) obdržíme

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc}(z^k, z^0, z^{k+1}) + \sum_{k=2}^{n} \operatorname{arc}^*(z^0, z^k, z^{k+1}) \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc}^*(z^0, z^k, z^{k+1}) + \sum_{k=2}^{n} \operatorname{arc}^*(z^{k-1}, z^k, z^{k+1}) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} \operatorname{arc}(z^0, z^k, z^{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc}(z^0, z^{k+1}, z^k).$$

Odtud dostáváme po jednoduché úpravě

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc}(z^k, z^0, z^{k+1}) \leqq \operatorname{arc}^*(z^0, z^1, z^2) + \sum_{k=2}^{n} \operatorname{arc}^*(z^{k-1}, z^k, z^{k+1}) -$$

$$- \operatorname{arc}(z^0, z^{n+1}, z^n) \leqq \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc}^*(z^{k-1}, z^k, z^{k+1}),$$

což bylo dokázati.

3.4. Definice. Nechť ψ je jednoduchá cesta definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$. Potom pro každé dělení D intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ definujeme

$$(3.9)\qquad s(D) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc}^*\left(\psi(t_{k-1}), \psi(t_k), \psi(t_{k+1})\right).$$

Položíme

$$(3.10)\qquad \operatorname{oh}[\psi; (\alpha, \beta)] = \sup s(D),$$

kde supremum se bere přes všechna možná dělení D intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$. Veličinu $\operatorname{oh}[\psi; (\alpha, \beta)]$ nazveme totální ohyb cesty ψ na intervalu (α, β).

3.5. Poznámka. Pro zjednodušení zápisu budeme psát $\operatorname{arc}^*_\psi(t_1, t_2, t_3)$ místo $\operatorname{arc}^*\left(\psi(t_1), \psi(t_2), \psi(t_3)\right)$ a podobně.

Z definice 3.4 vyplývá následující vztah: Je-li $(\alpha, \beta) \subset (\gamma, \delta) \subset \langle a, b\rangle$ je také

$$(3.11)\qquad \operatorname{oh}[\psi; (\alpha, \beta)] \leqq \operatorname{oh}[\psi; (\gamma, \delta)].$$

Nechť D je dělení intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$. Je-li $D \subset D'$, D' je dělení intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, říkáme, že D' je zjemněním dělení D na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ a píšeme $D \prec D'$. Platí následující tvrzení:

3.6. Lemma. *Nechť ψ je jednoduchá cesta definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$, $(\alpha, \beta) \subset \subset \langle a, b\rangle$. Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, $D_1 \prec D_2$. Potom platí*

$$s(D_1) \leqq s(D_2)\,. \tag{3.12}$$

Důkaz. Případ $D_1 = D_2$ je zřejmý; nechť nejprve D_2 vznikne z dělení D_1 přidáním jediného bodu t^*. Je-li $D_1 = \{t_k\}_{k=0}^{n+1}$, může t^* padnout do kteréhokoliv intervalu (t_k, t_{k+1}). Pro případ $t^* \in (t_0, t_1)$ stačí k důkazu (3.12) ověřit vztah

$$\operatorname{arc}^*_\psi(t_0, t_1, t_2) \leqq \operatorname{arc}^*_\psi(t_0, t^*, t_1) + \operatorname{arc}^*_\psi(t^*, t_1, t_2)\,. \tag{3.13}$$

Čtenář snadno zjistí, že pro nenulové v^1, v^2,$v \in E_2$ platí následující nerovnost

$$\operatorname{arc}(v^1 + v^2, v) \leqq \operatorname{arc}(v^1 + v^2, v^2) + \operatorname{arc}(v^2, v)\,.$$

Položíme-li v tomto vztahu

$$v^1 = \psi(t^*) - \psi(t_0)\,, \quad v^2 = \psi(t_1) - \psi(t^*)\,, \quad v = \psi(t_2) - \psi(t_1)\,,$$

obdržíme nerovnost, z níž po jednoduché úpravě plyne (3.13). Analogicky se vyšetří případ $t^* \in (t_n, t_{n+1})$, resp. vhodnou jednoduchou úpravou jej převedeme na předešlý. Pro $t^* \in (t_k, t_{k+1})$, $k = 1, \ldots, n - 1$ je nutno k důkazu nerovnosti (3.13) ověřit platnost vztahu

$$\begin{aligned} &\operatorname{arc}^*_\psi(t_{k-1}, t_k, t_{k+1}) + \operatorname{arc}^*_\psi(t_k, t_{k+1}, t_{k+2}) \leqq \\ &\leqq \operatorname{arc}^*_\psi(t_{k-1}, t_k, t^*) + \operatorname{arc}^*_\psi(t_k, t^*, t_{k+1}) + \operatorname{arc}^*_\psi(t^*, t_{k+1}, t_{k+2})\,. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Snadno můžeme ověřit, že pro nenulové $u, v, v^1, v^2, v^1 + v^2 \in E_2$ platí nerovnost

$$\begin{aligned} &\operatorname{arc}(u, v^1 + v^2) + \operatorname{arc}(v^1 + v^2, v) \leqq [\operatorname{arc}(u, v^1) + \operatorname{arc}(v^1 + v^2, v^1)] + \\ &+ [\operatorname{arc}(v^1 + v^2, v^2) + \operatorname{arc}(v^2, v)] = \operatorname{arc}(u, v^1) + \operatorname{arc}(v^1, v^2) + \operatorname{arc}(v^2, v)\,. \end{aligned}$$

Dosazením

$$\begin{aligned} u &= \psi(t_k) - \psi(t_{k-1})\,, \quad & v &= \psi(t_{k+2}) - \psi(t_{k+1})\,, \\ v^1 &= \psi(t^*) - \psi(t_k)\,, & v^2 &= \psi(t_{k+1}) - \psi(t^*) \end{aligned}$$

vyplyne odtud po jednoduché úpravě požadovaný vztah (3.14). Případy $t^* \in \langle \alpha, t_0)$, resp. $t^* \in (t_n, \beta\rangle$ jsou zřejmé. Jelikož přechod mezi děleními D_1, D_2 lze uskutečnit postupným přidáváním dalších dělicích bodů v konečně mnoha krocích, vyplývá z výše vyšetřeného případu platnost nerovnosti (3.12).

Vzhledem ke spojitosti funkce arc platí zřejmě následující tvrzení:

3.7. Lemma. *Nechť $D = \{t_i\}_{i=0}^n$ je dělení intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle \subset \langle a, b\rangle$, ψ budiž jednoduchá cesta definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom pro dělení $D' = \{u_i\}_{i=0}^n$ platí*

$$\lim_{\substack{u_i \to t_i \\ i=0,1,\ldots,n}} s(D') = s(D)\,. \tag{3.15}$$

3.8. Lemma. *Nechť ψ je jednoduchá cesta definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$; nechť $\{D^n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $(\alpha, \beta) \subset \langle a, b\rangle$, $\lim\limits_{n\to\infty} v(D^n) = 0$. Potom platí*

$$\lim_{n\to\infty} s(D^n) = \operatorname{oh}\left[\psi; (\alpha, \beta)\right]. \tag{3.16}$$

Důkaz. Zvolme k libovolně, $k < \operatorname{oh}[\psi; (\alpha, \beta)]$. Pak existuje podle definice ohybu takové dělení D, že $s(D) - k = \varepsilon > 0$. Užitím 3.7 a 3.6 lze nalézti n_0 tak, že pro $n > n_0$ platí $s(D) - s(D^n) < \frac{1}{2}\varepsilon$, odtud plyne $s(D^n) > k$ pro $n > n_0$ a tím i dokazované tvrzení.

3.9. Definice. Nechť τ je komplexní funkce definovaná na intervalu J, $|\tau(t)| = 1$ pro $t \in J$. Potom pro libovolné dělení $D = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu J položme

$$l_\tau(D) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{arc}\left(\tau(t_i), \tau(t_{i-1})\right) \tag{3.17}$$

a označme

$$\lambda[\tau, J] = \sup l_\tau(D), \tag{3.18}$$

kde supremum bereme přes všechna možná dělení D intervalu J.

3.10. Poznámka. Za předpokladu spojitosti funkce τ na jistém intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle \subset J$ lze pro zavedenou veličinu λ a interval $\langle\alpha, \beta\rangle$ dokázat analogická tvrzení o $l_\tau(D)$ jako jsou tvrzení 3.6–3.8 pro $s(D)$ a $\operatorname{oh}[\psi; (\alpha, \beta)]$.

Vraťme se však ještě k totálnímu ohybu. Tato veličina je aditivní v následujícím smyslu:

3.11. Věta. *Nechť ψ je jednoduchá cesta definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$, $c \in (a, b)$ a nechť existují $\tau_\psi^+(c)$, $\tau_\psi^-(c)$* (viz (1.16)). *Potom platí*

$$\operatorname{oh}[\psi; (a, b)] = \operatorname{oh}[\psi; (a, c)] + \omega^\psi(\psi(c)) + \operatorname{oh}[\psi; (c, b)]. \tag{3.19}$$

Důkaz. Zvolme posloupnost dělení $\{D^n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu (a, b) takovou, že platí $c \in D^n$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} v(D^n) = 0$. Pak podle předchozího platí

$$\lim_{n\to\infty} s(D^n) = \operatorname{oh}[\psi; (a, b)]. \tag{3.20}$$

Každé dělení D^n vyjádříme ve tvaru $D^n = D_1^n \cup D_2^n$, kde D_1^n je dělením intervalu (a, c) a D_2^n dělením intervalu (c, b). Označíme-li t'_n, t''_n nejblíže ležící dělicí body D^n od bodu c takové, že je $t'_n < c < t''_n$, lze psáti

$$s(D^n) = s(D_1^n) + \operatorname{arc}_\psi^*(t'_n, c, t''_n) + s(D_2^n).$$

Odtud provedením limitního přechodu pro $n \to \infty$ plyne podle lemmatu 3.8 a z vlastností funkce arc

$$(3.21) \qquad \lim_{n\to\infty} s(D_1^n) = \text{oh}\,[\psi; (a, c)]\,, \quad \lim_{n\to\infty} s(D_2^n) = \text{oh}\,[\psi; (c, b)]\,,$$
$$\lim \text{arc}_\psi\,(t_n', c, t_n'') = \text{arc}\,(\tau_\psi^+(c), \tau_\psi^-(c)) = \omega^\psi(\psi\,(c))\,.$$

Shrnutím vztahů (3.20) a (3.21) obdržíme snadno rovnost (3.19), kterou jsme měli dokázat.

3.12. Lemma. *Nechť ψ je jednoduchá cesta definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$, $(\alpha, \beta) \subset \langle a, b\rangle$. Potom pro $z \in \{\psi(\alpha), \psi(\beta)\}$ platí*

$$(3.22) \qquad v^\psi(z; (\alpha, \beta)) \leqq \text{oh}\,[\psi; (\alpha, \beta)]\,.$$

Důkaz. Nechť je na příklad $z = \psi(\alpha)$; položme $D = \{t_i\}_{i=0}^{n+1}$, D dělení intervalu (α, β). Potom podle (3.6) platí

$$\sum_{i=1}^{n} \text{arc}_\psi\,(t_i, \alpha, t_{i+1}) \leqq \sum_{i=1}^{n} \text{arc}_\psi^*\,(t_{i-1}, t_i, t_{i+1})\,.$$

Přechodem k supremu přes všechna dělení D intervalu (α, β) obdržíme podle věty 2.3 a definice 3.4 dokazovaný vztah (3.22).

3.13. Lemma. *Nechť ψ je jednoduchá cesta definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li* $\text{oh}\,[\psi; (a, b)] < +\infty$, *existuje $\tau_\psi^+(t)$ pro $t \in \langle a, b)$, $\tau_\psi^-(t)$ pro $t \in (a, b\rangle$.*

Důkaz. Dokažme na příklad existenci $\tau_\psi^+(t_1)$, $t_1 \in \langle a, b)$. Položíme $t_1 = \alpha < \beta \leqq b$. Z poznámky 3.5 a lemmatu 3.12 plyne $v^\psi(\psi(\alpha); (\alpha, \beta)) \leqq \text{oh}\,[\psi;(\alpha, \beta)] \leqq \text{oh}\,[\psi; (a, b)] < +\infty$. Podle lemmatu 2.8 je $\psi(t_1)$ pro parciální cestu $\psi^* = \psi|(\alpha, \beta)$ bodem ψ^*-normálním, tj. existuje spojitá větev ϑ funkce arg $[\psi^* - \psi^*(t_1)]$ na intervalu (α, β) a limita $\vartheta(t_1+) = \vartheta(\alpha+)$. Na intervalu (α, β) však platí

$$\frac{\psi^*(t) - \psi^*(t_1)}{|\psi^*(t) - \psi^*(t_1)|} = \frac{\psi(t) - \psi(t_1)}{|\psi(t) - \psi(t_1)|} = e^{i\vartheta(t)}$$

a odtud plyne limitním přechodem pro $t \to t_1+$

$$\tau_\psi^+(t_1) = e^{i\vartheta}(t^+)\,.$$

Podobně lze dokázati tvrzení o τ_ψ^-.

3.14. Věta. *Nechť ψ je jednoduchá cesta definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$; C budiž její graf. Potom platí*

$$(3.23) \qquad \sup_{\zeta\in C} v^\psi(\zeta) \leqq \text{oh}\,[\psi; (a, b)]\,.$$

Důkaz. Zřejmě se můžeme omeziti na případ oh $[\psi; (a, b)] < +\infty$ a dále na případ $\zeta = \psi(t)$, $t \in (a, b)$; dokážeme-li

$$v^{\psi}(\zeta) \leqq \text{oh}\,[\psi; (a, b)]\,,$$

pak odtud a z lemmatu 3.12 plyne žádané tvrzení. Z lemmatu 3.13 plyne existence limit vlastních $\tau_{\psi}^{+}(t)$, $\tau_{\psi}^{-}(t)$ a platí

$$v^{\psi}(\zeta) \leqq v^{\psi}(\zeta; (a, t)) + v^{\psi}(\zeta; (t, b)) \leqq$$
$$\leqq \text{oh}\,[\psi; (a, t)] + \text{oh}\,[\psi; (t, b)] \leqq \text{oh}\,[\psi; (a, b)]\,.$$

Tím jest věta 3.14 dokázána.

3.15. Věta. *Nechť τ má stejný význam jako v definici* 3.9. *Potom platí*

(3.24) $$\text{var}_{\tau}\,[J] \leqq \lambda[\tau, J] \leqq \frac{\pi}{2}\,\text{var}_{\tau}\,[J]\,.$$

Rovnost

(3.25) $$\text{var}_{\tau}\,[J] = \lambda[\tau, J]$$

nastává, právě když jest funkce τ spojitá na intervalu J.

Důkaz. Pro libovolné dělení D intervalu J plyne z (1.25) pro součty $V_{\tau}(D)$ (viz 1.3) a $l_{\tau}(D)$ (viz 3.17) nerovnost

$$V_{\tau}(D) \leqq l_{\tau}(D) \leqq \frac{\pi}{2}\,V_{\tau}(D)\,,$$

ze které (3.24) plyne přechodem k supremu přes všechna dělení D intervalu J. Předpokládejme nyní, že funkce τ je spojitá na intervalu J, a omezíme se na případ $\text{var}_{\tau}\,[J] < +\infty$. Provedeme následující odhad pro libovolné dělení D. Platí $|V_{\tau}(D) - l_{\tau}(D)| = |\sum_{k=1}^{n} |\tau(t_k) - \tau(t_{k-1})| - \text{arc}\,(\tau(t_k), \tau(t_{k-1}))|$. Budeme předpokládat, že v součtu na pravé straně jsou jen takové členy, ve kterých je $|\tau(t_k) - \tau(t_{k-1})| \neq 0$, čehož lze dosáhnout vynecháním nulových sčítanců; provedeme následující úpravu

$$\left|\sum_{k=1}^{n} |\tau(t_k) - \tau(t_{k-1})| \cdot \left(\frac{\text{arc}\,(\tau(t_k), \tau(t_{k-1}))}{|\tau(t_k) - \tau(t_{k-1})|} - 1\right)\right| \leqq$$
$$\leqq \left(\sum_{k=1}^{n} |\tau(t_k) - \tau(t_{k-1})|\right) \cdot \max_{1 \leqq k \leqq n} \left(\frac{\text{arc}\,(\tau(t_k), \tau(t_{k-1}))}{|\tau(t_k) - \tau(t_{k-1})|} - 1\right) =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} |\tau(t_k) - \tau(t_{k-1})|\right) Q(D) \leqq \text{var}_{\tau}\,[J]\, Q(D)\,.$$

Jelikož funkce τ je spojitá na intervalu J, platí pro posloupnost dělení $\{D^n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu J, pro něž $\lim_{n\to\infty} \nu(D^n) = 0$, podle lemmatu 1.19 $\lim_{n\to\infty} Q(D^n) = 0$ a tedy platí také $\lim_{n\to\infty} |V_\tau(D^n) - l_\tau(D^n)| = 0$, z čehož plyne (3.25). Předpokládejme, že nastává rovnost (3.25), z čehož odvodíme spojitost funkce τ v libovolném bodě intervalu J. Čtenář snadno nahlédne, že pro odhad $|\tau(x) - \tau(t)| < \varepsilon$ je nutno požadovat arc $(\tau(x), \tau(t)) - |\tau(x) - \tau(t)| < \varepsilon_1$, kde $\varepsilon_1 = 2 \arcsin(\varepsilon/2) - \varepsilon$. K ε_1 lze nalézti dělení D intervalu J takové, že platí var $[\tau; J] - \varepsilon_1 \leqq V_\tau(D) \leqq l_\tau(D) \leqq \lambda[\tau; J] =$ var $[\tau; J]$. Analogické tvrzení musí platit i pro libovolné zjemnění dělení D, tedy i pro $D \cup \cup \{x\} = D_1 = \{t_0 < \ldots < t_k = x < \ldots < t_n\}$. Zřejmě lze předpokládat, že dělení D je vybráno tak, že $t_0 < x < t_n$. Potom platí

$$\sum_{j=1}^{n} (\operatorname{arc}(\tau(t_j), \tau(t_{j-1})) - |\tau(t_j) - \tau(t_{j-1})|) < \varepsilon_1 ,$$

a jelikož jde o součet nezáporných sčítanců, je i

$$\operatorname{arc} \tau(t_{k+1}), \tau(x)) - |\tau(t_{k+1}) - \tau(x)| < \varepsilon_1 ,$$

$$\operatorname{arc} (\tau(x), \tau(t_{k-1})) - |\tau(x) - \tau(t_{k-1})| < \varepsilon_1 ,$$

resp.

$$|\tau(x) - \tau(t_{k-1})| < \varepsilon , \quad |\tau(x) - \tau(t_{k+1})| < \varepsilon .$$

Zvolíme-li nyní libovolné $t \in \langle t_{k-1}, t_{k+1} \rangle$, lze pomocí dělení $D_1 \cup \{t\}$ podobně dospět k nerovnosti

$$|\tau(x) - \tau(t)| < \varepsilon .$$

ze které vyplývá žádaná spojitost funkce τ v bodě x. Tím jest věta 3.15 dokázána.

3.16. Poznámka. Jestliže je ψ cesta definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$ taková, že τ_ψ existuje a je spojitá na $\langle a, b \rangle$ (v krajních bodech rozumíme spojitost zprava či zleva), potom veličina $\lambda[\tau^\psi; \langle a, b \rangle]$ se nazývá rotací cesty ψ; pojem rotace lze definovat i pro obecnější cesty užitím τ_ψ^+ resp. τ_ψ^-. Vyšetříme tento obecnější případ a vztah rotace a ohybu cesty.

3.17. Věta. *Nechť ψ je jednoduchá cesta definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť pro $t \in \langle a, b)$ existuje $t_\psi^+(t)$. Označme γ_+ systém všech reálných funkcí α^+ na intervalu $\langle a, b)$, pro něž platí*

(3.26) $$e^{i\alpha^+(t)} = \tau_\psi^+(t) , \quad t \in \langle a, b) .$$

Potom platí

(3.27) $$\lambda[\tau_\psi^+; \langle a, b)] = \inf_{\alpha^+ \in \gamma_+} \operatorname{var} [\alpha^+; \langle a, b)] .$$

Pro veličinu $\lambda[\tau_\psi^+; \langle a, b)]$, kterou nazýváme rotace cesty ψ, dále platí: je-li některá strana rovnice (3.27) konečná, lze infimum vpravo nahraditi minimem. Za analogických předpokladů a označení pro τ_ψ^- platí

$$\lambda[\tau_\psi^-; (a, b\rangle] = \inf_{\alpha^- \in \gamma_-} \operatorname{var}[\alpha^-; (a, b\rangle] . \tag{3.27'}$$

Důkaz. Pro libovolné $\alpha^+ \in \gamma_+$ a $D = \{t_i\}_{i=0}^n$ dělení intervalu $\langle a, b)$ platí pro $k = 1, \ldots, n$ (viz (1.24))

$$\operatorname{arc}(\tau_\psi^+(t_k), \tau_\psi^+(t_{k-1})) = \operatorname{arc}(e^{i\alpha^+(t_k)}, e^{i\alpha^+(t_{k-1})}) \leqq \leqq |\alpha^+(t_k) - \alpha^+(t_{k-1})| . \tag{3.28}$$

Sečtením těchto vztahů pro $k = 1, \ldots, n$ plyne po přechodu k supremu přes všechna dělení D a k infimu pro všechna $\alpha^+ \in \gamma_+$ vztah

$$\lambda[\tau_\psi^+; \langle a, b)] \leqq \inf_{\alpha^+ \in \gamma_+} \operatorname{var}_{\alpha^+} [\langle a, b)] . \tag{3.29}$$

Abychom dokázali platnost (3.27), dokážeme platnost opačné nerovnosti k nerovnosti (3.29); zřejmě se můžeme omezit na případ

$$\lambda[\tau_\psi^+; \langle a, b)] < +\infty . \tag{3.30}$$

Budeme hledat $\alpha_0^+ \in \gamma_+$, pro niž v (3.27) je dosaženo minima pravé strany, což provedeme v několika krocích:

I. Nalezneme $c \in (a, b)$ a funkci $\alpha_1^+ \in \gamma_+$ tak, že bude platit $\operatorname{var}_{\alpha_1^+} [\langle a, c\rangle] \leqq \leqq \lambda[t_\psi^+; \langle a, c\rangle]$. Vzhledem k nerovnosti (3.30) platí

$$\operatorname{var}_{\tau_\psi^+} [\langle a, b)] \leqq \lambda[\tau_\psi^+; \langle a, b)] < +\infty$$

a existuje tedy $\tau_\psi^+(a+)$. Zvolme $c \in (a, b)$ tak, že pro $t \in (a, c\rangle$ je $\operatorname{arc}(\tau_\psi^+(t), \tau_\psi^+(a+)) < < \pi/2$ a označme $F_1(\zeta)$ spojitou větev $\arg [\zeta]$ na množině

$$\left\{\zeta; |\zeta| = 1, \operatorname{arc}(\zeta; \tau_\psi^+(a+)) < \frac{\pi}{2}\right\} .$$

Budeme definovat $\alpha_1^+ \in \gamma_+$ takto:

$$\alpha_1^+(t) = F_1(\tau_\psi^+(t)) \quad \text{pro} \quad t \in (a, c\rangle , \quad \alpha_1^+(a) \in \arg [\tau_\psi^+(a)] , \tag{3.31}$$

při čemž volíme $\alpha_1^+(a)$ tak, aby platilo

$$|\alpha_1^+(a) - \alpha_1^+(a+)| = \operatorname{arc}(\tau_\psi^+(a), \tau_\psi^+(a+)) < \pi ,$$

$$\alpha_1^+(t) \in \arg \tau_\psi^+(t) ,$$

pro libovolné $t \in (c, b)$.

Zřejmě je $\alpha_1^+ \in \gamma_+$ a platí

$$\text{(3.32)} \qquad \operatorname{var}_{\alpha_1^+}[\langle a, c\rangle] = |\alpha_1^+(a) - \alpha_1^+(a+)| + \operatorname{var}_{\alpha_1^+}[(a, c\rangle] =$$
$$= \operatorname{arc}(\tau_\psi^+(a), \tau_\psi^+(a+)) + \lambda[\alpha_1^+; (a, c\rangle] \leqq \lambda[\tau_\psi^+; \langle a, c\rangle],$$

neboť pro $t_1, t_2 \in \langle a, c\rangle$ platí $|\alpha_1^+(t_1) - \alpha_1^+(t_2)| < \pi$, tj. je $|\alpha_1^+(t_1) - \alpha_1^+(t_2)| = \operatorname{arc}(e^{i\alpha_1^+(t_1)}, e^{i\alpha_1^+(t_2)}) = \operatorname{arc}(\tau_\psi^+(t_1), \tau_\psi^+(t_2))$.

II. Nechť pro $d \in (a, b)$ a libovolné $\varepsilon \in (0, d - a)$ existuje $c \in (d - \varepsilon, d)$ a funkce $\alpha^+ \in \gamma_+$ taková, že platí (3.32); potom existuje $\alpha_2^+ \in \gamma_+$ tak, že platí

$$\text{(3.33)} \qquad \operatorname{var}_{\alpha_2^+}[\langle a, d\rangle] \leqq \lambda[\tau_\psi^+; \langle a, d\rangle].$$

Z (3.30) opět plyne existence $\tau_\psi^+(d-)$; zvolíme ε tak, aby pro $t \in (d - \varepsilon, d)$ platilo $\operatorname{arc}(t_\psi^+(t), \tau_\psi^+(d-)) < \pi/2$, a pevné $c \in (d - \varepsilon, d)$. Je-li $F_2(\zeta)$ spojitá větev $\arg \zeta$ na množině

$$\left\{\zeta; |\zeta| = 1, \operatorname{arc}(\zeta, \tau_\psi^+(d-)) < \frac{\pi}{2}\right\},$$

definujeme α_2^+ takto:

$$\text{(3.34)} \qquad \begin{aligned} \alpha_2^+(t) &= \alpha^+(t) && \text{pro} \quad t \in \langle a, c\rangle, \\ \alpha_2^+(t) &= F_2(\tau_\psi^+(t)) + k && \text{pro} \quad t \in \langle c, d), \end{aligned}$$

kde k volíme tak, aby platilo $\alpha^+(c) = F_2(\tau_\psi^+(c)) + k$, $\alpha_2^+(d) \in \arg[\tau_\psi^+(d)]$, při čemž je $|\alpha_2^+(d) - \alpha_2^+(d-)| = \operatorname{arc}(\tau_\psi^+(d), \tau_\psi^+(d-)) < \pi$, $\alpha_2^+(t) = \alpha^+(t)$ pro $t \in (d, b)$. Platí zřejmě

$$\operatorname{var}_{\alpha_2^+}[\langle a, d\rangle] = \operatorname{var}_{\alpha_2^+}[\langle a, c\rangle] + \operatorname{var}_{\alpha_2^+}[\langle c, d\rangle] + |\alpha_2^+(d) - \alpha_2^+(d-)|$$

a odtud vzhledem ke konstrukci α_2^+ plyne již (3.33).

III. Označme nyní supremum všech c, k nimž existuje α^+ tak, že platí (3.32), symbolem b'. Kdyby bylo $b' < b$, bylo by možné nalézti podle II. části důkazu $\alpha_2^+ \in \gamma_+$ tak, že by platilo

$$\operatorname{var}_{\alpha_2^+}[\langle a, b'\rangle] \leqq \lambda[\tau_\psi^+; \langle a, b'\rangle].$$

Aplikací kroku I. na interval $\langle b', b\rangle$ a příslušnou parciální cestu bychom získali $c \in \langle b', b\rangle$ a $\alpha^+ \in \gamma_+$ „nastavením" α_2^+ tak, že by platilo (3.32). To je ale ve sporu s volbou b', a je tedy $b' = b$. Ostatní je zřejmé.

3.18. Lemma. *Nechť ψ je jednoduchá cesta definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$, τ_ψ^+ existuje pro $t \in \langle a, b)$ (to jest splněno například pro* oh $[\psi; (a, b)] < +\infty$). *Potom platí*

$$\text{(3.35)} \qquad \lambda[\tau_\psi^+; \langle a, b)] \leqq \text{oh}\,[\psi; (a, b)].$$

Za obdobných předpokladů platí analogické tvrzení pro τ_ψ^-:

$$(3.35') \qquad \lambda[\tau_\psi^-; (a, b\rangle] \leqq \text{oh}\,[\psi; (a, b)]\,.$$

Důkaz. Nechť $D = \{t_i\}_{i=0}^n$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro dostatečně malá $\delta > 0$ platí

$$\sigma(\delta) = \sum_{k=1}^n \text{arc}\,(\psi(t_{k-1} + \delta) - \psi(t_{k-1}), \psi(t_k + \delta) - \psi(t_k)) \leqq$$
$$\leqq \sum_{k=1}^n \text{arc}\,(\psi(t_{k-1} + \delta) - \psi(t_{k-1}), \psi(t_k) - \psi(t_{k-1} + \delta)) +$$
$$+ \sum_{k=1}^n \text{arc}\,(\psi(t_k) - \psi(t_{k-1} + \delta), \psi(t_k + \delta) - \psi(t_k)) =$$
$$= \sum_{k=1}^n (\text{arc}_\psi^*\,(t_{k-1}, t_{k-1} + \delta, t_k) + \text{arc}_\psi^*\,(t_{k-1} + \delta, t_k, t_k + \delta))\,.$$

Poslední součet lze považovat za $s(D')$ (viz (3.8)), příslušný k dělení $D' = D \cup \cup \{t_i + \delta\}_{i=0}^n$. Ale pro $s(D')$ platí odhad

$$s(D') \leqq \text{oh}\,[\psi; (a, b)]\,.$$

Po provedení limitního přechodu pro $\delta \to 0_+$ obdržíme

$$\sum_{k=1}^n \text{arc}\,(\tau_\psi^+(t_{k-1}), \tau_\psi^+(t_k)) \leqq \text{oh}\,[\psi; (a, b)]\,.$$

Přejdeme-li na levé straně k supremu přes všechna možná dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, obdržíme vztah (3.35). Vztah (3.35') by se dokazoval obdobně.

3.19. Lemma. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$, $\psi(a) \neq \psi(b)$ a $\tau_\psi^+(t)$ existuje pro $t \in \langle a, b)$. Potom existuje $d \in (a, b)$ tak, že platí*

$$(3.36) \qquad \text{arc}\,(\psi(b) - \psi(a), \tau_\psi^+(d)) \leqq \frac{\pi}{2}\,.$$

Důkaz. Předpokládejme, že $\psi(a) = 0$, $\psi(b) > 0$. Z předpokladu $\text{arc}\,(\tau_\psi^+(t), 1) > > \pi/2$ pro $t \in (a, b)$ by vyplývalo $\text{Re}\,\tau_\psi^+(t) < 0$ pro $t \in (a, b)$ a funkce $\text{Re}\,\psi$ by byla klesající zprava v každém bodě intervalu (a, b); podle 1.31 by byla $\text{Re}\,\psi$ klesající na intervalu $\langle a, b\rangle$, což jest ve sporu s $\psi(a) < \psi(b)$; tímto sporem jest lemma 3.19 dokázáno.

3.20. Lemma. *Nechť ψ je cesta definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$, $\psi(a) \neq \psi(b)$. Nechť $\tau_\psi^+(t)$, $\tau_\psi^+(t-)$ existují pro $t \in (a, b)$, $\sigma = \sup_{t \in (a,b)} \text{arc}\,(\tau_\psi^+(t), \tau_\psi^+(t-))$. Je-li $\lambda[\tau_\psi^+; (a, b)] < \pi/4$, existuje $c \in (a, b)$ tak, že platí* $\text{arc}\,(\tau_\psi^+(c), \psi(b) - \psi(a)) \leqq \sigma$.

Důkaz. Lze opět předpokládat $\psi(a) = 0$, $\psi(b) > 0$. Zvolme $c \in (a, b)$ tak, aby platilo

$$(3.37) \qquad |\mathrm{Im}\, \psi(c)| = \max_{a \leqq t \leqq b} |\mathrm{Im}\, \psi(t)| .$$

Předpokládejme pro určitost například $\mathrm{Im}\, \psi(t) \geqq 0$. Kdyby bylo $\mathrm{Im}\, \tau_\psi^+(c-) < 0$, byla by $\mathrm{Im}\, \psi$ klesající zprava v každém bodě jistého intervalu $\langle c - \delta, c)$ a vzhledem k lemmatu 1.31 by nemohlo být

$$(3.38) \qquad \mathrm{Im}\, \psi(c) = \max_{a \leqq t \leqq b} \mathrm{Im}\, \psi(t) .$$

Platí tedy

$$(3.39) \qquad \mathrm{Im}\, \tau_\psi^+(c-) \geqq 0 .$$

Z analogických důvodů musí být

$$(3.40) \qquad \mathrm{Im}\, \tau_\psi^+(c) \leqq 0 .$$

Kdyby nyní měla čísla $\mathrm{Re}\, \tau_\psi^+(c)$, $\mathrm{Re}\, \tau_\psi^+(c-)$ opačná znaménka, plynulo by odtud za pomoci (3.39) a (3.40) $\mathrm{arc}\,(\tau_\psi^+(c), \tau_\psi^+(c-)) \geqq \pi/2$, což jest ve sporu s předpokladem $\sigma < \pi/4$. Stejně tak nemůže být některé z čísel $\mathrm{Re}\, \tau_\psi^+(c)$, $\mathrm{Re}\, \tau_\psi^+(c-)$ rovno nule. Jsou to tedy dvě nenulová čísla stejného znamení. Kdyby obě tato čísla byla záporná, plynulo by odtud vzhledem k (3.39) a (3.40)

$$\sigma \geqq \mathrm{arc}\,(\tau_\psi^+(c), \tau_\psi^+(c-)) = \mathrm{arc}\,(\tau_\psi^+(c), -1) + \mathrm{arc}\,(\tau_\psi^+(c-), -1) ,$$

tj. speciálně odtud vyplývá

$$(3.41) \qquad \mathrm{arc}\,(\tau_\psi^+(c), -1) \leqq \frac{\pi}{4} .$$

Podle lemmatu 3.19 existuje $d \in (a, b)$ tak, že platí

$$(3.42) \qquad \mathrm{arc}\,(\tau_\psi^+(d), 1) \leqq \frac{\pi}{2} ,$$

takže z posledních dvou vztahů plyne

$$\lambda[\tau_\psi^+; (a, b)] \geqq \mathrm{arc}\,(\tau_\psi^+(c), \tau_\psi^+(d)) \geqq \frac{\pi}{4} ,$$

což jest ve sporu s předpoklady. Je tedy $\mathrm{Re}\, \tau_\psi^+(c) > 0$, $\mathrm{Re}\, \tau_\psi^+(c-) > 0$, což spolu s (3.39) a (3.40) dává

$$\sigma \geqq \mathrm{arc}\,(\tau_\psi^+(c), \tau_\psi^+(c-)) = \mathrm{arc}\,(\tau_\psi^+(c), 1) + \mathrm{arc}\,(\tau_\psi^+(c-), 1)$$

tj. speciálně je

$$\mathrm{arc}\,(\tau_\psi^+(c), 1) = \mathrm{arc}\,(\tau_\psi^+(c), \psi(b) - \psi(a)) \leqq \sigma ,$$

což bylo dokázati.

3.21. Věta. *Nechť ψ je jednoduchá cesta definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť pro $t \in \langle a, b)$ existuje $\tau_\psi^+(t)$ (to jest splněno například pro* oh $[\psi; (a, b)] < +\infty$). *Potom platí*

$$\lambda[\tau_\psi^+; (a, b)] = \lambda[\tau_\psi^+; \langle a, b)] = \text{oh}\,[\psi; (a, b)]\,. \tag{3.43}$$

Za analogických předpokladů platí pro τ_ψ^-

$$\lambda[\tau_\psi^-; (a, b)] = \lambda[\tau_\psi^-; (a, b\rangle] = \text{oh}\,[\psi; (a, b)]\,. \tag{3.43'}$$

Důkaz. Vzhledem k (3.35) a zřejmé nerovnosti

$$\lambda[\tau_\psi^+; (a, b)] \leqq \lambda[\tau_\psi^+; \langle a, b)]$$

k důkazu (3.43) stačí ověřit platnost vztahu

$$\text{oh}\,[\psi; (a, b)] \leqq \lambda[\tau_\psi^+; (a, b)]\,,$$

který opět stačí dokázat pro případ

$$\lambda[\tau_\psi^+; (a, b)] < +\infty\,. \tag{3.44}$$

Z nerovnosti (3.44) vyplývá existence $\tau_\psi^+(t-)$ (vzhledem k vlastnostem funkcí s konečnou variací) a platí zřejmě

$$\sum_{t \in (a,b)} \text{arc}\,(\tau_\psi^+(t), \tau_\psi^+(t-)) \leqq \lambda[\tau_\psi^+; (a, b)]\,.$$

K libovolně zvolenému $\varepsilon \in (0, \pi/4)$ existují body $t_1 < \ldots < t_n$ v intervalu (a, b) tak, že

$$\sum_{\substack{t \in (a,b) \\ t \neq t_1, \ldots, t_n}} \text{arc}\,(\tau_\psi^+(t), \tau_\psi^+(t-)) < \varepsilon\,. \tag{3.45}$$

Položme $t_0 = a$, $t_{n+1} = b$ a $\sigma_k = \sum_{t \in (t_{k-1}, t_k)} \text{arc}\,(\tau_\psi^+(t), \tau_\psi^+(t-))$; potom lze nerovnost (3.45) přepsat do tvaru

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sigma_k < \varepsilon\,.$$

Případným přidáním dalších bodů t_i můžeme dosáhnout toho, že platí

$$\lambda[\tau_\psi^+; (t_{k-1}, t_k)] < \frac{\pi}{4}\,, \quad 1 \leqq k \leqq n + 1\,.$$

Za pomoci lemmatu 3.20 nahlédneme, že existují body $u_k \in (t_{k-1}, t_k)$ tak, že platí

$$\text{arc}\,(\tau_\psi^+(u_k), \psi(t_k) - \psi(t_{k-1})) \leqq \sigma_k\,.$$

Odtud však vyplývá

$$\operatorname{arc}^*_\psi(t_{k-1}, t_k, t_{k+1}) \leqq \operatorname{arc}(\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}), \tau^+_\psi(u_k)) +$$
$$+ \operatorname{arc}(\tau^+_\psi(u_k), \tau^+_\psi(u_{k+1})) + \operatorname{arc}(\tau^+_\psi(u_{k+1}), \psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)) \leqq$$
$$\leqq \operatorname{arc}(\tau^+_\psi(u_k), \tau^+_\psi(u_{k+1})) + \sigma_k + \sigma_{k+1}\,.$$

Sečtením pro $k = 1, 2, \ldots, n$ obdržíme vztah

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc}^*_\psi(t_{k-1}, t_k, t_{k+1}) \leqq 2 \sum_{k=1}^{n+1} \sigma_k +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc}(\tau^+_\psi(u_k), \tau^+_\psi(u_{k+1})) \leqq 2\varepsilon + \lambda[\tau^+_\psi; (a, b)]\,.$$

Tato nerovnost však zůstane zachována i pro každé zjemnění D zkonstruovaného dělení $\{t_i\}_{i=0}^{n+1}$. Z toho plyne

$$\operatorname{oh}[\psi; (a, b)] \leqq 2\varepsilon + \lambda[\tau^+_\psi; (a, b)]$$

a důkaz je hotov.

3.22. Poznámka. Z předchozích vět vyplývá, že pro jednoduchou cestu ψ definovanou na intervalu $\langle a, b\rangle$ je oh $[\psi; \langle a, b\rangle] < +\infty$, právě když cesta ψ má konečnou rotaci v Radonově smyslu – na příklad viz [10], str. 243 neb tam citované původní práce. Ohyb cesty podrobně studoval též Ka. Iseki – viz na příklad [13], resp. řada dalších prací v ročníku 1962 téhož časopisu od téhož autora.

Literatura

[1] *J. Král:* On cyclic and radial variations of a plane path, Comment. Math. Univ. Carolinae *4* (1963), No 1, 3–9.

[2] *J. Král:* On the logaritmic potential of the double distribution, Czech. Mat. J. *14* (*89*) 1964, 306–321.

[3] *J. Král:* Non-tangential limits of the logarithmic potential, Czech. Math. J. *14* (*89*) 1964, 455–482.

[4] *J. Král:* The Fredholm radius of an operator in potential theory, Czech. Math. J. *15* (*90*) 1965, 454–473, 565–588.

[5] *J. Král:* Some inequalities concerning the cyclic and radial variations of a plane path-curve, Czech. Mat. J. *14* (*89*) 1964, 271–280.

[6] *J. Král, J. Marek:* Преобразование интеграла Стилтеса-Лебега, Czech. Math. J. *8* (*83*) 1958, 86–93.

[7] *J. Mařík:* Преобразование одномерных интегралов, Čas. pro pěst. mat. *82* (1957), 93–98.

[8] *G. Nöbeling:* Eine Bemerkung über die Länge einer stetigen Kurve, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wissensch. 1949, 41–45.

[9] *K. Kuratowski:* Topologie II, MM, PWN, vyd. 2, Warszawa 1952.

[10] *F. Riesz - B. Nagy:* Лекции по функциональному анализу. И.И.Л. Москва 1954.
[11] *R. Sikorski:* Funkcje rzeczywiste I., PWN, Warszawa 1958.
[12] *S. Saks - A. Zikmund:* Analytic functions, PWN, Warszawa—Wroclaw 1952.
[13] *Ka. Iseki:* On the Bend of Continuous Plane Curves, Proc. of the Japan Acad. 1961, 336—341.

Adresy autorů: Jiří Štulc, Loretánské nám. 3, Praha 1 (Výzkumný ústav matematických strojů); Jiří Veselý, Malostranské nám. 25, Praha 1 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

Summary

CONNECTION OF CYCLIC AND RADIAL VARIATIONS OF A PATH WITH ITS LENGTH AND BEND

JIŘÍ ŠTULC, JIŘÍ VESELÝ, Praha

In the present paper the detailed proofs of the assertions announced in [1] without proofs are presented. The estimations of the lenght of the path by the values of cyclic and radial variations of the path are established. In the last part of the article the bend of the path is investigated in the connection with the Radon rotation of that one.

Definition 1. Let ψ be path (i.e. a continuous mapping of a one-dimensional interval J into E_2 – two-dimensional Euclidean space), $z \in E_2$. Let us define functions v^ψ, u^ψ as follows:

$$v^\psi(z) = \sum_{I \in \gamma} \operatorname{var}\left[\frac{\psi(t) - z}{|\psi(t) - z|}; I\right], \quad u^\psi(z) = \operatorname{var}\left[|\psi(t) - z|; J\right].$$

(γ denotes the system of all components of the set $J - \psi^{-1}(z)$). The functions u^ψ, v^ψ are called the radial and cyclic variation of the path ψ respectively.

The following estimations are valid:

Let ψ be a path defined on an interval J. Let z^1, z^2, z^3 be points, which do not lie on the same line or z^4, z^5 be such points, that the graph of the path ψ does not intersect the line determined by the points z^4, z^5, or z^0 be an arbitrary point. Then var $[\psi; J] < +\infty$ in the case that one of the following conditions is satisfied:

1. $\sum_{j=1}^{3} v^\psi(z^j) < +\infty$,
2. $v^\psi(z^4) + v^\psi(z^5) < +\infty$,
3. $\sum_{j=1}^{3} u^\psi(z^j) < +\infty$,
4. $u^\psi(z^4) + u^\psi(z^5) < +\infty$,
5. $u^\psi(z^0) + v^\psi(z^0) < +\infty$.

Definition 2. Let ψ be a path defined on an interval $\langle a, b\rangle$, $D = \{a = t_0 < \ldots < t_n = b\}$. Let us denote $s(D) = \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{arc}^*_\psi (t_{k-1}, t_k, t_{k+1})$. (By the symbol $\operatorname{arc}^*_\psi (t_{k-1}, t_k, t_{k+1})$ we mean an absolute enclosed by the vectors $\psi(t_k)\,\psi(t_{k-1})$ and $\psi(t_{k+1})\,\psi(t_k)$. The symbol z^1z^2 denotes the vector $(z^2 - z^1)$.) Now we put oh $[\psi, J] = \sup_D s(D)$. Let t be a point of the interval J. We define τ^+_ψ, τ^-_ψ, by the formulae

$$\tau^+_\psi(t) = \lim_{u \to t+} \frac{\psi(u) - \psi(t_0)}{|\psi(u) - \psi(t)|}, \quad -\tau^-_\psi(t) = \lim_{u \to t-} \frac{\psi(u) - \psi(t)}{|\psi(u) - \psi(t)|}, \quad \text{respectively},$$

if the above limits exist. If $\tau^+_\psi(t) = \tau^-_\psi(t)$, we denote this common value by $\tau_\psi(t)$. Let τ be complex function defined on the interval J; $|\tau| = 1$ for $t \in J$. We put $\lambda_\tau(D) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{arc}(\tau(t_i), \tau(t_{i-1}))$, where $\operatorname{arc}(\tau(t_i), \tau(t_{i-1}))$ describes the absolute value of the angle between these complex numbers interpreted as vectors. We denote $\lambda[\tau, J] = \sup_D l_\tau(D)$.

The following assertions are valid:

i) $\operatorname{var}[\tau, J] \leqq \lambda[\tau, J] < \frac{1}{2}\pi \operatorname{var}[\tau, J]$ for every τ from the definition 2.

ii) If ψ is a simple path on the interval $\langle a, b\rangle$ and C its graph, then

$$\sup_{\zeta \in C} v^\psi(\zeta) \leqq \text{oh}[\psi; \langle a, b\rangle].$$

iii) Let ψ be a simple path defined on the interval $\langle a, b\rangle$. Then $\lambda[\tau^+_\psi; (a, b)] = \lambda[\tau^+_\psi; \langle a, b)] = \text{oh}[\psi; (a, b)]$ in the case, that $\tau^+_\psi(t)$ exist on the interval $\langle a, b)$. (Analogous assertion for τ^-_ψ is valid, too.)

Remark. The quantity $\lambda[\tau, J]$ of the path ψ for which τ_ψ exists is called the rotation in the Radon sense.