O CYKLECH CYKLICKÝCH GRAFŮ

KAREL ČULÍK, Brno

(Došlo dne 28. září 1957)

DT: 519.51

Vyšetřují se otázky existence, počtu a délky cyklů a oboustranně nekonečných drah grafu $F(\varrho)$, jehož binární relace ϱ splňuje podmínku cykličnosti ($\mathbf{Z}_k$), která je do značné míry analogická (pro $k = 3$) podmínce transitivity. Při tom se využívá pojmů a výsledků z [1] (zejména pojmu homomorfismu aj.) a dokazuje se na příklad, že graf, který obsahuje alespoň jeden cyklus a který je souvislý, je $\mathbf{Z}_k$-grafem právě tehdy, když je homomorfním vzorem cyklu délky k ($k \geqq 3$).

Základní pojmy a označení

Grafem $F(\varrho)$ se rozumí množina $F \neq 0$, na níž je definována binární relace ϱ (tj. $\varrho \subset F \times F$). Prvky z F se nazývají *uzly* a prvky z ϱ (tj. uspořádané dvojice uzlů) *hranami* grafu $F(\varrho)$.

Graf $G(\sigma)$ se nazývá *subgrafem* příp. *nasyceným subgrafem* grafu $F(\varrho)$, jestliže $G \subset F$ a $\sigma \subset \varrho$ příp. $G \subset F$ a $\sigma = \varrho \cap (G \times G)$.

Posloupnost $\{u_i\}_{i=1}^d$, kde d je přirozené číslo, uzlů grafu $F(\varrho)$ se nazývá *vázaná* příp. *monotonně vázaná*, jestliže pro každé i, $1 \leqq i < d$ platí buď $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$ nebo $(u_{i+1}, u) \in \varrho$ příp. $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$. Číslo d nazýváme její *délkou* a navíc o ní říkáme, že je *uzavřená*, jestliže buď $(u_d, u_1) \in \varrho$ nebo $(u_1, u_d) \in \varrho$ příp. $(u_a, u_1) \in \varrho$. *U uzavřených monotonně vázaných posloupností délky d klademe vždy* $u_i = u_j$ *pro* $i \equiv j \pmod d$. Místo o posloupnosti hovoříme o *sledu*, jestliže platí $u_i \neq u_j$ pro $i \not\equiv j \pmod d$. Pak monotonně vázaný sled je drahou a monotonně vázaný uzavřený sled je cyklem příslušné délky (srv. [2]). Obdobně se, nazývá graf $G(\sigma)$ *cyklem*, jestliže

$$G = \{u_1, u_2, \ldots, u_d\}, \quad \sigma = \{(u_1, u_2), (u_2, u_3), \ldots, (u_{d-1}, u_d), (u_d, u_1)\},$$

a graf $G(\sigma)$ *oboustranně nekonečnou drahou*, jestliže

$$G = \{\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots\}, \quad \sigma = \{\ldots, (u_{-2}, u_{-1}), (u_{-1}, u_0), (u_0, u_1), (u_1, u_2), \ldots\}.$$

Konečně zobrazení φ grafu $F(\varrho)$ na graf $G(\sigma)$, tj. zobrazení množiny F na G, se nazývá *homomorfismem*, jestliže platí

$$(x, y) \in \varrho \Leftrightarrow (\varphi[x], \varphi[y]) \in \sigma .$$

Rozklad $\bar{F}$ na F vytvořený homorfismem φ se nazývá *vytvořujícím rozkladem*. Tyto pojmy a ostatní pojmy, jichž se bude v dalším užívat, jsou zavedeny v [1].

Binární relaci ϱ definovanou na množině $F \neq \emptyset$ a splňující podmínku

$$\{u_i\}_{i=1}^{k} \textit{ je monotonně vázaná posloupnost v } F(\varrho) \Rightarrow (u_k, u_1) \in \varrho, \qquad (\mathbf{Z}_k)$$

kde k je dané přirozené číslo, nazýváme *cyklickou relací stupně* k, stručně $\mathbf{Z}_k$*-relací*.

Pak podmínka $(\mathbf{Z}_1)$ je ekvivalentní podmínce o reflexivnosti a podmínka $(\mathbf{Z}_2)$ podmínce o symetričnosti binární relace ϱ. Přepíšeme-li podmínku $(\mathbf{Z}_3)$ do tvaru

$$(x, y), (y, z) \in \varrho \Rightarrow (z, x) \in \varrho ,$$

je zřejmá analogie této podmínky s podmínkou transitivnosti relace ϱ.

Ihned se vidí, že binární relace ϱ je cyklickou relací stupňů $k = 1, 2, 3$ právě tehdy, když je ekvivalencí, tj. když je reflexivní, symetrická a transitivní. Dále je zřejmé, že ekvivalence je cyklickou relací všech stupňů.

Graf $F(\varrho)$ nazýváme *cyklickým grafem stupně* k, jestliže jeho relace ϱ je $\mathbf{Z}_k$-relací. Platí-li tedy $\varrho = F \times F$, je $F(\varrho)$ cyklickým grafem všech stupňů $k = 1, 2, 3, \ldots$. Jiným triviálním příkladem cyklického grafu stupně k je graf, který neobsahuje žádnou monotonně vázanou posloupnost délky $d \geqq k$. Takovýto graf neobsahuje ovšem žádnou monotonně vázanou a uzavřenou posloupnost a tedy ani žádný cyklus.

Stupeň k cyklického grafu $F(\varrho)$ nazvěme jeho *periodou*, jestliže existuje cyklus délky k v grafu $F(\varrho)$ a jestliže pro délku d každého cyklu v $F(\varrho)$ platí $d \geqq k$. Tedy cyklus délky k je příkladem cyklického grafu o periodě k.

Cyklus $\{u_i\}_{i=1}^{d}$ grafu $F(\varrho)$ nazvěme *ryzím cyklem grafu* $F(\varrho)$, jestliže splňuje podmínku

$$(u_i, u_j) \in \varrho \Leftrightarrow i + 1 \equiv j \pmod{d} , \qquad (1)$$

tj. jestliže tento cyklus je nasyceným subgrafem grafu $F(\varrho)$.

Cyklické relace a grafy

Lemma 1. *Nechť $\{u_i\}_{i=1}^{d}$ je uzavřená monotonně vázaná posloupnost v $\mathbf{Z}_k$-grafu $F(\varrho)$ a nechť k celým číslům a, b lze najít celé číslo $r \geqq 0$ takové, že platí*

$$a - b \equiv -(1 - k)^r \pmod{d} . \qquad (2)$$

Pak platí $(u_a, u_b) \in \varrho$.

Důkaz. Pro $r = 0$ z (2) plyne $b \equiv a + 1 \pmod d$, tj. $u_b = u_{a+1}$. Avšak $(u_a, u_{a+1}) \in \varrho$, takže pro $r = 0$ je lemma správné. Budiž nyní $r > 0$ a předpokládejme, že lemma je správné pro $r - 1$. Z (2) pak plyne $u_b = u_{a+(1-k)^r}$, ale $a + (1-k)^r = a - (k-1)(1-k)^{r-1}$, takže položíme-li $c_i = a - (k-i) \cdot (1-k)^{r-1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$, platí $c_i - c_{i+1} = -(1-k)^{r-1}$ pro $1 \leqq i < k$ a podle indukčního předpokladu musí být $(u_{c_i}, u_{c_{i+1}}) \in \varrho$. Tedy $\{u_{c_i}\}_{i=1}^k$ je monotonně vázaná posloupnost v $F(\varrho)$ délky k, takže z podmínky $(\mathbf{Z}_k)$ plyne $(u_{c_k}, u_{c_1}) \in \varrho$, avšak $c_k = a$, $c_1 = b$.

Věta 1. *Délka ryzího cyklu cyklického grafu je dělitelem jeho stupně.*

Důkaz. Nechť $\{u_i\}_{i=1}^d$ je ryzí cyklus v $\mathbf{Z}_k$-grafu $F(\varrho)$. Položíme-li $a = k$, $b = 1$ a $r = 1$, je splněna podmínka (2), takže podle lemmatu 1 platí $(u_a, u_b) \in \varrho$. Z (1) pak plyne $k \equiv 0 \pmod d$.

Lemma 2. *Jestliže cyklický graf stupně k obsahuje uzavřenou monotonně vázanou posloupnost délky $d < k$ a jestliže $d \nmid k$, pak také obsahuje uzavřenou monotonně vázanou posloupnost délky d_1, při čemž $0 < d_1 < d$ a $d_1 \equiv k \pmod d$.*

Důkaz. Nechť $\{u_i\}_{i=1}^d$ je předpokládaná uzavřená monotonně vázaná posloupnost v daném $\mathbf{Z}_k$-grafu $F(\varrho)$. Pak $u_k \neq u_d$, neboť $k \not\equiv d \pmod d$, a tedy existuje d_1, pro něž platí $d_1 \equiv k \pmod d$ a $1 \leqq d_1 < d$. Potom ovšem $u_k = u_{d_1}$ a podle $(\mathbf{Z}_k)$ musí být $(u_{d_1}, u_1) \in \varrho$, takže $\{u_i\}_{i=1}^{d_1}$ je uzavřená monotonně vázaná posloupnost v $F(\varrho)$ délky d_1.

Věta 2. *Homomorfní vzor i obraz cyklického grafu stupně k je zase cyklický graf stupně k.*

Důkaz plyne přímo z definice homomorfismu a z definice podmínky $(\mathbf{Z}_k)$.

Důsledek 1. *Homomorfní vzor cyklu délky k je cyklickým grafem o periodě k.*

Důkaz. Jelikož cyklus délky k je cyklickým grafem stupně k, je podle věty 2 každý jeho homomorfní vzor rovněž cyklickým grafem stupně k. Podle [1], 2.10 však homomorfní vzor obsahuje subgraf, který je isomorfní s příslušným homomorfním obrazem, takže v našem případě homomorfní vzor cyklu obsahuje zase cyklus téže délky. Z definice homomorfismu konečně ihned plyne, že homomorfní vzor cyklu délky k neobsahuje žádný cyklus délky $d < k$ a tedy podle předešlého, že je cyklickým grafem o periodě k.

Lemma 3. *Nasycený subgraf cyklického grafu stupně k je zase cyklickým grafem stupně k.*

Důkaz. Nechť $\{u_i\}_{i=1}^k$ je monotonně vázaná posloupnost v nasyceném subgrafu $G(\sigma)$ daného $\mathbf{Z}_k$-grafu $F(\varrho)$, tj. $u_i \in G$ pro $1 \leqq i \leqq k$. Podle $(\mathbf{Z}_k)$ je $(u_k, u_1) \in \varrho$, ale také $(u_k, u_1) \in G \times G$ čili $(u_k, u_1) \in \sigma$ a proto σ je $\mathbf{Z}_k$-relací.

Věta 3. *Souvislý cyklický graf stupně $k \geqq 2$, který obsahuje alespoň jeden cyklus, je monotonně souvislý.*

Důkaz. Nechť $\{u_i\}_{i=1}^d$ je předpokládaný cyklus souvislého $\mathbf{Z}_k$-grafu $F(\varrho)$ a nechť $x, y \in F$, $x \neq y$ jsou dva jeho uzly. Je-li $k = 2$, pak $F(\varrho)$ je $\mathbf{S}$-graf (tj. ϱ je symetrická relace) a pro $\mathbf{S}$-graf je podmínka souvislosti ekvivalentní podmínce monotonní souvislosti (viz [1], kap. 3). Nechť nyní $k \geqq 3$ a uvažujme uzel $z \in F$, pro nějž platí $z \neq u_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, d$ (jestliže takový uzel neexistuje, je $F(\varrho)$ cyklem a ten zřejmě je monotonně souvislý). Dokážeme, že existuje monotonně vázaná posloupnost od z do u_i pro vhodné i. Předpokládejme opak, tj. že neexistuje monotonně vázaná posloupnost od z do u_l pro žádné l, $1 \leqq l \leqq d$. Ze souvislosti grafu $F(\varrho)$ plyne, že existuje vázaná posloupnost $\{v_i\}_{i=1}^h$ od z do u_l pro každé $1 \leqq l \leqq d$. Ke každé takovéto posloupnosti přiřaďme minimální index j_v, pro který platí, že $\{v_i\}_{i=j_v}^h$ je monotonně vázaná posloupnost (při tom ovšem $z = v_1$ a $u_l = v_h$) a nechť j značí minimum všech indexů j_v. Lze předpokládat, že právě pro posloupnost $\{v_i\}_{i=1}^h$ platí $j_v = j$, takže (v_{j-1}, v_j) non $\in \varrho$ a proto $(v_j, v_{j-1}) \in \varrho$. Vázanou posloupnost $\{v_i\}_{i=1}^h$ od z do u_l lze prodloužit o nd prvků (pro každé přirozené číslo n) tím, že po prvku $v_h = u_l$ bude následovat n po sobě jdoucích cyklů $\{u_i\}_{i=l+1}^{l+d}$, tj. konec prodloužené posloupnosti bude tvaru $\{\ldots v_h = u_l, u_{l+1}, \ldots, u_d, u_1, \ldots \ldots, u_d, \ldots, u_1, \ldots, u_l = v_h\}$. Při tom index j_v přiřazený prodloužené posloupnosti je stejný jako u původní. Proto lze předpokládat, že platí $k \leqq h - j + 1$. Pak $\{v_j, v_{j+1}, \ldots, v_{j+k-1}\}$ je monotonně vázaná délky k, takže podle $(\mathbf{Z}_k)$ je $(v_{j+k-1}, v_j) \in \varrho$. Potom také $\{v_{j+2}, v_{j+3}, \ldots, v_{j+k-1}, v_j, v_{j-1}\}$ je monotonně vázaná délky k a proto zase podle $(\mathbf{Z}_k)$ platí $(v_{j-1}, v_{j+2}) \in \varrho$. Odtud však plyne, že $\{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v_{j+2}, v_{j+3}, \ldots, v_h\}$ je vázaná posloupnost od z do u_l a jí přiřazený index $j_v \leqq j - 1$, neboť $\{v_{j-1}, v_{j+2}, \ldots, v_h\}$ je monotonně vázaná posloupnost. To je však spor s minimalitou indexu j. Tím je ukázáno, že existuje monotonně vázaná posloupnost od z do u_l pro jistý index $1 \leqq l \leqq d$, a odtud ihned plyne, že to platí pro každý u_l, $1 \leqq l \leqq d$. Obdobným způsobem se dokáže existence monotonně vázané posloupnosti od u_l do z pro každý u_l, $1 \leqq l \leqq d$.

Je-li konečně $x = u_i$, $y = u_j$, pak zřejmě x, y monotonně souvisí v $F(\varrho)$. Je-li na příklad $x \neq u_i$ pro každé i a $y = u_j$, pak pro $x = z$ předešlá konstrukce ukazuje, že zase x, y monotonně souvisí v $F(\varrho)$. Je-li nakonec $x \neq u_i \neq y$ pro každé i, stačí zvolit pevně uzel u_l a uvažovat monotonně vázané posloupnosti od x do u_l a od u_l do y, jejichž existence byla dokázána shora. Z nich se snadno vytvoří monotonně vázaná posloupnost od x do y. Tím je ukázáno, že každé dva uzly x, y v $F(\varrho)$ monotonně souvisí čili že $F(\varrho)$ je monotonně souvislý.

Důsledek 2. *Souvislý cyklický graf o periodě $k \geqq 2$ je monotonně souvislý.*

Důkaz. Tvrzení plyne z věty 3 a z definice periody cyklického grafu.

Lemma 4. *Cyklus nejkratší délky libovolného grafu je vždy ryzím cyklem tohoto grafu.*

Důkaz plyne ihned z podmínky (1).

Cyklem délky k pro $k = 1$ příp. $k = 2$ se rozumí uzel se smyčkou příp. dva různé uzly $x \neq y$ spolu s hranami (x, y), (y, x). Snadno se udají příklady $\mathbf{Z}_k$-grafů (dokonce souvislých) o periodě $k = 1, 2$, které nejsou homomorfními vzory cyklu délky k, tj. pro $k = 1, 2$ se důsledek 1 nedá obrátit. Platí však

Věta 4. *Graf $F(\varrho)$ je souvislým cyklickým grafem o periodě $k \geqq 3$ právě tehdy, když je homomorfním vzorem cyklu délky k.*

Důkaz. Je-li $F(\varrho)$ homomorfním vzorem cyklu délky $k \geqq 3$, pak podle věty 2 je cyklickým grafem stupně k a podle [1], 3.1 je souvislý. Avšak $F(\varrho)$ zřejmě obsahuje cyklus délky k a sporem se ihned odvodí, že každý jeho cyklus má délku $d \geqq k$ čili $F(\varrho)$ má periodu k.

Nechť nyní naopak $F(\varrho)$ je souvislý cyklický graf o periodě $k \geqq 3$. Pak existuje cyklus $\{u_i\}_{i=1}^k$ v $F(\varrho)$ a označme $V_{i+1} = R(u_i)$ (tj. V_{i+1} značí množinu všech $x \in F$, pro něž platí $(u_i, x) \in \varrho$, viz [1], str. 136). Předpokládejme, že $\emptyset \neq$ $\neq A = F - \bigcup_{i=1}^{k} V_i$. Podle věty 3 je $F(\varrho)$ monotonně souvislý, takže k uzlům u_1 a $a \in A$ existuje monotonně vázaná posloupnost $\{u_1 = w_1, \ldots, w_n = a\}$. Pak existuje index h, $1 \leqq h < n$ takový, že $w_h \in \bigcup_{i=1}^{k} V_i$, ale $w_{h+1} \in A$. To především znamená, že existuje index j, $1 \leqq j \leqq k$, pro nějž platí $w_h \in V_j$, a jelikož $k \geqq 3$, existuje dále monotonně vázaná posloupnost $\{u_{j+2}, \ldots, u_k, u_1, \ldots, u_{j-1}, w_h, w_{h+1}\}$ délky k, která kromě uzlů w_h, w_{h+1} obsahuje alespoň jeden uzel u_i, takže podle ($\mathbf{Z}_k$) je $(w_{h+1}, u_{j+2}) \in \varrho$. Nyní však rovněž $\{w_{h+1}, u_{j+2}, \ldots, u_k, u_1, \ldots \ldots, u_j\}$ je monotonně vázaná posloupnost délky k a proto $(u_j, w_{h+1}) \in \varrho$, což však znamená, že $w_{h+1} \in V_{j+1}$, a to je spor. Platí tedy $\bigcup_{i=1}^{k} V_i = F$.

Nechť nyní $v_j \in V_j$ a $v_{j+1} \in V_{j+1}$. Pak $\{u_{j+1}, \ldots, u_k, u_1, \ldots, u_{j-1}, v_j\}$ je monotonně vázaná posloupnost délky k, takže $(v_j, u_{j+1}) \in \varrho$ pro každý j, $1 \leqq j \leqq k$. Proto také $\{v_{j+1}, u_{j+2}, \ldots, u_k, u_1, \ldots, u_{j-1}, v_j\}$ je monotonně vázaná posloupnost délky k a tedy $(v_j, v_{j+1}) \in \varrho$ pro každý $v_j \in V_j$, každý $1 \leqq j \leqq k$.

Kdyby existovala hrana $(x, y) \in \varrho$ taková, že $x \in V_i$, $y \in V_j$, kde $j \neq i + 1$, pak by v případě $i < j$ $\{y, u_{j+1}, \ldots, u_k, u_1, \ldots, u_{i-1}, x\}$ byl cyklus délky $d < k$ a to je spor. Podobně se odvodí spor v případě $j < i$. Odtud a z předešlého plyne

$$(x, y) \in \varrho \Leftrightarrow x \in V_i\,,\ \ y \in V_{i+1} \text{ pro vhodné } i,\ 1 \leqq i \leqq k\,. \tag{3}$$

Kdyby konečně $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ pro $i \neq j$, byl by pro $x \in V_i \cap V_j$ a $i < j$ $\{x, u_{j+1}, \ldots, u_k, u_1, \ldots, u_{i-1}\}$ cyklus délky $d < k$, což je spor, a podobně se odvodí spor v případě $j < i$. Platí tedy $V_i \cap V_j = \emptyset$ pro $i \neq j$.

Tím je ukázáno, že množiny V_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, tvoří rozklad na F. Tento rozklad $\bar{F}$ je podle (3) vytvořující a tedy faktorový graf $\bar{F}(\bar{\varrho})$ je cyklus délky k. To však podle [1], 2.2 znamená, že $F(\varrho)$ je homomorfním vzorem cyklu délky k.

Důsledek 3. *Souvislý cyklický graf o periodě $k \geqq 3$ je jednoduchým grafem právě tehdy, když je cyklem délky k.*

Důkaz. Nechť nejdříve $F(\varrho)$ je jednoduchým, souvislým cyklickým grafem o periodě $k \geqq 3$. Podle věty 4 musí být $F(\varrho)$ homomorfním vzorem cyklu délky k, čili tento cyklus délky k je homomorfním obrazem grafu $F(\varrho)$. Avšak podle [1], 2, 11 je každý homomorfní obraz jednoduchého grafu isomorfní s daným grafem, takže v našem případě $F(\varrho)$ je isomorfní s cyklem délky k, čili je sám cyklem délky k.

Nechť nyní naopak $F(\varrho) = \{u_i\}_{i=1}^k$ je cyklus délky $k \geqq 3$. Pak především $F(\varrho)$ je souvislý cyklický graf o periodě k a nechť $u_i \neq u_j$, $l \leqq i < j \leqq k$ jsou dva jeho uzly. Jestliže $u_{i+1} \neq u_j$, pak $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$, ale (u_j, u_{i+1}) non $\in \varrho$, a jestliže $u_{i+1} = u_j$, pak $u_{j+1} \neq u_i$ (neboť $k \geqq 3$) a tedy $(u_j, u_{j+1}) \in \varrho$, ale (u_i, u_{j+1}) non $\in \varrho$, takže v každém případě existuje u_h, $1 \leqq h \leqq k$ takový, že platí právě jedno z následujících dvou tvrzení $(u_i, u_h) \in \varrho$, $(u_j, u_h) \in \varrho$. To však podle [1], 2.3 znamená, že $F(\varrho)$ je jednoduchým grafem.

Z věty 4 a z důsledku 3 plyne, že každý souvislý cyklický graf o periodě $k \geqq 3$ je jednoznačně (až na isomorfismus) charakterisován systémem mohutností $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, tj. svojí *homomorfní charakteristikou* (viz [1], kap. 2).

Cykly a oboustranně nekonečné dráhy cyklických grafů

Věta 5. *Nechť $\{\alpha_i\}$ je homomorfní charakteristika souvislého cyklického grafu $F(\varrho)$ o periodě $k \geqq 3$. Pak $F(\varrho)$ obsahuje cyklus délky d právě tehdy, když $d = nk$, kde n je přirozené číslo, a když $\alpha_i \geqq n$ pro každý $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Důkaz. Nechť nejdříve $F(\varrho)$ obsahuje cyklus délky d. Z věty 4 ihned plyne, že cyklus délky k v $F(\varrho)$ musí být ryzím cyklem v $F(\varrho)$, takže podle věty 1 musí platit $d = nk$. Podle věty 4 existuje homomorfismus φ, který zobrazuje $F(\varrho)$ na jeho cyklus $\{v_i\}_{i=1}^k$. Příslušný vytvořující rozklad na $F(\varrho)$ označme $\bar{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ a předpokládejme, že $v_i \in F_i$ pro $1 \leqq i \leqq k$. Je-li konečně $\{u_i\}_{i=1}^d$ předpokládaný cyklus, pak lze předpokládat, že $u_1 \in F_1$. Pak ihned plyne $\varphi(u_h) = \varphi(u_i) = v_j$ pro $h \equiv i \equiv j \pmod k$ a odtud kard $F_j \geqq n$ pro $1 \leqq j \leqq k$.

Jestliže naopak homomorfní charakteristika $\{\alpha_i\}$ splňuje uvedené podmínky, pak pro příslušný vytvořující rozklad $\bar{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ platí kard $F_i \geqq n$ a proto z F_i lze vybrat uzly $u_{i,j}$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$ a $1 \leqq i \leqq k$. Z definice homomorfismu však ihned plyne, že $\{u_{1,1}, u_{2,1}, \ldots, u_{k,1}\, u_{1,2}, \ldots, u_{k,n}\}$ je cyklus délky d.

Důsledek 4. *Nechť $\{\alpha_i\}$ je homomorfní charakteristika souvislého cyklického grafu o periodě $k \geqq 3$ a nechť $d = nk$, kde n je přirozené číslo. Pak v daném* *grafu existuje právě* $\prod_{i=1}^{k}\left[\binom{\alpha_i}{n} n!\right]$ *různých cyklů délky d, když* $\binom{\alpha_i}{n}$ *značí mohutnost systému všech podmnožin mohutnosti n v množině o mohutnosti* α_i.

Důkaz. Tvrzení plyne z vět 5 a 4, když se využije rozložení uzlů uvažovaných cyklů v prvcích vytvořujícího rozkladu daného grafu určeného homomorfismem, který daný graf zobrazuje na cyklus délky k.

Důsledek 5. *Nechť* $\{\alpha_i\}$ *je homomorfní charakteristika souvislého cyklického grafu o periodě* $k \geqq 3$ *a nechť* $d = nk$, *kde n je přirozené číslo. Nechť dále* α *je nejmenší z mohutností* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *a nechť* $\left[\frac{\alpha}{n}\right]$ *značí Gaussovu funkci pro konečné* α *a pro nekonečné* α *nechť značí* α. *Pak v daném grafu existuje* $\left[\frac{\alpha}{n}\right]$ *disjunktních cyklů délky d, ale neexistuje více disjunktních cyklů délky d.*

Důkaz se vede stejným způsobem, jak je naznačeno v důkaze předešlého důsledku 4.

Snadno se nahlédne, že tvrzení důsledků 4 a 5 lze obrátit, tj. že uvedené podmínky jsou také nutné pro existenci příslušného počtu uvažovaných cyklů.

V konečných cyklických grafech se ukazuje těsná souvislost mezi pojmy cyklu a oboustranně nekonečné dráhy.

Věta 6. *Nechť* $\{\alpha_i\}$ *je homomorfní charakteristika souvislého cyklického grafu o periodě* $k \geqq 3$. *Pak v daném grafu existuje oboustranně nekonečná dráha právě tehdy, když* α_i *je nekonečná mohutnost pro každé i.*

Důkaz. Nechť $F(\varrho)$ je daný souvislý cyklický graf o periodě $k \geqq 3$, takže podle věty 4 existuje homomorfismus φ zobrazující $F(\varrho)$ na cyklus $\{v_i\}_{i=1}^{k}$. Podle důsledku 3 je cyklus délky k jednoduchým grafem a tedy pro vytvořující rozklad $\overline{F}$ grafu $F(\varrho)$ určený homomorfismem φ platí $\alpha_i = \text{kard } F_i$, když $\overline{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$.

Jsou-li nejdříve α_i nekonečné mohutnosti, označme $G_i \subset F_i$ spočetné podmnožiny a jejich prvky označme u_m, kde $m = i + nk$ pro každé celé číslo n. Potom zřejmě $\{\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots\}$ je oboustranně nekonečná dráha v $F(\varrho)$, neboť $u_i \neq u_j$ pro $i \neq j$, a z vlastností homomorfismu plyne $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$.

Nechť konečně $\{\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots\}$ je oboustranně nekonečná dráha v $F(\varrho)$. Pak lze o uvažovaném homomorfismu předpokládat, že $\varphi(u_1) = v_1$. Z vlastností homomorfismu však ihned plyne, že $\varphi(u_m) = v_i$ platí právě tehdy, když $m \equiv i \pmod{k}$. Dále lze předpokládat, že $u_1 \in F_1$, a odtud ihned plyne $G_1 \subset F_i$, kde $G_i = \underset{u_m}{E}\{\varphi(u_m) = v_i\}$. Avšak kard G_i jsou nekonečné mohutnosti a proto také kard F_i jsou nekonečné mohutnosti pro každé i.

Věta 7. *Nechť h je délka nejkratšího cyklu souvislého cyklického grafu $F(\varrho)$ stupně $k \geqq 3$. Pak $F(\varrho)$ je cyklickým grafem o periodě h.*

Důkaz. Podle předpokladu v $F(\varrho)$ existuje cyklus $\{u_i\}_{i=1}^h$, který podle lemmatu 4 je ryzí, takže podle věty 1 platí $h \mid k$. Označme $V_{i+1} = R(u_i)$ pro $1 \leqq i \leqq h$. Podle věty 3 je $F(\varrho)$ monotonně souvislý, takže ke každému $x \in F$, $x \neq u_i$ pro $1 \leqq i \leqq h$ existuje monotonně vázaná posloupnost $\{u_1 = w_1, w_2, \ldots, w_n = x\}$. Kdyby $x \operatorname{non} \in \bigcup_{i=1}^{h} V_i$, existoval by index m, $1 \leqq m < n$ takový, že $w_m \in \bigcup_{i=1}^{h} V_i$, ale $w_{m+1} \operatorname{non} \in \bigcup_{i=1}^{h} V_i$. To by však znamenalo, že existuje index j, $1 \leqq j \leqq h$, pro nějž platí $w_m \in V_j$, a jelikož $k \geqq 3$, existuje monotonně vázaná posloupnost $\{u_s, u_{s+1}, \ldots, u_{j-2}, u_{j-1}, w_m, w_{m+1}\}$ délky k, která kromě uzlů w_m, w_{m+1} obsahuje alespoň jeden z uzlů u_i, takže podle $(\mathbf{Z}_k)$ musí být $(w_{m+1}, u_s) \in \varrho$. Při tom podle předešlého $s = j + 2$ (neboť $h \mid k$) a tedy existuje monotonně vázaná posloupnost $\{w_{m+1}, u_s = u_{j+2}, u_{j+3}, \ldots, u_r\}$ délky k, takže jednak $r = j$, jednak podle $(\mathbf{Z}_k)$ zase $(u_r, w_{m+1}) \in \varrho$, což však znamená, že $w_{m+1} \in V_{j+1}$, a to je spor. Tedy platí $\bigcup_{i=1}^{h} V_i = F$.

Nechť nyní $v_j \in V_j$ a $v_{j+1} \in V_{j+1}$. Pak existuje monotonně vázaná posloupnost $\{u_{j+1}, \ldots, u_{j-1}, v_j\}$ délky k, takže podle $(\mathbf{Z}_k)$ je $(v_j, u_{j+1}) \in \varrho$, a toto platí pro každý $1 \leqq j \leqq h$. Proto existuje monotonně vázaná posloupnost $\{v_{j+1}, u_{j+2}, \ldots, u_{j-1}, v_j\}$ délky k a tedy $(v_j, v_{j+1}) \in \varrho$. Kdyby konečně existovala hrana $(x, y) \in \varrho$ taková, že $x \in V_i$ a $y \in V_j$, kde $j \neq i + 1$, odvodil by se ihned spor s tím, že h je délka nejkratšího cyklu, a stejným způsobem se odvodí spor z předpokladu $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ pro $i \neq j$. Tím je tedy ukázáno, že množiny V_i tvoří rozklad na F a tento rozklad $\bar{F}$ splňuje podmínku (3), v níž místo k píšeme h, takže $\bar{F}$ je vytvořující rozklad. Z (3) plyne, že faktorový graf $\bar{F}(\bar{\varrho})$ je cyklem délky h. To však podle [1], 2.2 znamená, že $F(\varrho)$ je homomorfním vzorem cyklu délky h a tedy podle věty 4 je $F(\varrho)$ cyklickým grafem o periodě h.

Důsledek 6. *V cyklickém grafu stupně $k \geqq 3$ je cyklus ryzím cyklem právě tehdy, když je cyklem nejkratší délky.*

Důkaz. Dostatečnost uvedené podmínky plyne z lemmatu 4. Dokážeme její nutnost. Nechť h je délka nejkratšího cyklu v $\mathbf{Z}_k$-grafu $F(\varrho)$, takže podle věty 7 $F(\varrho)$ je $\mathbf{Z}_k$-graf o periodě h. Je-li však d délka nějakého ryzího cyklu v $F(\varrho)$, pak jednak je $h \leqq d$, jednak podle věty 1 platí $d \mid h$, což však znamená, že $d = h$.

LITERATURA

[1] *Karel Čulík:* Zur Theorie der Graphen, Časopis pro pěst. mat. *83* (1958), 133—155.

[2] *Dénes König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

Резюме

О ЦИКЛАХ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ

КАРЕЛ ЧУЛИК (Karel Čulík), Брно

(Поступило в редакцию 28/IX. 1957 г.)

Под бинарным отношением ϱ, определенным на множестве $F \neq 0$, мы подразумеваем *подмножество декартова произведения* $F \times F$. Множество F с отношением ϱ называется *графом* $F(\varrho)$. Последовательность $\{u_i\}_{i=1}^k$ элементов $u_i \in F$ называется *связанной*, соотв. *монотонно связанной в* $F(\varrho)$, если или $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$ или $(u_{i+1}, u_i) \in \varrho$, соотв. $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$ имеет место для любого $i = 1, 2, \ldots, k - 1$. Такую последовательность мы назовем, далее, *замкнутой* (связанной, соотв. монотонно связанной), если, кроме того, или $(u_k, u_1) \in \varrho$ или $(u_1, u_k) \in \varrho$, соотв. $(u_k, u_1) \in \varrho$. Натуральное число k называется *длиной* этой последовательности. Граф $G(\sigma)$ называется *циклом*, соотв. *двусторонне бесконечным путем*, если

$$G = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\},\ \sigma = \{(u_1, u_2), (u_2, u_3), \ldots, (u_{k-1}, u_k), (u_k, u_1)\}$$

соотв.

$$G = \{\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots\},$$
$$\sigma = \{\ldots, (u_{-2}, u_{-1}), (u_{-1}, u_0), (u_0, u_1), (u_1, u_2), \ldots\}.$$

Подграф $G(\sigma)$ графа $F(\varrho)$ (т. е. $G \subset F$, $\sigma \subset \varrho$), являющийся циклом, называется *строгим* циклом в $F(\varrho)$, если $\sigma = \varrho \cap G \times G$ (об остальных понятиях см. [1]).

Отношение ϱ называется *циклическим степени* k ($\mathbf{Z}_k$-отношением), если оно удовлетворяет следующему условию:

$\{u_i\}_{i=1}^k$ *есть монотонно связанная последовательность в* $\varrho \Rightarrow (u_k, u_1) \in \varrho$. $(\mathbf{Z}_k)$

Граф $F(\varrho)$ называется *циклическим степени* k, если его отношение является $\mathbf{Z}_k$-отношением.

Степень k циклического графа $F(\varrho)$ называется его *периодом*, если в $F(\varrho)$ имеется цикл длины k и если в $F(\varrho)$ не имеется цикла, длина которого была бы меньше k.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Длина строгого цикла в циклическом графе степени k является делителем степени k.*

Теорема 2. *Связный циклический граф периода $k \geqq 3$ будет простым тогда и только тогда, если он будет циклом длины k.*

Теорема 3. *Связный граф будет циклическим графом периода $k \geqq 3$ тогда и только тогда, если он будет гомоморфным прообразом цикла длины k.*

Итак, каждый связный циклический граф периода $k \geqq 3$ можно полностью охарактеризовать при помощи k мощностей (при помощи его т. наз. *гомоморфной характеристики* [1]). В таком случае нетрудно доказать

Теорему 4. *Если* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *— гомоморфная характеристика связного циклического графа периода* $k \geqq 3$, *то этот граф содержит* а) *цикл длины* d *тогда и только тогда, если* $d = nk$, *где* n *— натуральное число, и если* $\alpha_i \geqq n$ *для* $i = 1, 2, \ldots, k$; б) *двусторонне бесконечный путь тогда и только тогда, если* α_i *— бесконечная мощность для любого* $i = 1, 2, \ldots, k$.

Zusammenfassung

ÜBER ZYKLEN DER ZYKLISCHEN GRAPHEN

KAREL ČULÍK, Brno

(Eingegangen am 28. September 1957)

Unter einer *binären Relation* ϱ, die auf der Menge $F \neq \emptyset$ definiert ist, verstehen wir eine Teilmenge des kartesischen Produktes $F \times F$. Die Menge F mit der Relation ϱ heisst ein *Graph* $F(\varrho)$. Eine Folge $\{u_i\}_{i=1}^k$ der Elemente $u_i \in F$ heisst eine *gebundene* bzw. *monoton gebundene* Folge in $F(\varrho)$, wenn entweder $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$ oder $(u_{i+1}, u_i) \in \varrho$ bzw. $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$ für $i = 1, 2, \ldots, k - 1$ gilt. Eine solche Folge heisst eine *geschlossene* (gebundene bzw. monoton gebundene) Folge, wenn noch eine weitere Bedingung und zwar entweder $(u_k, u_1) \in \varrho$ oder $(u_1, u_k) \in \varrho$ bzw. $(u_k, u_1) \in \varrho$ erfüllt ist. Die natürliche Zahl k heisst *Länge* dieser Folge. Ein Graph $G(\sigma)$ heisst ein *Zyklus* bzw. eine *beiderseits unendliche Bahn*, wenn er folgendermassen definiert ist:

$$G = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}, \ \sigma = \{(u_1, u_2), \ (u_2, u_3), \ \ldots (u_{k-1}, u_k), \ (u_k, u_1)\}$$

bzw.

$$G = \{\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots\}, \ \sigma = \{\ldots, (u_{-2}, u_{-1}), \ (u_{-1}, u_0), \ (u_0, u_1), \ (u_1, u_2), \ldots\}.$$

Ein Teilgraph $G(\sigma)$ des Graphen $F(\varrho)$ (d. h. $G \subset F$, $\sigma \subset \varrho$), der ein Zyklus ist, heisst ein *reiner Zyklus im* $F(\varrho)$, wenn $\sigma = \varrho \cap G \times G$ gilt (über weitere Begriffe siehe [1]).

Eine Relation ϱ heisst *zyklische Relation vom Grade* k ($\mathbf{Z}_k$-Relation), wenn sie die Bedingung, dass $\{u_i\}_{i=1}^k$ eine monoton gebundene Folge in $\varrho \Rightarrow (u_k, u_1) \in \varrho$ ist, erfüllt. Ein Graph $F(\varrho)$ heisst ein *zyklischer Graph vom Grade* k, wenn seine Relation ϱ eine $\mathbf{Z}_k$-Relation ist.

Der Grad k eines zyklischen Graphen $F(\varrho)$ heisst seine *Periode*, wenn in $F(\varrho)$ ein Zyklus der Länge k existiert und wenn die Länge d jedes Zyklus im $F(\varrho)$ nicht kleiner als k ist.

Nun gelten folgende Sätze:

Satz 1. *Die Länge eines reinen Zyklus des zyklischen Graphen vom Grade k ist ein Teiler des Grades k.*

Satz 2. *Ein zusammenhängender zyklischer Graph mit der Periode $k \leqq 3$ ist dann und nur dann einfach, wenn er ein Zyklus der Länge k ist.*

Satz 3. *Ein zusammenhängender Graph ist dann nur und dann ein zyklischer Graph mit der Periode $k \geqq 3$, wenn er ein homomorphes Vorbild eines Zyklus der Länge k ist.*

Also, jeder zusammenhängende zyklische Graph mit der Periode $k \geqq 3$ ist mit Hilfe eines Systems von k Mächtigkeiten (sog. seiner *homomorphen Charakteristik* [1]) vollkommen charakterisiert. Daraus schliesst man leicht, dass folgender Satz gilt:

Satz 4. *Ist $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ die homomorphe Charakteristik eines zusammenhängenden zyklischen Graphen mit der Periode $k \geqq 3$, so enthält dieser Graph* a) *einen Zyklus der Länge d dann und nur dann, wenn $d = nk$, wo n eine natürliche Zahl ist, und wenn $\alpha_i \geqq n$ für $i = 1, 2, \ldots, k$ ist,* b) *eine beiderseits unendliche Bahn dann und nur dann, wenn α_i eine unendliche Mächtigkeit für $i = 1, 2, \ldots, k$ ist.*