Časopis pro pěstování matematiky

Zdeněk Hustý

O ekvivalenci a iteraci homogenních lineárních diferenciálních rovnic

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 4, 475--476

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108638

O EKVIVALENCI A ITERACI HOMOGENNÍCH LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

(Vlastní referát Z. Hustého o přednášce proslovené v rámci „Diskusí o nových pracích brněnských matematiků“ dne 31. března 1958 v Brně)

Dvě lineární homogenní diferenciální rovnice se nazývají ekvivalentní, jestliže jedna vznikne z druhé pomocí transformace tvaru

$$y = u(x)\, z\,, \tag{1}$$

$$t = t(x)\,. \tag{2}$$

Nutné a postačující podmínky, které musí splňovat koeficienty rovnic

$$Y^{(n)}(x) = \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} A_i(x)\, Y^{(n-i)}(x) = 0\,, \tag{A}$$

$$Z^{(n)}(t) + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} B_i(t)\, Z^{(n-i)}(t) = 0\,, \tag{B}$$

aby rovnice (A), (B) byly ekvivalentní, jsou $[t'(x)]^i\, \vartheta_i(t) = \vartheta_i(x)$, $i = 3, 4, \ldots, n$, kde $\vartheta_i(t)$ je celistvá racionální funkce koeficientů $B_2, B_3, \ldots, B_i$ rovnice (B) a jejich derivací a $\vartheta_i(x)$ je tatáž celistvá racionální funkce koeficientů $A_2, A_3, \ldots, A_i$ rovnice (A) a jejich derivací. Funkce ϑ_i se nazývají lineárními invarianty váhy a dimense i.[1]) Následující tvrzení naznačují, že lineární invarianty mají značný význam v teorii lineárních homogenních diferenciálních rovnic.

(1) *Když všechny lineární invarianty $\vartheta_i(x)$ rovnice* (A) *s lichými indexy jsou identicky rovny nule, pak rovnice* (A) *je samoadjungovaná.*

(2) *Když a jen když všechny lineární invarianty rovnice* (A) *jsou identicky rovny nule, pak obecný integrál rovnice* (A) *je binární forma n — 1-ho stupně s konstantními koeficienty prvků u, v, které tvoří fundamentální systém homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu* $u'' + \dfrac{3}{n+1} A_2 u = 0$.

Iterací homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu $L[y] = 0$ obdržíme homogenní lineární diferenciální rovnici $2n$-tého řádu $L^2[y] = 0$. Iterovanou rovnicí nazýváme každou homogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu $P^n[y] = 0$, která vznikne n-násobnou iterací homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu $P[y] = 0$. Indukcí se dá ukázat, že iterovaná rovnice n-tého řádu s koeficientem při $y^{(n-1)}$ rovným nule je tvaru

$$y^{(n)} + \binom{n}{2} A_2 y^{(n-2)} + \binom{n}{3} \frac{3}{2} A_2' y^{(n-3)} + \sum_{k=4}^{n} \binom{n}{k} y^{(n-k)} f_k(A_2) = 0\,, \tag{I}$$

---

[1]) V každé homogenní lineární diferenciální rovnici přiřazujeme hledané funkci dimensi 0 a koeficientu s indexem i dimensi i. Pro dimensi zavádíme tato pravidla:

1. Dimense každé funkce se derivací o jedničku zvětší.
2. Dimense součinu funkcí se rovná součtu dimensí jednotlivých činitelů.
3. Dimense podílu funkcí se rovná dimensi dělence zmenšené o dimensi dělitele.
4. Jestliže dvě funkce mají stejnou dimensi, pak má i jejich součet tutéž dimensi. Naopak, jestliže řekneme, že funkce f má dimensi i, kde $f = \Sigma f_j$, pak každá z funkcí f_j musí mít dimensi i.

Např. „polynom dimense i“ je polynom, jehož každý člen má podle výše uvedených pravidel dimensi i.

kde A_2 je funkce proměnné x dimense 2 a $f_k(A_2)$ je mnohočlen proměnných $A_2, A_2', \ldots, A_2^{(k-2)}$ dimense k, stupně nejvýše $\left[\frac{k}{2}\right]$ a řádu nejvýše $(k - 2)$.[2]) Rovnici (I) značíme symbolicky $I_n(y, A_2) = 0$ a mnohočlen $f_k(X)$ nazýváme iterovaným polynomem. Platí tato věta:

(3) *Rovnice* (A) *je iterovaná, když a jen když její fundamentální systém je binární forma $n - 1$-ho stupně s konstantními koeficienty prvků u, v, které tvoří fundamentální systém homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu* $u'' + \frac{3}{n+1} A_2 u = 0$.

Z vět (2), (3) ihned plyne, že rovnice (A) je iterovaná, když a jen když všechny její lineární invarianty jsou rovny nule, takže diferenciální rovnice, která vznikne z iterované rovnice pomocí transformace tvaru (1), (2), je rovněž iterovaná.

Funkce

$$\omega_k = A_k - f_k(A_2), \quad k = 3, 4, \ldots, n \tag{3}$$

nazýváme iterovanými semiinvarianty rovnice (A). Podle (3) je tedy funkce ω_k mnohočlenem proměnných $A_2, A_2', \ldots, A_2^{(k-2)}, A_k$ dimense k, stupně nejvýše $\left[\frac{k}{2}\right]$ a řádu nejvýše $k - 2$.

Mezi lineárními invarianty a iterovanými semiinvarianty platí vztahy

$$\vartheta_k = c_k \omega_k + \varphi_k(\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_{k-1}; A_2),$$

kde $c_k = \text{konst} \neq 0$ a φ_k je mnohočlen proměnných $\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_{k-1}, A_2$ a jejich derivací dimense k, jehož každý člen má za součinitele aspoň jednu z funkcí ω_i $(i = 3, 4, \ldots, k - 1)$ nebo její derivaci. Platí tato tvrzení:

(4) *Rovnice* (A) *je iterovaná, když a jen když všechny její iterované semiinvarianty jsou rovny nule.*

(5) *Když a jen když všechny lineární invarianty rovnice* (A) *jsou rovny nule, pak všechny její iterované semiinvarianty jsou rovny nule.*

(6) *První nenulový iterovaný semiinvariant je lineárním invariantem.*

Zde předpokládáme, že iterovane semiinvarianty jsou uspořádány podle dimense tak, že ω_j následuje za ω_k, když $j > k$.

Zdeněk Hustý, Brno

NĚKTERÉ VLASTNOSTI HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE n-TÉHO ŘÁDU

(Vlastní referát Z. HUSTÉHO o přednášce proslovené v rámci „Diskusí o nových pracích brněnských matematiků“ dne 24. dubna 1958 v Brně)

Nechť je dána diferenciální rovnice

$$z^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_i z^{(n-i)} = 0, \tag{1}$$

kde koeficienty $a_i^{(n-i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jsou spojité funkce v intervalu $J = \langle \xi, \infty)$.

[2]) Nejvyšší řád derivace funkce A_2, který se vyskytuje v polynomu $f_k(A_2)$, se považuje za řád polynomu $f_k(A_2)$.