Časopis pro pěstování matematiky

Petr Hájek

K pojmu primitivní třídy algeber (Birkhoffova věta)

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 4, 477--486

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108653

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

K POJMU PRIMITIVNÍ TŘÍDY ALGEBER (BIRKHOFFOVA VĚTA)

PETR HÁJEK, Praha

(Došlo dne 18. listopadu 1964)

0. ÚVOD

Jak je patrno z názvu, zabývá se tato práce problémy, souvisejícími s pojmem primitivní třídy univerzálních algeber. V tomto úvodním paragrafu je vysvětlena metamatematická problematika obsažená ve snaze definovat korektně pojem primitivní třídy algeber ve shodě s původní intuitivní představou; pro pochopení dalšího textu není četba úvodního paragrafu (kromě posledního odstavce, kde je zavedena symbolika) podmínkou.

Všimněme si např. definice pologrupy. Pologrupa je neprázdná množina P s jednou binární operací $(.)$, pro kterou platí $(\forall x, y, z \in P)\,((xy)\,z = x(yz))$. Formuli $(xy)\,z = x(yz)$ nazýváme axiomem pologrupy; má jistý velmi jednoduchý tvar, je to rovnost dvou termů. Rovnost (identita) je tedy axiom speciálního tvaru (formule predikátového počtu), metamatematický objekt, konec konců jistá konečná posloupnost znaků – konečná v metamatematickém smyslu konečnosti. Je dost nasnadě (a při přesném rozboru zřejmé), že z axiomů teorie množin nelze dokázat větu „existuje množina vět teorie množin o těch a těch vlastnostech" a tedy v rámci teorie množin dané třídě algeber přiřazovat „množinu" rovností platných identicky v této třídě, tj. „množinu" axiomů. Je možno (v rámci predikátového počtu, lhostejno, zda přijmeme v metamatematice metamatematickou teorii množin či ne) dvojí:

1) Každé rovnosti (a každému konečnému množství rovností) přiřadit pomocí jistých metamatematických operací definici třídy $\mathscr{K}$ algeber (daného typu) tak, aby bylo (matematicky) dokazatelné, že $\mathscr{K}$ je třída právě všech algeber daného typu, v nichž naše rovnost (rovnosti) identicky platí. O třídě $\mathscr{K}$ lze dokázat, že je uzavřená (viz § 1).

2) Vybudovat v teorii množin formální analogon metamatematických výrazů, tj. vyjít ze spočetné množiny (její prvky nazývat „proměnné" a definovat „termy"; dvojici „termů" pak nazývat „rovností". Pak lze každé třídě $\mathscr{K}$ algeber přiřadit (pomocí matematických operací) množinu (v pravém smyslu slova) „rovností" (z formálního analoga), pravdivých (ve smyslu Tarského, viz [3]) v libovolné algebře ze

třídy $\mathscr{K}$ a obráceně každé množině S „rovností" matematicky přiřadit třídu všech algeber, v nichž jsou všechny „rovnosti" z S pravdivé. (Tak postupuje zřejmě Kuroš v [4]).

Budiž zdůrazněno, že přechod od libovolné formální „rovnosti" k „příslušné rovnosti — objektu metamatematiky" je nekorektní a nemožný. Neprovedu podrobnou argumentaci; podotýkám jen, že věc se redukuje na to, že pojem metamatematické konečnosti (formule je konečná posloupnost znaků) a matematické konečnosti (množina je konečná, lze-li ji prostě zobrazit na některý vlastní úsek množiny ω všech přirozených čísel) jsou dva nesrovnatelné pojmy a že přechod od libovolného přirozeného čísla — prvku množiny ω k „příslušnému metamatematickému přirozenému číslu" je nemožný, protože korektně vůbec nevyjádřitelný. Věta tvaru „k libovolnému prvku n množiny ω existuje metamatematické přirozené číslo p tak, že ..." není totiž vůbec věta matematiky (obsahuje metamatematickou proměnnou p) ani metamatematiky (obsahuje matematickou proměnnou n). [1])

Ohledně naší problematiky: není tedy možné ke každé třídě algeber přiřadit systém všech rovností — axiomů této třídy. Zdá se tédy, že je možná lépe spojovat pojem primitivní třídy algeber nikoli se systémy identit (ani s množinami „identit"), ale s relacemi na volné spočetně generované algebře daného typu.[2])

Podávám dále jisté definice a důkaz Birkhoffovy věty zcela formalizovatelný v teorii množin. Vyšetřuji dále vztah primitivních tříd algeber a jistých speciálních kongruencí. V dodatku pojednávám o volně generovaných algebrách. Abych se mohl stručně vyjadřovat, podotýkám jen, že ordinální číslo chápu dle Gödela (Neumanna) jako množinu všech ordinálních čísel menších, tedy 0 jako prázdnou množinu, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\} = \{0, \{0\}\}, \ldots, \omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ atd.; kardinální číslo je počáteční ordinální číslo, tj. číslo, které nelze prostě zobrazit na žádné číslo menší. Přijmeme-li axiom výběru (což se v této práci mlčky činí), lze každou množinu X prostě zobrazit na právě jedno kardinální číslo (toto číslo se pak nazývá mohutností dané množiny a značí se $\overline{\overline{X}}$). Kardinální čísla jsou tedy — ještě jednou — množiny; jest $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n}$ pro libovolná kardinální čísla $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$. Všechna nekonečná kardinální čísla lze oindexovat právě všemi ordinálními čísly; α-té nekonečné kardinální číslo značme $\aleph_\alpha$, jako obvykle. Písmena i, j, k značí zásadně přirozená čísla, tj. ordinální čísla $0, 1, 2, \ldots$

---

[1]) Podotkněme ještě, že lze ovšem — jak známo — každému metamatematickému přirozenému číslu p přiřadit metamatematicky definici jistého matematického přirozeného čísla Δ_p tak, že platí: p je menší než q, právě když je dokazatelná formule $\Delta_p < \Delta_q$. Srv. odst. 1) výše.

[2]) Podobně je nutno dát pozor např. při důkazu Steinitzovy věty o existenci algebraicky uzavřeného nadtělesa. Polynom lze chápat jako jistý metamatematický výraz („početní předpis"); budujeme-li elementární teorii těles (tj. bez pojmů teorie množin), nemáme ani jinou možnost. Při důkazu Steinitzovy věty budujeme formální analogon polynomů — množinu P všech „polynomů" (jistých matematicky konečných posloupností) a dokážeme, že ve zkonstruovaném tělese T má každý prvek množiny P řešení. Protože ovšem každému polynomu $F(x)$ lze přiřadit a definici jistého (odpovídajícího) prvku f množiny P tak, že je dokazatelné $F(x) = 0 \Leftrightarrow fx = 0$ (zde je 0 nulový prvek tělesa; fx značím „hodnotu" formálního polynomu f v x), lze skutečně pro každý polynom (objekt metamatematiky) $F(x)$ dokázat větu $(\exists x \in T)(F(x) = 0)$.

1. ZÁKLADNÍ POJMY TEORIE UNIVERZÁLNÍCH ALGEBER

Univerzální algebrou rozumíme uspořádanou dvojici $\mathbf{A} = \langle A, \Omega \rangle$, kde A je neprázdná množina (pole algebry) a $\Omega = \{o_\alpha\}_{\alpha<\nu}$ je posloupnost (konečná nebo spočetná nebo transfinitní) operací; přitom libovolná operace o_α je buď funkce[4]), jejíž definiční obor je A^{n_α} [5]) pro nějaké přirozené číslo $n_\alpha > 0$ a obor hodnot je částí A, nebo jest $o_\alpha = \{u\}$, kde u je nějaký prvek množiny A (nulární operace).

Typem rozumím posloupnost $\{n_\alpha\}_{\alpha<\nu}$, kde ν je ordinální číslo větší než 0 a pro libovolné $\alpha < \nu$ je $n_\alpha \in \omega$. Zřejmým způsobem se definuje typ dané algebry. Dále předpokládejme, že je dán pevný typ a že všechny vyšetřované algebry jsou algebry daného typu. Algebry budeme značit velkými polotučnými písmeny, jejich pole příslušnými písmeny obyčejnými. Následující pojmy pokládám za známé: podalgebra, homomorfismus, kongruence, faktorová algebra $\mathbf{A}/\varrho$ dle kongruence, přirozený homomorfismus $\mathbf{A}$ na $\mathbf{A}/\varrho$; $\mathbf{A} \subseteq\subseteq \mathbf{B}$ značí „$\mathbf{A}$ je podalgebra $\mathbf{B}$“, $\mathbf{A}$ hom $\mathbf{B}$ značí „$\mathbf{A}$ je homorfní obraz $\mathbf{B}$“.

Pro libovolné kardinální číslo $\mathfrak{m} > 0$ definujeme množinu $F_\mathfrak{m}$ všech „termů“: $\mathrm{Te}(0) = \mathfrak{m} = \{\beta; \beta < \mathfrak{m}\}$

$$\mathrm{Te}(k+1) = \{t; (\exists \alpha < \nu)(\exists t_1, \ldots, t_{n_\alpha} \in \bigcup_{i \leq k} \mathrm{Te}(i))(t = \langle\{\{\alpha\}\}, t_1, \ldots, t_{n_\alpha}\rangle)\}\ ^{6})$$

$$F_\mathfrak{m} = \bigcup_{i\in\omega} \mathrm{Te}(i)\,.$$

Zřejmě $F_\mathfrak{m}$ je nejmenší množina X o vlastnostech a) $\mathfrak{m} \subseteq X$, b) $t_1, \ldots, t_{n_\alpha} \in X \Rightarrow$ $\Rightarrow \langle\{\{\alpha\}\}, t_1, \ldots, t_{n_\alpha}\rangle \in X$.

Dále definujeme $\mathbf{F}_\mathfrak{m} = \langle F_\mathfrak{m}, \{o_\alpha\}_{\alpha>\nu}\rangle$, kde $t_1, \ldots, t_{n_\alpha} o_\alpha = \langle\{\{\alpha\}\}, t_1, \ldots, t_{n_\alpha}\rangle$; algebru $\mathbf{F}_{\aleph_0}$ budeme prostě značit $\mathbf{F}$. Podobně k definici množiny $F_\mathfrak{m}$ lze definovat množinu $V_\mathfrak{m}$, jejímiž prvky jsou dvojice $\langle u, t\rangle$ ($u \in \mathfrak{m}$, $t \in F_\mathfrak{m}$) tak, že je to nejmenší množina X o vlastnostech a) $t \in \mathrm{Te}(0) \Rightarrow (\langle ut\rangle \in X \Leftrightarrow u = t)$, b) $t = \langle\{\{\alpha\}\}, t_1, \ldots, t_{n_\alpha}\rangle \Rightarrow$ $\Rightarrow (\langle ut\rangle \in X \Leftrightarrow (\exists i < n_\alpha)(\langle ut_{i+1}\rangle \in X)$. Formuli $\langle u, t\rangle \in V_\mathfrak{m}$ můžeme číst „u se vyskytuje v t“. Označme var $t = \{u; \langle u, t\rangle \in V_\mathfrak{m}\}$; pro libovolné t je var t konečná množina. Je-li $\mathbf{A}$ algebra, $X \subseteq A$, definujme X gen $\mathbf{A} \Leftrightarrow (\forall \mathbf{B} \subseteq\subseteq \mathbf{A})(X \subseteq B \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A})$ (X generuje $\mathbf{A}$). K libovolné neprázdné množině $X \subseteq A$ existuje nejmenší algebra $\mathbf{B} \subseteq\subseteq \mathbf{A}$ taková, že $X \subseteq B$; značme tuto algebru $[X]$ (algebra generovaná množinou X). Je-li f homomorfismus $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$, značme ϱ_f tuto kongruenci: $x\varrho_f y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Nazývejme ji kongruencí příslušnou k homomorfismu f. Pro libovolné relace ϱ, σ na A definujme $\varrho \leqq \sigma \Leftrightarrow (\forall xy)(x\varrho y \Rightarrow x\sigma y)$.

---

[4]) tj. množina uspořádaných dvojic, splňující podmínku jednoznačnosti: $\langle y_1 x\rangle \in o_\alpha \;\&\; \langle y_2 x\rangle \in o_\alpha . \Rightarrow y_1 = y_2$; místo $\langle yx\rangle \in o_\alpha$ píšeme $y = xo_\alpha$ apod.

[5]) kartézská mocnina.

[6]) To je ne zcela formální zápis tvrzení obsahujícího dva existenční kvantifikátory (a ne „$n_\alpha + 1$ existenčních kvantifikátorů“), zcela formální zápis by však byl nepřehledný. V definici složeného termu bereme $\{\{\alpha\}\}$, abychom odlišili α-tou operaci v případě, že je nulární od „α-té proměnné“, tj. $\langle\{\{\alpha\}\}\rangle = \{\{\alpha\}\}$ od α.

Následující tvrzení jsou známá: $\mathfrak{m}$ gen $F_{\mathfrak{m}}$; každé zobrazení množiny $\mathfrak{m}$ do pole libovolné algebry A lze jednoznačně rozšířit na homomorfismus algebry $F_{\mathfrak{m}}$ do A. Každá algebra A (našeho typu) o množině generátorů X mohutnosti nejvýše $\mathfrak{m}$ je homomorfní obraz $F_{\mathfrak{m}}$. Jsou-li A, B, C algebry, je-li f homomorfismus C na A, g homomorfismus C na B, $\varrho_f \leqq \varrho_g$, je B hom A.

Buď $\{A_\iota\}_{\iota<\mu}$ posloupnost algeber našeho typu. Kartézský součin $\prod\limits_{\iota<\mu} A_\iota$ algeber A_ι definujeme obvyklým způsobem: pole je kartézský součin polí, operace se provádějí po složkách. (Tj. je-li $x_i = \{x_i^\iota\}_{\iota<\mu} \in \prod\limits_{\iota<\mu} A_\iota$, $i = 1, \ldots, n_\alpha$, je $x_1 \ldots x_{n_\alpha} \bar{o}_\alpha = \{x_1^\iota \ldots x_n^\iota\, o_\alpha^\iota\}_{\iota<\mu}$ kde o_ι^α je α-tá operace v A_ι, $\bar{o}_\alpha$ je α-tá operace v $\prod\limits_{\iota<\mu} A_\iota$.

Buď ϱ libovolná binární relace na množině $F = F_{\aleph_0}$. Definujme $A \in \mathscr{C}(\varrho) \Leftrightarrow (\forall f$ homomorfismus F do $A)$ $(\forall t, s \in F)$ $(t\varrho s \Rightarrow f(t) = f(s))$. Nyní vyslovíme dvě definice zásadní důležitosti.

Definice 1. Třída $\mathscr{K}$ univerzálních algeber se nazývá primitivní, jestliže existuje relace ϱ na F taková, že platí $\mathscr{K} = \mathscr{C}(\varrho)$.

Definice 2. Třída $\mathscr{K}$ univerzálních algeber se nazývá uzavřená, platí-li následující tři podmínky: a) $A \in \mathscr{K}$ & $B \subseteq\subseteq A \mathrel{.\Rightarrow} B \in \mathscr{K}$, b) $A \in \mathscr{K}$ & B hom $A \mathrel{.\Rightarrow} B \in \mathscr{K}$, c) $(\forall \alpha < \mu)(A_\alpha \in \mathscr{K}) \Rightarrow (\prod\limits_{\alpha<\mu} A_\alpha) \in \mathscr{K}$.

2. BIRKHOFFOVA VĚTA

Věta (Birkhoffova). *Třída univerzálních algeber je primitivní právě tehdy, je-li uzavřená.*

Důkazu Birkhoffovy věty je věnován tento odstavec.

Lemma 1. *Je-li třída $\mathscr{K}$ univ. algeber primitivní, je uzavřená.*

Důkaz. Buď $\mathscr{K} = \mathscr{C}(\varrho)$, $A \in \mathscr{K}$. Je-li $B \subseteq\subseteq A$, je každý homomorfismus algebry F do B homomorfismem F do A, tedy $B \in \mathscr{K}$. Buď hom A, buď f homomorfismus A na B, mějme nějaký homomorfismus g algebry F do B. Ke každému $u \in g(\aleph_0)$ ($\aleph_0$ gen F) vezměme některý prvek $k(u)$ z množiny $f^{-1}(u)$, definujme zobrazení $h^*(u) = k(g(u))$; h^* lze rozšířit na homomorfismus h algebry F do A a zřejmě jest $g = h * f$; $t\varrho s \Rightarrow h(t) = h(s) \Rightarrow f(h(t)) = f(h(s)) \Rightarrow g(t) = g(s)$, tedy $B \in \mathscr{K}$. Buď konečně pro každé $\beta < \mu$ $A_\beta \in \mathscr{K}$, buď g homomorfismus algebry F do $\prod\limits_{\beta<\mu} (A_\beta)$. Označme p_β projekci algebry $\prod\limits_{\beta<\mu} A_\beta$ na β-tou složku a $f_\beta = g * p_\beta$. Jest $g(t) = \{(g * p_\beta)(t)\}_{\beta<\mu}$; $t\varrho s \Rightarrow (\forall \beta < \mu)((g * p_\beta)(t) = (g * p_\beta)(s)) \Rightarrow g(t) = g(s)$, tedy $(\prod\limits_{\beta<\mu} A_\beta) \in \mathscr{K}$. $\mathscr{K}$ je uzavřená.

Definice. Buď $\mathscr{K}$ třída algeber, $t, s \in F$. Definujme $t\varrho_{\mathscr{K}} s \Leftrightarrow (\forall f)(\forall A \in \mathscr{K})$ (f je homomorfismus F do $A \Rightarrow f(t) = f(s)$).

Lemma 2. *Nechť třída $\mathscr{K}$ obsahuje s každou algebrou všechny její podalgebry. $t\varrho_{\mathscr{K}}s$ platí právě tehdy, je-li pro každý homomorfismus f algebry F do libovolné konečné generované algebry A z třídy $\mathscr{K}$ $f(t) = f(s)$.*

Důkaz. V jednom směru je důkaz triviální. Mějme termy t, s, vyhovující druhé polovině dokazované ekvivalence. Buď f nějaký homomorfismus F do libovolné algebry $A \in \mathscr{K}$, buď $z = \operatorname{var}(t) \cup \operatorname{var}(s)$. z je konečná množina, $z \subseteq \aleph_0$. Definujme $\bar{f}(n) = f(n)$ pro $n \in z$, $\bar{f}(n) = f(1)$ pro $n \notin z$; rozšiřme $\bar{f}$ na homomorfismus F do A. Buď $B = [f(z \cup \{1\})]$. Jest $B \subseteq\subseteq A$, B je konečně generovaná. Zřejmě $\bar{f}(t) = \bar{f}(s)$, ale přitom $\bar{f}(t) = f(t)$, $\bar{f}(s) = f(s)$, tedy jsme dokázali $t\varrho_{\mathscr{K}}s$.

Zvolme dále pevně libovolnou uzavřenou třídu $\mathscr{K}$. Dokážeme $\mathscr{K} = \mathscr{C}(\varrho_{\mathscr{K}})$.

Lemma 3. $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{C}(\varrho_{\mathscr{K}})$.

Důkaz. Je-li f homomorfismus algebry F do libovolné algebry $A \in \mathscr{K}$, $t\varrho_{\mathscr{K}}s$, je $f(t) = f(s)$ dle definice $\varrho_{\mathscr{K}}$.

Lemma 4. *Buď $\mathscr{A}$ třída všech konečně generovaných algeber z třídy $\mathscr{K}$, jejichž pole je kardinální číslo. Každá konečně generovaná algebra z $\mathscr{K}$ je isomorfní některé algebře z $\mathscr{A}$; $\mathscr{A}$ je množina.*

Důkaz. Buď $A \in \mathscr{K}$, A konečně generovaná, mohutnost A $\mathfrak{m}$. Je-li h prosté zobrazení $\mathfrak{m}$ na A, definujme $x_1, \ldots, x_{n_\alpha}\bar{o}_\alpha = (h(x_1)) \ldots (h(x_{n_\alpha}))\, o_\alpha$; tak vzniklá algebra B isomorfní s A, pole je kardinální číslo. Že $\mathscr{A}$ je množina, plyne z toho, že na dané množině existuje jen množina algeber daného typu a mohutnosti polí konečně generovaných algeber našeho typu jsou omezeny mohutností množiny F.

Lemma 5. $\mathscr{C}(\varrho_{\mathscr{K}}) \subseteq \mathscr{K}$.

Důkaz. Buď $A \in \mathscr{C}(\varrho_{\mathscr{K}})$, $A = [X]$, $\overline{\overline{X}} \leqq \mathfrak{m}$, předpokládejme $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$. Buď $\mathscr{A} = \{A_\iota\}_{\iota<\delta}$ dříve definovaná množina v nějakém dobrém uspořádání. Buď $\{f_\mu\}_{\mu<\gamma}$ množina všech možných homomorfismů algebry $F_\mathfrak{m}$ do všech algeber A_ι, $\iota < \delta$, daná v nějakém dobrém uspořádání. Buď $S_\mu = f_\mu(F_\mathfrak{m})$, $S = \prod_{\mu<\gamma} S_\mu$. Označme pro $\zeta \in \mathfrak{m}$ $d(f) = \{f_\mu(\zeta)\}_{\mu<\gamma}$, označme konečně S^* podalgebru S generovanou obrazem množiny $\mathfrak{m}$ při zobrazení d. Zobrazení d lze rozšířit na homomorfismus f algebry $F_\mathfrak{m}$ na S^*; je zřejmě $f(t) = \{f_\mu(t)\}_{\mu<\gamma}$ a pro $\zeta \in \aleph_\beta$ je $f(\zeta) = d(\zeta)$. Protože $\mathscr{K}$ je uzavřená, $A_\iota \in \mathscr{K}$ pro všechna $\iota < \delta$ a každé S_μ je podalgebra některého A_ι, je $S^* \in \mathscr{K}$. Dokážeme, že A je homomorfní obraz S^*, tedy že $A \in \mathscr{K}$. Buď φ rozklad na $F_\mathfrak{m}$ příslušný libovolnému pevně zvolenému homomorfismu algebry $F_\mathfrak{m}$ na A, ψ rozklad na $F_\mathfrak{m}$ příslušný homomorfismu f algebry $F_\mathfrak{m}$ na S^*; dokážeme $\psi \leqq \varphi$.

Buď tedy $t, s \in F\mathfrak{m}$, $t\psi s$, $\operatorname{var}(t) \cup \operatorname{var}(s) = \{\zeta_0, \ldots, \zeta_k\}$. Existuje automorfismus p algebry $F_\mathfrak{m}$ takový, že $p(\zeta_i) = i$ pro $i = 0, \ldots, k$. Označme $p(t) = t_0$, $p(s) = s_0$; jest $t_0, s_0 \in F$. (Zřejmě $F \subseteq F_{\aleph\beta}$). Jest $\{f_\mu(t)\}_{\mu<\gamma} = \{f_\mu(s)\}_{\mu<\gamma}$, jelikož $t\psi s$, z toho však $\{f_\mu(t_0)\}_{\mu<\gamma} = \{f_\mu(s_0)\}_{\mu<\gamma}$, protože všechna zobrazení $p * f_\mu$ jsou právě zobrazení f_μ; množina všech zobrazení $f_\mu \restriction F$, tj. všech zobrazení f_μ parcializovaných na F je právě množina všech homomorfismů algebry $\boldsymbol{F}$ do všech algeber množiny $\mathscr{A}$ a přitom pro všechna $\mu < \gamma$ jest $(f_\mu \upharpoonright \boldsymbol{F})(t_0) = (f_\mu \upharpoonright \boldsymbol{F})(s_0)$, tedy jest $t_0 \varrho_{\mathscr{K}} s_0$ dle lemmat 2. a 4. Označme $h = (p^{-1} * f) \upharpoonright F$; h je homomorfismus algebry $\boldsymbol{F}$ do $\boldsymbol{S}^*$, $\boldsymbol{S}^* \in \mathscr{K}$, $t_0 \varrho_{\mathscr{K}} s_0$, tedy $h(t_0) = h(s_0)$, $f(t) = h(t_0) = h(s_0) = f(s)$, čili $t\varphi s$, q.e.d.

Jest tedy $\psi \leqq \cdot \varphi$, tedy je $\boldsymbol{A}$ homomorfní obraz $\boldsymbol{S}^*$, máme tedy $\boldsymbol{A} \in \mathscr{K}$. Dokázali jsme celkem (lemmata 3, 5), že každá uzavřená třída je primitivní, což spolu s lemmatem 1 dokazuje Birkhoffovu větu.

3. PRIMITIVNÍ KONGRUENCE

Nalezeneme jisté speciální kongruence, které jsou ve vzájemně jednoznačném vztahu s primitivními třídami algeber.

Definice 1. Relace ϱ na nosiči A algebry $\boldsymbol{A}$ je uzavřená vůči endomorfismům, platí-li pro každý endomorfismus p algebry $\boldsymbol{A}$ $(\forall t, s \in A)(t\varrho s \Rightarrow p(t)\,\varrho p(s))$. Kongruence ϱ na algebře $\boldsymbol{F}$ je primitivní, je-li uzavřená vůči endomorfismům.

Definice 2. Buď ϱ relace na množině F. Definujeme pro libovolné $t, s \in F$:

$$t\varrho_0 s \Leftrightarrow (t = s \vee t\varrho s \vee s\varrho t),$$

$$t\varrho_1 s \Leftrightarrow (\exists p \text{ endomorfismus } F)(\exists t_0, s_0 \in F)(t_0\varrho_0 s_0 \;\&\; t = p(t_0) \;\&\; s = p(s_0)),$$

$$\text{pro každé přirozené } i > 0\text{: } t\varrho_{2i} s \Leftrightarrow (\exists q F)(t\varrho_{2i-1} q \;\&\; q\varrho_{2i-1} s),$$

$$t\varrho_{2i+1} s \Leftrightarrow . \; t\varrho_{2i} s \vee (\exists \alpha < v)(\exists t_1, \ldots, t_{n_\alpha} \in F)(\exists s_1, \ldots, s_{n_\alpha} \in F)(t = \langle\{\{\alpha\}\}, t_1, \ldots, t_{n_\alpha}\rangle \;\&$$
$$\& \; s = \langle\{\{\alpha\}\}, s_1, \ldots, s_{n_\alpha}\rangle \;\&\; (\forall j = 1, \ldots, n_\alpha)(t_j \varrho_{2i} s_j);$$

$$t\bar{\varrho} s \Leftrightarrow (\exists i \in \omega)(t\varrho_i s)$$

Lemma 1. *$\bar{\varrho}$ je primitivní kongruence.*

Důkaz. Zřejmě $\varrho_i \leqq \varrho_j$ pro $i \leqq j$; ϱ_i je reflexivní a symetrická pro každé i, tedy je i $\bar{\varrho}$ reflexivní a symetrická. Nechť $t\bar{\varrho}q$, $q\bar{\varrho}s$, pak existuje i takové, že $t\varrho_{2i-1}q$ & & $q\varrho_{2i-1}s$, tedy $t\varrho_{2i}s$ čili $t\bar{\varrho}s$; $\bar{\varrho}$ je ekvivalence. Nechť $t_j\bar{\varrho}s_j$ pro každé $j = 1, \ldots, n_\alpha$, pak existuje i tak, že pro všechna uvažovaná j je $t_j\varrho_{2i}s_j$. Z toho $\langle\{\{\alpha\}\}, t_1, \ldots, t_{n_\alpha}\rangle\, \varrho_{2i+1} \langle\{\{\alpha\}\}, s_1, \ldots, s_{n_\alpha}\rangle$, tedy $\langle\{\{\alpha\}\}, t_1, \ldots, t_{n_\alpha}\rangle\, \bar{\varrho} \langle\{\{\alpha\}\}, s_1, \ldots, s_{n_\alpha}\rangle$; $\bar{\varrho}$ je kongruence. K důkazu, že $\bar{\varrho}$ je primitivní, stačí zřejmě indukcí ukázat, že všechny relace ϱ_i $(i \geqq 1)$ jsou uzavřené vůči endomorfismům, což je zřejmé. $\bar{\varrho}$ je vskutku primitivní kongruence.

Lemma 2. $\mathscr{C}(\varrho) = \mathscr{C}(\bar{\varrho})$.

Důkaz. Jest $\mathscr{C}(\varrho) = \mathscr{C}(\varrho_0) \supseteq \mathscr{C}(\varrho_1)$. Buď $\boldsymbol{A} \in \mathscr{C}(\varrho_0)$. buď f libovolný homomorfismus $\boldsymbol{F}$ do $\boldsymbol{A}$, buď $t\varrho_1 s$. Existuje tedy p endimorfismus $\boldsymbol{F}$ a t_0, s_0 tak, že $p(t_0) = t$, $p(s_0) = s$, $t_0\varrho_0 s_0$. Zobrazení $p * f$ je homomorfismus $\boldsymbol{F}$ do $\boldsymbol{A}$, tedy jest $(p * f)(t_0) = (p * f)(s_0)$, tj. $f(p(t_0)) = f(p(s_0))$, čili $f(t) = f(s)$; dokázali jsme $\boldsymbol{A} \in \mathscr{C}(\varrho_1)$. Důkaz indukcí dále je zřejmý.

Definice 3. Nazývejme $\bar{\varrho}$ primitivní kongruencí příslušnou relaci ϱ.

Lemma 3. Je-li ϱ primitivní kongruence, jest $F/\varrho \in \mathscr{C}(\varrho)$.

Důkaz. Buď f nějaký homomorfismus F do F/ϱ, $t\varrho s$. Buď pro libovolné $i \in \aleph_0$ $f(i) = q_i^\varrho$ (tj. třída rozkladu v kongruenci ϱ, určená prvkem q_i), kde $\varrho_i \in F$ (jest zřejmě $\aleph_0$ gen F). Definujme endomorfismus p algebry F předpisem $p(i) = q_i$ (dále se rozšíří jednoznačně). Indukcí se dokáže $f(t) = (p(t))^\varrho$: pro $t \in \aleph_0 = \mathrm{Te}(0)$ to platí z definice, $f\langle\{\{\alpha\}\}, t_1, \ldots, t_{n_\alpha}\rangle = f(t_1, \ldots t_{n_\alpha} o_\alpha) = (f(t_1)) \ldots (f(t_{n_\alpha}))\, \bar{o}_\alpha = [(p(t_1))^\varrho \ldots (p(t_{n_\alpha}))^\varrho]\bar{o}_\alpha = [p(t_1, \ldots t_{n_\alpha} o_\alpha)]^\varrho = (p(\langle\{\{\alpha\}\}, t_1, \ldots, t_{n_\alpha}\rangle))^\varrho$. Jest $t\varrho s$, tedy $p(t)\, \varrho\, p(s)$, čili $f(t) = (p(t))^\varrho = (p(s))^\varrho = f(s)$; $F/\varrho \in \mathscr{C}(\varrho)$.

Věta. $\mathscr{C}(\varrho) = \mathscr{C}(\sigma) \Leftrightarrow \bar{\varrho} = \bar{\sigma}$.

Důkaz. Z jedné strany je tvrzení zřejmé z lemmatu 2. Nechť $\mathscr{C}(\varrho) = \mathscr{C}(\sigma)$, předpokládejme rovnou, že ϱ, σ jsou primitivní kongruence. Vezměme přirozený homomorfismus h algebry F na F/ϱ. Zřejmě $\varrho_h = \varrho$; ze vztahu $F/\varrho \in \mathscr{C}(\sigma)$ plyne $t\sigma s \Rightarrow t\varrho s$; máme tedy $\sigma \leqq \varrho$. Zcela stejně se dokáže $\varrho \leqq \sigma$, q.e.d.

Věta. $\mathscr{K} = \mathscr{C}(\varrho) \Rightarrow \bar{\varrho} = \varrho_{\mathscr{K}}$.

Důkaz. Buď $t\bar{\varrho}s$. Z lemmatu 2 plyne, že při libovolném homomorfismu algebry F do $A \in \mathscr{K}$ je $f(t) = f(s)$, tj. $t\varrho_{\mathscr{K}}s$. Nechť není $t\bar{\varrho}s$. Pak při přirozeném homomorfismu $f_{\bar{\varrho}}$ algebry F na $F/\bar{\varrho}$ není $f_{\bar{\varrho}}(t) = f_{\bar{\varrho}}(s)$, tedy vzhledem k lemmatu 3 není $t\varrho_{\mathscr{K}}s$.

4. DODATEK: ALGEBRY VOLNĚ GENEROVANÉ

Předchozí úvahy v nevelkém zobecnění umožňují konstruovat v libovolné primitivní třídě tzv. volně generované algebry. Naznačíme v tomto paragrafu dvě metody konstrukce.

Definice. Množina $X \subseteq A_0$ generuje algebru $A_0 \in \mathscr{K}$ $\mathscr{K}$-volně, lze-li každé zobrazení množiny X do pole libovolné algebry $A \in \mathscr{K}$ rozšířit na homomorfismus algebry A_0 do A. X se nazývá množina volných generátorů.

Lehko se nahlédne, že třída $\mathscr{K}_0$ všech algeber, jejichž pole je jednoprvková množina, je primitivní. Jest $\mathscr{C}(\varrho) = \mathscr{K}_0 \Leftrightarrow \langle 1, 2\rangle \in \bar{\varrho} \Leftrightarrow (\forall t, s \in F)\,(\langle t, s\rangle \in \bar{\varrho})$. V dalším vyloučíme třídu $\mathscr{K}_0$ (tzv. triviální primitivní třídu algeber) ze svých úvah. Uvažujeme tedy dále libovolnou netriviální primitivní třídu $\mathscr{K}$. Mějme dále dánu libovolnou mohutnost $\mathfrak{m} > 0$. Sestrojíme dvě různé (ovšem isomorfní) algebry třídy $\mathscr{K}$, volně generované množinou mohutnosti $\mathfrak{m}$.

Konstrukce 1. Buď $\mathscr{K} = \mathscr{C}(\varrho)$, ϱ relace na F. Pro libovolnou mohutnost $\mathfrak{m} > 0$ definujeme kongruenci $\bar{\varrho}^{(\mathfrak{m})}$ na $F_{\mathfrak{m}}$. Je-li $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$, můžeme ϱ považovat za relaci na $F_{\mathfrak{m}}$ a rozšířit ji úplně analogicky k definici 2 z § 3. Je-li $\mathfrak{m} < \aleph_0$, definujme $\bar{\varrho}^{(\mathfrak{m})} = \bar{\varrho} \cap \cap (F_{\mathfrak{m}}^2)$ (tj. omezme relaci $\bar{\varrho}$ na $F_{\mathfrak{m}}$). Snadno se ukáže, že pro libovolné $\mathfrak{m} > 0$ je $\bar{\varrho}^{(\mathfrak{m})}$

kongruence na $F_{\mathfrak{m}}$ uzavřená na endomorfismy ve smyslu definice 1 § 3. Analogicky k lemmatu 3 § 3 se dokáže, že $F_{\mathfrak{m}}/\bar{\varrho}^{(\mathfrak{m})} \in \mathscr{K}$; dále se ukáže, že žádné dva různé prvky $\zeta, \bar{\zeta} \in \mathfrak{m}$ nejsou v kongruenci $\bar{\varrho}^{(\mathfrak{m})}$, tedy že množina obrazů prvků množiny $\mathfrak{m}$ v přirozeném homomorfismu algebry $F_{\mathfrak{m}}$ na $F_{\mathfrak{m}}/\bar{\varrho}^{(\mathfrak{m})}$ má mohutnost $\mathfrak{m}$ a generuje $F_{\mathfrak{m}}/\bar{\varrho}^{(\mathfrak{m})}$, a to $\mathscr{K}$-volně. (Případy $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$, $\mathfrak{m} < \aleph_0$ jest vyšetřovat zvlášť.)

Konstrukce 2. vychází z důkazu lemmatu 5 § 2. Buď dáno $\mathfrak{m} > 0$; sestrojme dle prvního odstavce důkazu lemmatu 5 § 2 algebru S^* (značme ji $S^*_{\mathfrak{m}}$), vycházejíce od množiny $\mathscr{A}$ všech konečně generovaných $\mathscr{K}$-algeber, jejichž pole je kardinální číslo. (V důkazu lemmatu 5 jsme předpokládali, ale v prvním odstavci nepoužili, že $\mathfrak{m}$ je nekonečné.) Z netriviálnosti $\mathscr{K}$ plyne, že pro libovolná různá $\zeta, \bar{\zeta} \in \mathfrak{m}$ jest $d(\zeta) \neq d(\bar{\zeta})$, je tedy algebra $S^*_{\mathfrak{m}}$ (o které je v důkaze lemmatu 5 ukázáno, že náleží do $\mathscr{K}$) generována množinou $D = \{d(\zeta);\ \zeta \in \mathfrak{m}\}$, jejíž mohutnost je $\mathfrak{m}$. Je-li $\mathfrak{m}$ nekonečné, je v druhém odstavci důkazu lemmatu 5 ukázáno, že libovolné zobrazení množiny D do libovolné algebry $A \in \mathscr{K}$ lze rozšířit na homomorfismus $S^*_{\mathfrak{m}}$ do A, tj. že $S^*_{\mathfrak{m}}$ je $\mathscr{K}$-volně generována množinou D. Je-li $\mathfrak{m}$ konečné, je nutno tento důkaz trochu modifikovat. (Využít toho, že v tomto případě je množina všech parcializací homomorfismů algebry F do libovolné algebry A na množinu $F_{\mathfrak{m}}$ právě množina všech homomorfismů algebry $F_{\mathfrak{m}}$ do A.)

Literatura

[1] *G. Birkhoff:* On the structure of abstract algebras, Proc. Cambridge Phil. Soc. *31* (1935), 433—454.

[2] *K. Gödel:* The consistency of the axiom of choice etc., Princeton Univ. Press, 1940.

[3] *A. Grzegorczyk:* Zarys logiki matematycznej, PWN Warszawa 1961.

[4] *А. Г. Курош:* Лекции по общей алгебре. Госуд. издат. физ.-мат., Москва 1962.

Резюме

О ПОНЯТИИ ПРИМИТИВНОГО КЛАССА АЛГЕБР (ТЕОРЕМА БИРКГОФФА)

ПЕТР ГАЕК (Petr Hájek), Прага

Если мы хотим в рамках аксиоматической теории множества (Бернайса-Геделя) корректно определить понятие примитивного класса универсальных алгебр так, что бы можно было доказать теорему Биркгоффа, то кажется лучшим формулировать определение при помощи отношений в свободной счетно порожденной алгебре $F = \langle F, \Omega \rangle$ данного типа. (Алгебра F определена в § 1.) Пары элементов из F, стоящие в каком-то рассматриваемом отношении ϱ, можно называть формальными тождествами; но этим „тождествам" не всегда

возможно корректно сопоставить тождества-аксиомы, так как последние являются метаматематическими объектами.

Пусть ϱ — бинарное отношение в F. Определим класс $\mathscr{C}(\varrho)$, как класс всех алгебр $\boldsymbol{A}$ (данного типа), для которых имеет место утверждение: Если f — произвольный гомоморфизм $\boldsymbol{F}$ в $\boldsymbol{A}$, $t, s \in F$, $t\varrho s$, то $f(t) = f(s)$. Класс $\mathscr{K}$ называют примитивным, если существует отношение ϱ в F такое, что $\mathscr{K} = \mathscr{C}(\varrho)$. Класс алгебр называют замкнутым, если он вместе со всякой алгеброй содержит все ее подалгебры и гомоморфные образы и вместе со всякой последовательностью алгебр ее прямое произведение.

Теорема Биркгоффа: Класс алгебр примитивен тогда и только тогда, если он замкнут. Теорема доказывется в § 2. В § 3 изучаются примитивные конгруэнции. Конгруэнция ϱ на $\boldsymbol{F}$ называется примитивной, если для всякого эндоморфизма p алгебры $\boldsymbol{F}$ имеет место $(\forall t, s \in F)\,(t\varrho s \Rightarrow p(t)\,\varrho p(s))$. Всякому отношению ϱ в F сопоставлена примитивная конгруэнция $\bar{\varrho}$ такая, что $\mathscr{C}(\varrho) = \mathscr{C}(\bar{\varrho})$ и $\mathscr{C}(\varrho) = \mathscr{C}(\sigma) \Leftrightarrow \bar{\varrho} = \bar{\sigma}$. В § 4 показаны два метода, по которым можно во всяком примитивном классе, несостоящем из одних одноточечных алгебр для любой мощности $\mathfrak{m} > 0$ построить алгебру из этого класса, которая свободно порождается множеством мощности $\mathfrak{m}$.

Zusammenfassung

ZUM BEGRIFF EINER PRIMITIVEN KLASSE VON ALGEBREN (SATZ VON BIRKHOFF)

PETR HÁJEK, Praha

Soll man den Begriff einer primitiven Klasse universeller Algebren formal korrekt (innerhalb der axiomatischen Mengenlehre) so definieren, dass der Birkhoffsche Satz (s.u.) gilt, so scheint es am besten zu sein, von Relationen in der freien abzählbar erzeugten Algebra $\boldsymbol{F} = \langle F, \Omega \rangle$ (vom gegebenen Typus) auszugehen (die Algebra $\boldsymbol{F}$ wird im § 1 definiert). Es ist möglich die Paare der Elemente von F, die in einer bestimmten Relation ϱ stehen, formale Gleichheiten zu nennen; diesen „Gleichheiten“ können aber Gleichheiten (Axiome) als metamathematische Objekte nicht immer korrekt zugeordnet werden.

Ist ϱ eine binäre Relation in der Menge F, so definieren wir die Klasse $\mathscr{C}(\varrho)$ als die Klasse aller Algebren $\boldsymbol{A}$ (vom gegebenen Typus), für die folgendes gilt: ist f ein Homomorphismus von $\boldsymbol{F}$ in $\boldsymbol{A}$, $t, s \in F$, $t\varrho s$, so ist $f(t) = f(s)$. Eine Klasse $\mathscr{K}$ wird primitiv genannt, wenn es eine solche Relation ϱ in F gibt, dass $\mathscr{K} = \mathscr{C}(\varrho)$ ist. Eine Klasse von Algebren wird abgeschlossen genannt, wenn ise mit jeder Algebra alle ihre Unteralgebren und homomorphe Bilder und mit jeder Folge von Algebren ihr cartesisches Produkt enthält.

Satz von Birkhoff: Eine Klasse $\mathscr{K}$ von Algebren ist primitiv dann und nur dann, wenn sie abgeschlossen ist. Dieser Satz wird im § 2 bewiesen. Im § 3 werden primitive Kongruenzen betrachtet. Eine Kongruenz ϱ auf $\boldsymbol{F}$ wird primitiv genannt, wenn für jeden Endomorphismus p von $\boldsymbol{F}$ die Formel $(\forall t, s \in F)\,(t\varrho s \Rightarrow p(t)\,\varrho\,p(s))$ gilt. Jeder Relation ϱ in F wird eine primitive Kongruenz $\bar{\varrho}$ zugeordnet, und zwar so, dass $\mathscr{C}(\varrho) = \mathscr{C}(\bar{\varrho})$ und $\mathscr{C}(\varrho) = \mathscr{C}(\sigma) \Leftrightarrow \bar{\varrho} = \bar{\sigma}$ ist. Im § 4 sind zwei Methoden angegeben, nach denen man in einer beliebigen primitiven Klasse, die nicht nur einelementige Algebren enthält, eine Algebra konstruieren kann, die mit einer Menge von einer beliebigen Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ frei erzeugt wird.