Zdeněk Hustý

Některé vlastnosti homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 4, 476--478

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108632

kde A_2 je funkce proměnné x dimense 2 a $f_k(A_2)$ je mnohočlen proměnných $A_2, A_2', \ldots, A_2^{(k-2)}$ dimense k, stupně nejvýše $\left[\frac{k}{2}\right]$ a řádu nejvýše $(k-2)$.[2]) Rovnici (I) značíme symbolicky $I_n(y, A_2) = 0$ a mnohočlen $f_k(X)$ nazýváme iterovaným polynomem. Platí tato věta:

(3) *Rovnice* (A) *je iterovaná, když a jen když její fundamentální systém je binární forma $n-1$-ho stupně s konstantními koeficienty prvků u, v, které tvoří fundamentální systém homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu $u'' + \frac{3}{n+1} A_2 u = 0$.*

Z vět (2), (3) ihned plyne, že rovnice (A) je iterovaná, když a jen když všechny její lineární invarianty jsou rovny nule, takže diferenciální rovnice, která vznikne z iterované rovnice pomocí transformace tvaru (1), (2), je rovněž iterovaná.

Funkce

$$\omega_k = A_k - f_k(A_2), \quad k = 3, 4, \ldots, n \tag{3}$$

nazýváme iterovanými semiinvarianty rovnice (A). Podle (3) je tedy funkce ω_k mnohočlenem proměnných $A_2, A_2', \ldots, A_2^{(k-2)}, A_k$ dimense k, stupně nejvýše $\left[\frac{k}{2}\right]$ a řádu nejvýše $k-2$.

Mezi lineárními invarianty a iterovanými semiinvarianty platí vztahy

$$\vartheta_k = c_k \omega_k + \varphi_k(\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_{k-1}; A_2),$$

kde $c_k =$ konst $\neq 0$ a φ_k je mnohočlen proměnných $\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_{k-1}, A_2$ a jejich derivací dimense k, jehož každý člen má za součinitele aspoň jednu z funkcí ω_i $(i = 3, 4, \ldots, k-1)$ nebo její derivaci. Platí tato tvrzení:

(4) *Rovnice* (A) *je iterovaná, když a jen když všechny její iterované semiinvarianty jsou rovny nule.*

(5) *Když a jen když všechny lineární invarianty rovnice* (A) *jsou rovny nule, pak všechny její iterované semiinvarianty jsou rovny nule.*

(6) *První nenulový iterovaný semiinvariant je lineárním invariantem.*

Zde předpokládáme, že iterovane semiinvarianty jsou uspořádány podle dimense tak, že ω_j následuje za ω_k, když $j > k$.

Zdeněk Hustý, Brno

NĚKTERÉ VLASTNOSTI HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE n-TÉHO ŘÁDU

(Vlastní referát Z. Hustého o přednášce proslovené v rámci „Diskusí o nových pracích brněnských matematiků“ dne 24. dubna 1958 v Brně)

Nechť je dána diferenciální rovnice

$$z^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_i z^{(n-i)} = 0, \tag{1}$$

kde koeficienty $a_i^{(n-i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jsou spojité funkce v intervalu $J = \langle \xi, \infty)$.

[2]) Nejvyšší řád derivace funkce A_2, který se vyskytuje v polynomu $f_k(A_2)$, se považuje za řád polynomu $f_k(A_2)$.

Transformací $z = e^{-\int a_1 dx} . y$ můžeme (1) převést na tvar

$$y^{(n)} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} A_i y^{(n-i)} = 0 \,, \tag{2}$$

kde funkce $A_2 = a_2 - a_1^2 - a_1'$ má spojitou derivaci řádu $n - 2$. Zavedením nových označení $A = A_2$, $\omega_k = A_k - f_k(A)$, $k = 3, 4, \ldots, n$ (kde $f_k(A)$ je iterovaný polynom dimense k), obdržíme kanonický tvar rovnice (2)

$$I_n(y, A) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} y^{(n-i)} \omega_i = 0 \,,$$

kde iterované semiinvarianty ω_i $(i = 3, 4, \ldots, n)$ mají spojité derivace řádu $n - i$. V případě $\omega_i = 0$, $i = 3, 4, \ldots, n$ je

$$I_n(y, A) = 0 \tag{I}$$

iterovanou rovnicí n-tého řádu, jejíž fundamentální systém řešení tvoří funkce $u^{n-i}v^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, kde u, v jsou nezávislé integrály rovnice

$$u'' + \frac{3}{n+1} A u = 0 \,. \tag{II}$$

Iterovaná rovnice (I) má tyto vlastnosti:

(1) Když a jen když integrál $y(x)$ rovnice (I) splňuje v bodě a počáteční podmínky $y^{(i)}(a) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $0 \leqq k \leqq n - 2$, pak jej můžeme psát ve tvaru $y(x) = \sum_{i=1}^{n-k-1} c_i u^{n-i} v^{i-1}$, $c_i =$ konst, kde u, v jsou nezávislé integrály rovnice (II), při čemž $u(a) = 0$.

(2) Jestliže integrál $y(x)$ rovnice (I) má v bodě a kořen, pak jej můžeme psát ve tvaru $y(x) = u(x)\, y_{n-1}(x)$, kde $u(x)$ je řešení rovnice (II), při čemž $u(a) = 0$ a $y_{n-1}(x)$ je vhodný integrál iterované rovnice n — 1-ho řádu $I_{n-1}(y, A_2) = 0$, $n \geqq 3$.

(3) Integrál $y(x)$ rovnice (I) může mít nejvýše $n - 1$ nekonjugovaných kořenů. Má-li právě $k \leqq n - 1$ nekonjugovaných kořenů $x_1, x_2, \ldots, x_k$, pak jej můžeme psát ve tvaru

$$y(x) = u_1(x)\, u_2(x) \ldots u_k(x)\, y_{n-k}(x) \,,$$

kde $y_{n-k}(x)$ je řešení iterované rovnice řádu $n - k$, $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$ jsou řešení rovnice (II), při čemž $y_1(x) \equiv 1$, $u_i(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

(4) Iterovaná rovnice (I) sudého řádu je oscilatorická, když a jen když rovnice (II) je oscilatorická.

(5) Integrál $y(x)$ iterované rovnice (I) lichého řádu osciluje, když a jen když má aspoň jeden kořen a rovnice (II) je oscilatorická. Iterovaná rovnice lichého řádu má vždy neoscilující integrál.

(6) Nechť rovnice (II) je oscilatorická a $\omega_n(x) \geqq 0$. Potom platí tato tvrzení:

a) Je-li n sudé, pak rovnice

$$I_n(y, A) + \omega_n y = 0 \tag{3}$$

je oscilatorická.

b) Je-li n liché, pak každý integrál rovnice (3), který má aspoň jeden kořen, osciluje.

(7) a) Nechť jsou splněny tyto předpoklady:

1. n je sudé číslo, 2. $A \leqq 0$, $\omega_n - n\omega_{n-1}' \leqq 0$, $\omega_{n-1} \leqq 0$ $[\geqq 0]$. Pak každý integrál $y(x)$ rovnice

$$I_n(y, A) + n\omega_{n-1} y' + \omega_n y = 0 \,, \tag{4}$$

který splňuje počáteční podmínky

$$y^{(i)}(a) = 0\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n - 3\,; \quad y^{(n-2)}(a)\,.\,y^{(n-1)}(a) \geqq 0 \quad [\leqq 0]\,, \tag{5}$$

nemá napravo [nalevo] od bodu a žádný nulový bod.

b) Nechť jsou splněny tyto předpoklady:

3. n je liché číslo, 4. $A \leqq 0$, $\omega_n - n\omega'_{n-1} \leqq 0$ $[\geqq 0]$, $\omega_{n-1} \leqq 0$.

Pak každý integrál $y(x)$ rovnice (4), který splňuje počáteční podmínky (5), nemá napravo [nalevo] od bodu a žádný nulový bod.

(8) Buď n sudé [liché] číslo a nechť platí jeden z předpokladů 2 [4] věty (7). Potom každý integrál rovnice (4) splňuje nejvýše v jednom bodě a jednu z počátečních podmínek

$$y^{(i)}(a) = 0\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n - 2 \tag{6_1}$$

nebo

$$y^{(i)}(a) = 0\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n - 3, n - 1\,. \tag{6_2}$$

(9) Buď n sudé [liché] číslo a nechť v rovnici (4) jsou splněny tyto předpoklady: $A \leqq 0$, $\omega_{n-1} = 0$, $\omega_n \leqq 0$ $[A \leqq 0$, $\omega_n - n\omega'_{n-1} = 0$, $\omega_{n-1} \leqq 0]$. Potom každý integrál rovnice (4), který v bodě a splňuje jednu z počátečních podmínek (6), nemá mimo bod a žádný jiný kořen.

(10) Nechť jsou splněny předpoklady věty (9). Potom každý integrál rovnice (4) má nejvýše dva $n - 2$-násobné kořeny. Jestliže $a < b$ jsou dva $n - 2$-násobné kořeny integrálu $y(x)$ rovnice (4), pak $y^{(n-2)}(a)\,.\,y^{(n-1)}(a) < 0$, $y^{(n-2)}(b)\,.\,y^{(n-1)}(b) > 0$. Řešení $y(x)$ nemá nalevo [napravo] od bodu a [b] žádný kořen.

Zdeněk Hustý, Brno

VYBRANÉ KAPITOLY Z KINEMATIKY

(Referát o přednášce dr. RUDOLFA BEREISE, profesora Vysoké školy technické v Drážďanech, konané dne 3. června 1958 na fakultě stroj. inž. ČVUT v Praze)

Prof. dr. Bereis ve své přednášce uvedl především nástin početního a diferenciálně-geometrického aparátu, potřebného pro kinematická vyšetřování. V rovinné kinematické geometrii používá místo vektorů komplexních čísel. Tato metoda má několik výhod, např. se zde lépe vyjadřuje rotace, vedle vnitřního a vnějšího součinu vektorů je zde k disposici ještě obyčejný součin komplexních čísel atd. Ukázal, jak velmi rychle zjišťuje póly pohybu až do libovolného řádu v pohybu přímém i vratném a jak odvozuje všechny známé už klasické výsledky z kinematiky (kružnici vratu a obratu, konstrukci oskulační paraboly, nalezení Ballova bodu atd.).

Jako příslušník vídeňské školy zajímá se především o konstruktivně-geometrickou stránku věci. Předvedl zde původní konstrukci středu křivosti dráhy bodu, zná-li prvé dva póly daného pohybu (střed křivosti leží v průsečíku normály trajektorie a poláry druhého pólu pohybu vzhledem ke kružnici, která má střed ve vyšetřovaném bodě a prochází prvým pólem).

Dále si důkladně všímal tzv. „Scheitelkurve", tj. křivky tvořené body, které jsou v daném okamžiku ve vrcholu své trajektorie, a ukázal velmi jednoduché odvození jejich známých vlastností (3. stupeň, cirkularitu, dvojný bod v prvém pólu atd.). Podrobně vyšetřoval možnosti rozpadu této kubiky a ukázal pěknou aplikaci na kloubový čtyřúhelník.

Vladimír Mahel, Praha