Časopis pro pěstování matematiky

Karel Čulík

Poznámky k teorii operací

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 4, 473--474

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108631`

Nechť $F(\varrho)$ je **αRS**-graf a nechť $k > 0$, $m > 1$ jsou celá čísla. Pak posloupnost $\{u_i\}_{i=0}^{k}$, $u_i \in F$ se nazývá m-vázaná v $F(\varrho)$, jestliže platí:

$$u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{i+m-1} \textit{ jsou navzájem různé uzly úplného subgrafu grafu } F(\varrho) \textit{ pro každé } i = 0, 1, \ldots, k - m + 1 . \tag{3}$$

Lemma 3. *Nechť $\{u_i\}_{i=0}^{k}$ je m-vázaná posloupnost v **αRS**-grafu $F(\varrho)$, který má konečné chromatické číslo, a nechť $1 < \chi[F(\varrho)] = m$, $k > 0$. Je-li nyní $k \equiv 0$ (mod m) příp. $k \not\equiv 0$ (mod m), pak dvojice u_0, u_k je souhlasná příp. nesouhlasná v $F(\varrho)$.*

Nechť $C_n^m(\gamma)$ značí konečný **αRS**-graf definovaný takto: $m, n \geqq 2$ jsou celá čísla, $C = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i$, kard $B_i = m$, $C_i = B_i \cup \cup \{a_i, a_{i+1}\}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k - 1$ a $\gamma = [\bigcup_{i=1}^{n-1} C_i \times C_i - \bigcup_{i=1}^{n-1} \{(a_i, a_{i+1}), (a_{i+1}, a_i)\} - \underset{(\mu, \mu)}{E} \{u \in C\}] \cup \{(a_1, a_n), (a_n, a_1)\}$. Byly vyšetřovány podmínky kladené na typ nedisjunktnosti množin B_i, kdy graf $C_n^m(\gamma)$ je kritickým $(m + 1)$-chromatickým grafem. Mezi těmito grafy je většina těch, které nebyly popsány v citované práci G. A. Diraca.

Karel Čulík, Brno

POZNÁMKY K TEORII OPERACÍ

(Vlastní referát K. ČULÍKA o přednášce proslovené v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků“ dne 12. 5. 1958 v Brně)

Ternární relací definovanou na množině $F \neq \emptyset$ rozumíme podmnožinu $\Delta \subset F \times F \times F$ a její prvky (uspořádané trojice prvků z F) označujeme $[x, y, z] \in \Delta$. Relace Δ se nazývá *operací* na F, jestliže splňuje podmínky (srv. A. MOSTOWSKI, *Logika matematyczna,* 1948, str. 155—156)

$$[x', y, z], [x'', y, z] \in \Delta \Rightarrow x' = x'' , \tag{J}$$

$$y, z \in F \Rightarrow \textit{existuje takový } x \in F, \textit{ že } [x, y, z] \in \Delta . \tag{P}$$

Splňuje-li relace Δ podmínku (**J**) lze používat obvyklého multiplikativního zápisu

$$x = yz \ v \ \Delta \Leftrightarrow [x, y, z] \in \Delta . \tag{1}$$

Označme $\Delta_{123} = \Delta$ a nechť i, j, k je libovolná permutace čísel 1, 2, 3. Pak ternární relaci Δ_{ijk}, definovanou podmínkou

$$[x_i, x_j, x_k] \in \Delta_{ijk} \Leftrightarrow [x_1, x_2, x_3] \in \Delta_{123} , \tag{2}$$

nazýváme *ijk-permutovanou relací* relace Δ (viz *inversní* relace u A. Mostowského, str. 154). Zejména označujeme a nazýváme relaci $\Delta_{132} = \Delta_k$ *konversní*, $\Delta_{231} = \Delta_p$ *pravou* a $\Delta_{312} = \Delta_l$ *levou relací* relace $\Delta = \Delta_{123}$ (srv. W. SIERPIŃSKI, *Zasady algebry wyzszej,* 2. vyd., 1951, str. 290 a násl.). Označujeme-li $(\Delta_p)_p = \Delta_{p^2}$, $(\Delta_k)_l = \Delta_{kl}$ atd., pak z vlastností symetrické permutační grupy o třech proměnných plyne

Věta 1. 1. $\Delta_{123} = \Delta = \Delta_{pl} = \Delta_{lp} = \Delta_{p^3} = \Delta_{l^3} = \Delta_{k^2}$, $\Delta_{231} = \Delta_p = \Delta_{l^2} = \Delta_{klk}$, $\Delta_{312} = \Delta_l = \Delta_{p^2} = \Delta_{kpk}$, $\Delta_{132} = \Delta_k$, $\Delta_{321} = \Delta_{kp} = \Delta_{lk}$, $\Delta_{213} = \Delta_{kl} = \Delta_{pk}$;

2. $\Delta = \Delta_k \Leftrightarrow \Delta_p = \Delta_{kp} \Leftrightarrow \Delta_l = \Delta_{kl}$;

3. $\Delta = \Delta_p \Leftrightarrow \Delta_p = \Delta_l \Leftrightarrow \Delta_l = \Delta \Leftrightarrow \Delta_k = \Delta_{pk} \Leftrightarrow \Delta_{pk} = \Delta_{lk} \Leftrightarrow \Delta_{lk} = \Delta_k$.

Nechť $(\mathbf{X})_{123}$ značí nějakou podmínku kladenou na relaci Δ_{123}. Pak symbolem $(\mathbf{X})_{ijk}$ označujeme podmínku, která vznikne z $(\mathbf{X})_{123}$ tím, že každou trojici $[x_1, x_2, x_3]$, která se vyskytuje ve formulaci podmínky $(\mathbf{X})_{123}$ nahradíme trojicí $[x_i, x_j, x_k]$, ale jinak na podmínce $(\mathbf{X})_{123}$ ničeho nezměníme. Potom zřejmě platí:

$$\Delta_{ijk} \text{ splňuje podmínku } (\mathbf{X})_{ijk} \Leftrightarrow \Delta_{123} \text{ splňuje } (\mathbf{X})_{123}\,. \tag{3}$$

Podmínku $(\mathbf{X})_{ijk}$ nazýváme *ijk-permutovanou podmínkou* podmínky $(\mathbf{X})_{123}$ a analogicky s předešlým zavádíme symboly $(\mathbf{X})_k$, $(\mathbf{X})_p$ a $(\mathbf{X})_l$ atd. Kromě dalších podmínek asociativity $(\mathbf{A})$ a komutativity $(\mathbf{K})$ (viz A. Mostowski, str. 156—157) je důležitá následující podmínka:

$$\textit{Existuje } e \in F, \textit{ tzv. čtverec, pro který platí } [e, a, a] \in \Delta \textit{ pro každý } a \in F\,. \tag{E}$$

Pak podmínky $(\mathbf{E})_p$ příp. $(\mathbf{E})_l$ jsou požadavky existence pravé příp. levé jednotky a podle uvedeného předpisu jsou tvaru:

Existuje $e \in F$, tzv. pravá příp. levá jednotka, pro který platí $[a, a, e] \in \Delta$ příp. $[a, e, a] \in \Delta$ pro každý $a \in F$.

Je-li permutovaná podmínka $(\mathbf{X})_{ijk}$ stejná jako $(\mathbf{X})_{123}$, píšeme $(\mathbf{X})_{ijk} = (\mathbf{X})_{123}$. Pro stejnost permutovaných podmínek platí věta analogická větě 1 a pro speciální podmínky platí např. $(\mathbf{J}) = (\mathbf{J})_k$, $(\mathbf{P}) = (\mathbf{P})_k$, $(\mathbf{A}) = (\mathbf{A})_k$ atd.

Symbolem $F(\Delta)$ se rozumí množina $F \neq \emptyset$ spolu s ternární relací Δ, která je na ní definována. Pak např. $F(\Delta)$ je kvasigrupou příp. grupou, jestliže všechny permutované relace relace Δ jsou operace příp. navíc Δ je asociativní. Tedy $F(\Delta)$ je kvasigrupou právě tehdy, když $F(\Delta_{ijk})$ je kvasigrupou pro každou permutaci *ijk*. Říkáme, že permutováním kvasigrupy vznikne vždy kvasigrupa. Ovšem permutováním grupy v obecném případě nevznikne grupa, ale jen kvasigrupa, která však je s danou grupou těsně svázána podmínkou (2). Tímto způsobem lze studium každé grupy (příp. grupoidu apod.) převést, případně doplnit studiem množin s ternárními relacemi, které vznikly jejím permutováním. Tím se v jistém směru daří najít další souvislosti mezi různými zobecněními pojmu grupy (viz Š. Schwarz, *O zovšeobecneniach pojmu grupy*, Zprávy o společném sjezdu matematiků československých a polských v Praze, Čas. pro pěst. mat. a fys. *74* (1950), 97—113). Např. platí

Věta 2. *$F(\Delta)$ je grupou právě tehdy, když $F(\Delta_p)$ i $F(\Delta_l)$ jsou kvasigrupy a $F(\Delta_p)$ příp. $F(\Delta_l)$ splňuje $(\mathbf{A})_p$ příp. $(\mathbf{A})_l$. Každá kvasigrupa splňující $(\mathbf{A})_p$ nebo $(\mathbf{A})_l$ má čtverec.*

Lemma 1. *Jednotka a čtverec grupy vždy splynou. Jednotka grupy $F(\Delta)$ je čtvercem právě tehdy, když platí $a = a^{-1}$ pro každý $a \in F$, tj. právě tehdy, když každý její prvek různý od jednotky má řád 2.*

Lemma 2. *Grupa se čtvercem je abelovská.*

Lemma 3. *Konečná grupa se čtvercem má řád 2^m, kde $m \geqq 0$ je celé číslo, a je-li $m \geqq 1$, pak je isomorfní: 1. volné grupě o m generátorech x_i s relacemi $(x_i^{\pm 1})^2 = 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, m$; 2. grupě všech podmnožin množiny o m prvcích, jejíž grupovou operací je symetrická diference; 3. přímému součinu m cyklických grup řádu 2.*

Věta 3. *$F(\Delta)$ je grupou právě tehdy, když $F(\Delta_k)$ je grupou. Je-li $F(\Delta)$ grupou, pak $F(\Delta_k)$ je isomorfní s $F(\Delta)$ a obě grupy splynou (tj. $\Delta = \Delta_k$) právě tehdy, když jsou abelovské.*

Věta 4. *Nechť $F(\Delta)$ je konečná grupa. Pak $F(\Delta_p)$ je grupou právě tehdy, když $F(\Delta)$ má čtverec. Má-li $F(\Delta)$ čtverec, pak grupy $F(\Delta)$ a $F(\Delta_p)$ splynou (tj. $\Delta = \Delta_p$).*

Karel Čulík, Brno