ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 93 * PRAHA 15. 2. 1968 * ČÍSLO 1

O MERATEĽNÝCH MNOŽINÁCH V TOPOLOGICKÝCH PRIESTOROCH

BELOSLAV RIEČAN, Bratislava

(Došlo dňa 4. júla 1966)

Z teórie miery je známa táto veta (napr. [3], [6]): *Ak X je metrický priestor a μ Carathéodoryho vonkajšia miera, tak všetky otvorené množiny sú μ-merateľné.* Známe sú aj niektoré analógie, prípadne zovšeobecnenia tohto tvrdenia v prípade, že X je topologický priestor určitého typu ([1], [2], [5]). V tomto príspevku podávame prehľad takých tvrdení. Okrem toho uvádzame aj nové výsledky týkajúce sa merateľnosti množín jednak v regulárnych, jednak v uniformných priestoroch.

Všetky uvádzané tvrdenia vyplývajú z vety 1. Veta 1 je formulovaná abstrakne, čo umožňuje aplikovať ju na viacero typov priestorov resp. vonkajších mier. Jej dôkaz je modifikáciou známeho dôkazu pochádzajúceho pravdepodobne od C. CARATHÉODORYHO.

1. Abstraktné priestory. Veta 1. *Nech X je neprázdna množina, H dedičný σ-okruh, $\mathcal{R}$ symetrická relácia definovaná na systéme všetkých podmnožín X s touto vlastnosťou: Ak $E \mathcal{R} F$, $E_1 \subset E$, $F_1 \subset F$, $E_1, F_1 \in H$, tak aj $E_1 \mathcal{R} F_1$. Nech μ je vonkajšia miera definovaná na H tej vlastnosti, že $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$, len čo $E, F \in H$, $E \mathcal{R} F$. Konečne nech $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, $V_{n+1} \subset V_n$, $V_1 \in H$, $C \mathcal{R} (X - V_n)$, $(V_n - V_{n+1}) \mathcal{R} V_{n+2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.*

Potom je množina C μ-merateľná.

Dôkaz. Nech E je ľubovoľná množina z H. Najprv dokážeme, že

$$\mu(E - C) = \lim \mu(E - V_n)\,. \tag{1}$$

Nerovnosť $\mu(E - C) \geqq \lim \mu(E - V_n)$ je zrejmá. K dôkazu opačnej nerovnosti použijeme vzťah

$$E - C = E - V_{2k} \cup \bigcup_{n=k+1}^{\infty} E \cap (V_{2n-2} - V_{2n-1}) \cup \bigcup_{n=k+1}^{\infty} E \cap (V_{2n-1} - V_{2n}),$$

odkiaľ dostávame

$$\mu(E - C) \leqq \mu(E - V_{2k}) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(E \cap (V_{2n-2} - V_{2n-1})) + \tag{2}$$
$$+ \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(E \cap (V_{2n-1} - V_{2n}))\,.$$

Zo vzťahov $E \cap V_{2n} \mathscr{R} E \cap (V_{2n-2} - V_{2n-1})$, $E \cap V_{2n+1} \mathscr{R} E \cap (V_{2n-1} - V_{2n})$ dostávame nerovnosti

$$\mu(E - V_{2k-1}) \geqq \mu\left(\bigcup_{n=2}^{k} E \cap (V_{2n-2} - V_{2n-1})\right) = \sum_{n=2}^{k} \mu(E \cap (V_{2n-2} - V_{2n-1}))\,,$$
$$\mu(E - V_{2k}) \geqq \sum_{n=1}^{k} \mu(E \cap (V_{2n-1} - V_{2n}))\,,$$

takže (1) platí, ak aspon jeden z nekonečných radov $\sum_{n=2}^{\infty} \mu(E \cap (V_{2n-2} - V_{2n-1}))$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap (V_{2n-1} - V_{2n}))$ diverguje. V opačnom prípade dostávame z (2) nerovnosť

$$\mu(E - C) \leqq \lim \mu(E - V_{2k})$$

a odtiaľ (1).

Z (1) a zo vzťahov $E \cap C \mathscr{R} (E - V_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ dostávame

$$\mu(E) \geqq \lim \mu((E \cap C) \cup (E - V_n)) = \mu(E \cap C) + \lim \mu(E - V_n) =$$
$$= \mu(E \cap C) + \mu(E - C)\,.$$

Odtiaľ vyplýva μ-merateľnosť množiny C.

Veta 1'. *Nech X je metrický priestor, μ je vonkajšia miera v X taká, že $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, len čo* $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. *Potom je každá uzavretá množina μ-merateľná.*

Dôkaz. Nech C je uzavretá množina. Definujme $E \mathscr{R} F$ vtedy a len vtedy, keď $\operatorname{dist}(E, F) > 0$. Teraz stačí vo vete 1 položiť $V_n = \{x : \operatorname{dist}(x, C) < 1/n\}$.

2. Regulárne priestory. Regulárnym topologickým priestorom rozumieme topologický priestor X, v ktorom ku každej uzavretej množine F a každému prvku $x \in F$ existujú disjunktné otvorené množiny obsahujúce x resp. F. Teda regulárny priestor nemusí byť Hausdorffovým ([4]).

Definícia 1. Znakom $\mathscr{C}$ budeme značiť systém všetkých vonkajších mier μ definovaných na nejakom dedičnom σ-okruhu H s touto vlastnosťou: Ak $\bar{A} \subset U$, $\bar{B} \subset V$, $U \cap V = \emptyset$, U, V sú otvorené, tak $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.[1])

[1]) Pozri [1], [5]. V [5] sa každá vonkajšia miera patriaca do $\mathscr{C}$ nazýva Carathéodoryho.

Veta 2. *Nech X je regulárny priestor, $\mu \in \mathscr{C}$ a nech ku každej kompaktnej množine C existuje otvorená $U \in H$ tak, že $U \supset C$. Potom každá kompaktná G_δ množina je μ-merateľná.*

Dôkaz. Nech C je ľubovoľná kompaktná G_δ množina. Na systéme všetkých podmnožín X zavedieme reláciu $\mathscr{R}$ takto: $E \mathscr{R} F$, ak existujú otvorené disjunktné množiny U, V tak, že $\bar{E} \subset U$, $\bar{F} \subset V$. Je zrejmé, že relácia $\mathscr{R}$ a miera μ spĺňajú predpoklady vety 1. Ukážeme, že aj C spĺňa predpoklady tej vety.

Podľa predpokladu existujú otvorené množiny U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ tak, že $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Indukciou zostrojíme postupnosť otvorených množín $\{W_n\}$ tak, aby

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n\,, \quad \overline{W}_{n+1} \subset W_n \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Položme $W_1 = U_1$ a predpokladajme, že sme už zostrojili množiny $W_1, \ldots, W_n$ tak, že $C \subset W_i \subset U_i$, $\overline{W}_{i+1} \subset W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$. Z regulárnosti X a kompaktnosti C vyplýva existencia otvorenej množiny W_{n+1} takej, že $C \subset W_{n+1}$, $\overline{W}_{n+1} \subset U_{n+1} \cap W_n$. Teda $\overline{W}_{n+1} \subset W_n$, $W_{n+1} \subset U_n$. Odtiaľ tiež vyplýva, že $C \subset \bigcap W_n \subset \bigcap U_n = C$, teda $C = \bigcap W_n$.

Položme $V_n = W_{3n-2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ľahko nahliadneme, že C spĺňa predpoklady vety 1 pri tejto voľbe V_n.

Dôsledok ([5]). Ak je X lokálne kompaktný Hausdorffov topologický priestor, μ vonkajšia miera definovaná na systéme všetkých podmnožín X, $\mu \in \mathscr{C}$, tak každá kompaktná G_δ množina je μ-merateľná.

3. Lokálne kompaktné priestory. V lokálne kompaktnom Hausdorffovom priestore môžme žiadať menej od vonkajšej miery μ, aby platilo tvrdenie vety 2. Množinu A nazveme ohraničenou, ak existuje kompaktná množina D, ktorej je A časťou.

Definícia 2. Znakom $\mathscr{D}$ budeme značiť systém všetkých vonkajších mier μ definovaných na nejakom dedičnom σ-okruhu H, s touto vlastnosťou: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, len čo $A, B \in H$ sú ohraničené množiny s disjunktnými uzávermi.

Veta 3. *Nech X je lokálne kompaktný Hausdorffov topologický priestor, $\mu \in \mathscr{D}$ a všetky kompaktné množiny patria do H. Potom každá kompaktná G_δ množina je μ-merateľná.*

Dôkaz. Reláciu $\mathscr{R}$ zavedieme takto: $E \mathscr{R} F$ vtedy a len vtedy, ak sú E, F ohraničené množiny s disjunktnými uzávermi. Ak C je kompaktná G_δ množina, je $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, pričom U_n môžeme voliť tak, aby boli ohraničené. Zvyšok dôkazu je rovnaký ako vo vete 2.

4. Normálne priestory. Topologický priestor je normálny, ak ľubovoľné disjunktné uzavreté množiny majú disjunktné okolia. Normálny priestor nemusí byť ani Hausdorffov, ani regulárny. V normálnom priestore má systém $\mathscr{C}$ túto ekvivalentnú charakteristiku: Vonkajšia miera $\mu \in \mathscr{C}$ vtedy a len vtedy, ak $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ pre všetky $A, B \in H$ s disjunktnými uzávermi.[2])

Veta 4. *Ak X je normálny topologický priestor, μ vonkajšia miera zo systému $\mathscr{C}$, definovaná na systéme všetkých podmnožín X, tak každá uzavretá G_δ množina je μ-merateľná.*

Dôkaz. Zavedieme $E \mathscr{R} F$ vtedy a len vtedy, ak $\bar{E} \cap \bar{F} = 0$. Zvyšok dôkazu je zhodný s dôkazom vety 2.

Dôsledok. Ak je X normálny topologický priestor, μ vonkajšia miera zo systému $\mathscr{C}$, definovaná na systéme všetkých podmnožín X, tak každá otvorená F_σ množina je μ-merateľná.

5. Uniformné priestory. Nech X je uniformný priestor, $\mathscr{A}$ uniformita. Znakom $\mathscr{U}$ budeme značiť bázu uniformity $\mathscr{A}$ pozostávajúcu zo všetkých otvorených symetrických prvkov $\mathscr{A}$ ([4]). Množina $U \subset X$ je otvorená (v uniformnej topológii), ak ľubovoľnému $x \in U$ existuje $V \in \mathscr{U}$ tak, že $\{y : (x, y) \in V\} \subset U$. Je známe, že každý uniformný priestor je regulárny vo svojej uniformnej topológii a teda platí v ňom veta 2. Našim cieľom je dokázať vetu 2 za slabšieho predpokladu o vonkajšej miere μ.

Definícia 3. Znakom $\mathscr{E}$ budeme značiť systém všetkých vonkajších mier μ, definovaných na nejakom dedičnom σ-okruhu H, s touto vlastnosťou: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, ak $A, B \in H$, $A \times B \subset X \times X - V$ pre nejaké $V \in \mathscr{U}$.

Poznámka. Zrejme $\mathscr{C} \subset \mathscr{E}$. V metrickom priestore sa zhoduje pojem vonkajšej miery z $\mathscr{E}$ s pojmom Carathéodoryho vonkajšej miery (tj. vonkajšej miery μ takej, že $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, len čo $\operatorname{dist}(A, B) > 0$). Pritom uniformita priestoru je vytvorená bázou $\mathscr{U} = \{\{(x, y) : \operatorname{dist}(x, y) < r\} : r > 0\}$.

Veta 5. *Nech X je uniformný priestor, $\mu \in \mathscr{E}$ a nech každá kompaktná množina má okolie patriace do H. Potom každá kompaktná G_δ množina je μ-merateľná.*

Dôkaz. Na systéme všetkých podmnožín X zavedieme reláciu $\mathscr{R}$ takto: $E \mathscr{R} F$ vtedy a len vtedy, ak existuje $V \in \mathscr{U}$ tak, že $E \times F \subset X \times X - V$. Relácia $\mathscr{R}$ a vonkajšia miera μ spĺňajú predpoklady vety 1. Nech C je ľubovoľná kompaktná G_δ množina.

Ľahko dokážeme toto tvrdenie: Ak $E \times F \subset X \times X - U$ pre nejaké $U \in \mathscr{U}$, tak existuje otvorená množina $V \supset E$ a $W \in \mathscr{U}$ tak, že $E \times V' \subset X \times X - W$ a $V \times F \subset X \times X - W$. Skutočne, zvoľme $W \in \mathscr{U}$ tak, aby $W = W^{-1}$ a $W \circ W \subset U$,[3])

[2]) Pozri [1]; miery z $\mathscr{C}$ sa v [1] nazývajú τ-aditívne, pričom τ je topológia v X.

[3]) $W \circ W = \{(x, y)$: existuje $z \in X$ tak, že $(x, z) \in W, (z, y) \in W.\}$

$V = \{y$: existuje $x \in E$, $(x, y) \in W\}$. Nech $(x, y) \in E \times V'$ tj. $x \in E$, $y \notin V$. Keby $(x, y) \in W$, potom by $y \in V$, čo je spor. Teda $E \times V' \subset X \times X - W$. Nech $(y, x) \in \in V \times F$ tj. $x \in F$, $(y, z) \in W$ pre nejaké $z \in E$. Keby $(x, y) \in W$, potom by $(x, z) \in \in W_\circ W \subset U$, pričom $x \in F$, $z \in E$, čo nie je možné. Preto $(x, y) \in X \times X - W$.

O množine C dokážeme, že spĺňa predpoklady vety 1. Predovšetkým, $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, U_n sú otvorené, $U_{n+1} \subset U_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Položme $V_1 = U_1$ a predpokladajme, že už je zostrojená postupnosť otvorených množín $V_1, V_2, \ldots, V_n$ tak, že $C \subset V_i \subset U_i$, $C \times V_i' \subset W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $V_i' \times V_{i+1} \subset W_i$, pre nejaké $W_i \in \mathscr{U}$ $(i = 1, 2, \ldots \ldots, n - 1)$. Zostrojíme V_{n+1}. Pretože X je regulárny a C je kompaktná množina, existuje $U \in \mathscr{U}$ tak, že $C \times (V_n \cap U_{n+1})' \subset X - U$. Ako sme ukázali vyššie, existuje otvorená množina V_{n+1} a prvok W_{n+1} bázy uniformity $\mathscr{U}$ tak, že $C \subset V_{n+1}$, $C \times \times V_{n+1}' \subset X \times X - W_{n+1}$ a $V_{n+1} \times (V_n \cap U_{n+1})' \subset X \times X - W_{n+1}$.

Zostrojili sme teda postupnosť $\{V_n\}$ otvorených množín tak, že $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, $C \mathscr{R} V_n$, $(V_n - V_{n+1}) \mathscr{R} V_{n+2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Tým je dôkaz vety skončený.

6. Φ-normálne priestory. Nech Φ je vonkajšia miera definovaná na systéme všetkých podmnožín topologického priestoru X. X sa nazýva Φ-normálny,[4]) ak k ľubovoľnej otvorenej množine U, uzavretej množine $C \subset U$, ľubovoľnej množine E konečnej vonkajšej miery a ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existujú otvorená množina D a uzavretá množina C_1 tak, že

$$C_1 \subset C \cap D\,, \quad \bar{D} \subset U\,, \quad \Phi(E \cap (C - C_1)) < \varepsilon\,.$$

Veta 6.[5]) *Nech X je Φ-normálny priestor. Nech $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B)$, len čo $\bar{A} \cap \bar{B} = 0$. Potom každá uzavretá G_δ množina je Φ-merateľná.*

Dôkaz. Nech $E \subset X$ je množina konečnej Φ-miery. Položme $\mu_E(A) = \Phi(E \cap A)$ pre všetky $A \subset X$. Nech D je ľubovoľná uzavretá G_δ množina. K tomu, aby sme dokázali, že D je Φ-merateľná, stačí dokázať, že D je μ_E-merateľná pre každú množinu E konečnej Φ-miery.[6]) Skutočne, ak je $\Phi(E) = \infty$, tak $\Phi(E) \geqq \Phi(E \cap D) + + \Phi(E - D)$. Ak $\Phi(E) < \infty$, tak $\Phi(E) = \mu_E(E) = \mu_E(E \cap D) + \mu_E(E - D) = = \Phi(E \cap D) + \Phi(E - D)$.

Nech je teda $E \subset X$ ľubovoľná množina konečnej Φ-miery, D ľubovoľná uzavretá G_δ množina; píšme $\mu = \mu_E$. Máme dokázať, že D je μ-merateľná.

Podľa predpokladu existuje postupnosť otvorených množín $\{U_n\}$ tak, že $D = = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Z Φ-normálnosti priestoru X vyplýva ku každému $\varepsilon > 0$ existencia postup-

---

[4]) [1], definícia 2.4.

[5]) [1], veta 2.17.

[6]) [1], lema 2.16.

nosti otvorených množín $\{V_n\}$ a uzavretých množín $\{C_n\}$ s týmito vlastnosťami:

$$C_0 = D\,, \quad C_{n+1} \subset V_{n+1} \subset \bar{V}_{n+1} \subset V_n \cap U_n\,,$$

$$C_{n+1} \subset C_n\,, \quad \mu(C_n - C_{n+1}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Odtiaľ vyplýva

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \subset D\,, \quad \mu(D - \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n) < \varepsilon\,.$$

Aplikujme teraz vetu 1 na množiny $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ a V_n $(n = 1, 2, \ldots)$, pričom $E \mathcal{R} F$ vtedy a len vtedy, keď $\bar{E} \cap \bar{F} = 0$. Podľa vety 1 je C μ-merateľná.

Zatiaľ sme teda ku každému $\varepsilon > 0$ našli μ-merateľnú množinu $M \subset D$ tak, že $\mu(D - M) < \varepsilon$. Nech $\{M_n\}$ je postupnosť μ-merateľných množín, pre ktoré $M_n \subset D$, $\mu(D - M_n) < 1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Potom je $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ μ-merateľná, $M \subset D$, $\mu(D - M) = 0$. Odtiaľ ľahko vyplýva aj μ-merateľnosť množiny D.

7. Φ-regulárne priestory. Nech Φ je vonkajšia miera definovaná na systéme všetkých podmnožín topologického priestoru X. Priestor X nazveme Φ-regulárnym, ak k ľubovoľnej otvorenej množine U, ľubovoľnej kompaktnej množine $C \subset U$, ľubovoľnej množine E konečnej Φ-miery a ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ existujú otvorená množina V a kompaktná množina D tak, že

$$D \subset C\,, \quad D \subset V\,, \quad \bar{V} \subset U\,, \quad \Phi(E \cap (C - D)) < \varepsilon\,.$$

Veta 7. *Nech X je Φ-regulárny topologický priestor. Nech $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B)$, len čo existujú disjunktné otvorené množiny U, V, pre ktoré je $\bar{A} \subset U$, $\bar{B} \subset V$. Potom každá kompaktná G_δ množina je Φ-merateľná.*

Dôkaz je analogický dôkazu vety 6.

8. Carathéodoryho vlastnosť. Nech X je abstraktný priestor, μ vonkajšia miera definovaná na systéme všetkých podmnožín X. Reálna funkcia f definovaná na priestore X má Carathéodoryho vlastnosť, ak pre všetky α je $\{x : f(x) > \alpha\}$ merateľná, tj. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ pre ľubovoľné množiny A, B, pre ktoré je $A \subset \{x : f(x) > \alpha\}$, $B \subset \{x : f(x) \leqq \alpha\}$.[7])

Veta 8.[8]) *Nech $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ pre všetky $A, B \subset X$, pre ktoré je* $\inf \{f(x) : x \in A\} > \sup \{f(x) : x \in B\}$. *Potom má f Carathéodoryho vlastnosť.*

[7]) Pozri [2]. Bežnejší názov pre funkcie s Carathéodoryho vlastnosťou je merateľná funkcia.
[8]) Pozri [2].

Dôkaz. Položme $C = \{x : f(x) \leqq \alpha\}$, $V_n = \{x : f(x) \leqq \alpha + 1/n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Pre $U, V \subset X$ definujeme $U \mathscr{R} V$ vtedy a len vtedy, ak $\sup \{f(x) : x \in U\} < \inf \{f(x) : x \in V\}$, alebo $\sup \{f(x) : x \in V\} < \inf \{f(x) : x \in U\}$. Zrejme sú splnené predpoklady vety 1. Preto je merateľná množina $\{x : f(x) \leqq \alpha\}$ a teda aj $\{x : f(x) > \alpha\}$.

Literatúra

[1] *Bledsoe W. W., Morse A. P.:* A topological measure construction, Pacif. J. Math., *13* (1963), 1067—1084.

[2] *Bourbaki N.:* Sur un théorème de Carathéodory et la mesure dans les espaces topologiques, C.R. Acad. Sci. Paris, 201(1935), 1309—1310.

[3] *Halmos P. R.:* Measure Theory, New York 1950.

[4] *Kelley J. L.:* General Topology, New York 1955.

[5] *Riečanová Z.:* О внешней мере Каратэодори,Mat.-fyz. čas. SAV, *12* (1962), 246—252.

[6] *Saks S.:* Theory of the Integral, Warszawa 1937.

Adresa autora: Gottwaldovo nám. 2, Bratislava (Slovenská vysoká škola technická).

Summary

ON MEASURABLE SETS IN TOPOLOGICAL SPACES

Beloslav Riečan, Bratislava

If X is a metric space and μ a Carathéodory outer measure (i.e. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ whenever $\operatorname{dist}(A, B) > 0$) then every open set is μ-measurable. In the article there are proved several theorems of such a type in topological spaces. For illustration we shall give one example.

Theorem 5. Let X be a uniform space with the uniformity $\mathscr{U}$. Let μ be an outer measure defined on the system of all subsets of X and let $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ whenever there is $V \in \mathscr{U}$ such that $A \times B \subset X \times X - V$. Then every compact G_δ set is μ-measurable.