Václav Metelka

O jistých algebraických plochách s maximálním počtem přímek a planárními body nejvyššího řádu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 3, 317--339

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108610`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

O JISTÝCH ALGEBRAICKÝCH PLOCHÁCH S MAXIMÁLNÍM POČTEM PŘÍMEK A PLANÁRNÍMI BODY NEJVYŠŠÍHO ŘÁDU

VÁCLAV METELKA, Liberec

(Došlo 5. února 1968)

ÚVOD

V této práci chci ukázat některé zajímavé vztahy mezi planárními body a přímkami algebraických ploch bez singulárních bodů.

Zopakuji nejprve definici planárního bodu řádu h-tého a připojím čtyři věty, z nichž jedna je pomocná, na něž se budu později odvolávat.

Definice. Buď h celé, nezáporné číslo a P^n dvojdimensionální plocha stupně n-tého. Říkáme, že regulární bod A plochy P^n je jejím planárním bodem řádu aspoň (právě) h-tého, jestliže tečná rovina bodu A protne plochu P^n ve varietě, pro níž je bod A aspoň (právě) $h + 2$ násobný.

Z této definice plyne bezprostředně pomocná věta:

Lemma 0.1. *Je-li O_2 bodem plochy P^n s tečnou rovinou $x_0 = 0$, pak můžeme psát*

$$P^n \equiv \sum_{i=1}^{n} (x_0 \,.\, a_{i-1} + b_i \,.\, x_2^{n-i}) = 0\,, \tag{1}$$

kde $a_j \equiv a_j(x_0, x_1, x_3)$; $b_i \equiv b_i(x_1, x_3)$ jsou formy stupně udaného indexem o proměnných vypsaných v závorkách a platí $a_0 \neq 0$, $b_1 = 0$. Bod O_2 je planárním bodem řádu aspoň (právě) h-tého plochy (1) tehdy a jen tehdy, je-li $b_i \equiv 0$ ($b_i \equiv 0$, $b_{h+2} \not\equiv 0$) pro všechna $i = 1, 2, \ldots, h + 1$.

Snadný důkaz této věty nebudu provádět.

Přistoupíme nyní k nejzávažnější větě této úvodní části:

Věta 0.1. *Označme W_i^n poláru i-tého stupně regulárního bodu A vzhledem k ploše P^n. Bod A je planárním bodem plochy P^n řádu aspoň (právě) h-tého tehdy a jen tehdy, jestliže $W_{h+1}^n \supseteq W_1^n$ ($W_{h+2}^n \not\supseteq W_1^n$, $W_{h+1}^n \supseteq W_1^n$).*

K důkazu použijeme pomocné věty 0.1 a rovnici poláry j-tého stupně bodu O_2 vzhledem k ploše (1) zapíšeme ve tvaru rovnice poláry $(n - j)$-tého řádu. Je tedy

$$W_j^n = \frac{\partial^{n-j}}{\partial x_2^{n-j}} P^n ,$$

čili podle (1)

$$W_j^n \equiv x_0 R_j^n + S_j^n ,$$

kde

$$S_j^n \equiv \sum_{i=1}^{j} \frac{(n-i)!}{(j-i)!} b_i x_2^{j-i} ; \quad R_j^n \equiv \sum_{i=1}^{j} \frac{(n-i)!}{(j-i)!} a_{i-1} \, . \, x_2^{j-i} .$$

Protože jest

$$a_0 \neq 0, \; b_1 \equiv 0, \; W_1^n \equiv (n-1)! \, a_0 x_0 ,$$

pak

$$W_{h+1}^n \supseteq W_1^n \Leftrightarrow S_{h+1}^n \equiv 0 \Leftrightarrow b_i \equiv 0$$

pro všechna $i = 1, 2, \ldots, h + 1$. Dále platí relace

$$W_{h+1}^n \supseteq W_1^n , \quad W_{h+2}^n \not\supseteq W_1^n \Leftrightarrow S_{h+1}^n \equiv 0 , \quad S_{h+2}^n \not\equiv 0 \Leftrightarrow b_i \equiv 0$$

pro všechna $i = 1, 2, \ldots, h + 1$, ale $b_{h+2} \not\equiv 0$.

Tím je důkaz proveden.

Pomocí lemmatu 0.1 odvodíme ještě větu:

Věta 0.2. *Leží-li na nerozložitelné ploše P^n planární bod řádu h-tého, pak $h \leqq n - 2$.*

Důkaz sporem okamžitě plyne z toho, že kdyby bod O_2 byl planárním bodem řádu $h > n - 2$ plochy (1), pak by bylo (dle lemmatu 0.1) $b_i \equiv 0$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$ a plocha (1) by byla rozložitelná.

Tuto úvodní část zakončíme větou o planárních bodech řádu právě $(n - 2)$-ho.

Věta 0.3. *Leží-li na ploše P^n planární bod řádu právě $(n - 2)$-ho, pak tímto bodem prochází n přímek plochy P^n a naopak, prochází-li regulárním bodem plochy P^n n přímek, je tento bod planárním bodem řádu právě $(n - 2)$-ho.*

Z pomocné věty 0.1 totiž vidíme, že je-li bod O_2 planárním bodem řádu právě $(n - 2)$-ho, pak $b_n \not\equiv 0$, $b_i \equiv 0$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ a tečná rovina ω_0 protne plochu ve varietě $(x_0 = 0, \; b_n = 0)$, která představuje n přímek plochy P^n. Druhou část věty dokážeme obráceným postupem.

Buď V plocha stupně $n > 3$ bez singulárních bodů, na níž leží aspoň jeden planární bod řádu $(n - 2)$-ho. Hledejme plochu V s maximálním počtem přímek.

V dalším uvidíme, že zvláště zajímavé vlastnosti mají plochy stupně čtvrtého, kterým také věnujeme následující dvě kapitoly. V této kapitole však provedeme obecné úvahy pro plochy stupně $n > 3$.

Volme především planární bod řádu $(n - 2)$-ho a jeho tečnou rovinu. Nechť je to bod O_2 s rovinou ω_0. Dle lemmatu 0.1 lze tedy rovnici plochy V psát ve tvaru:

$$V \equiv x_0 \,.\, M(x_0, x_1, x_2, x_3) + N(x_1, x_3) = 0\,. \tag{1}$$

Uvedu nejprve několik pomocných vět, kterých později s výhodou použiji. Dokážeme především, že platí:

Lemma 1.1. *Rovina ω_0 protne plochu (1) v n navzájem různých přímkách, procházejících bodem O_2.*

Důkaz. Rovina ω_0 protne plochu (1) ve varietě: $(x_0 = 0,\ N(x_1, x_3) = 0)$, která skutečně představuje n přímek bodem O_2. Zbývá ještě dokázat, že tyto přímky jsou navzájem různé. Tuto část důkazu provedu sporem:

Předpokládejme, že aspoň dvě z přímek splynou a volme je za osu o_{12}. Z rovnice (1) vidíme, že v tomto případě je $N(x_1, x_3) \equiv x_3^2 \,.\, R(x_1, x_3)$, kde $R(x_1, x_3)$ je forma stupně $(n - 2)$-ho, tedy nejméně druhého. Rovnici plochy V pak můžeme zapsat ve tvaru

$$V \equiv x_0 \,.\, M(x_0, x_1, x_2, x_3) + x_3^2 \,.\, R(x_1, x_3) = 0 \tag{2}$$

a její parciální derivace podle jednotlivých proměnných jsou

$$V_0 = x_0 \,.\, M_0 + M\,, \quad V_1 = x_0 \,.\, M_1 + x_3^2 \,.\, R_1\,,$$
$$V_2 = x_0 \,.\, M_2\,, \quad V_3 = x_0 \,.\, M_3 + x_3^2 \,.\, R_3 + 2 \,.\, x_3 \,.\, R\,.$$

Ukažme, že na ploše (2) leží aspoň jeden singulární bod. Skutečně, označíme-li Z průsečík přímky o_{12} s plochou M, pak pro bod Z platí: $Z \equiv (0, z_1, z_2, 0)$; $M(Z) = 0$, čili také $V_i(Z) = 0$ pro všechna $i = 0, 1, 2, 3$. Je tedy Z singulárním bodem plochy (2), což je ve sporu s předpokladem, že na V neleží žádné singulární body. Tím je také důkaz proveden.

Lemma 1.2. *Buď $T \not\equiv O_2$ bod plochy (1) v rovině ω_0 s tečnou rovinou τ. Pak také $\tau \not\equiv \omega_0$.*

Důkaz. Volme $T \equiv O_1$. Na ploše (1) leží tedy přímka o_{12}, čili rovnici této plochy můžeme zapsat ve tvaru:

$$V \equiv x_0 \,.\, M(x_0, x_1, x_2, x_3) + x_3 \,.\, S(x_1, x_3) = 0\,, \quad \text{kde} \quad S(x_1, x_3) \tag{3}$$

je forma stupně aspoň třetího. Předpokládejme, že tečná rovina bodu O_1 je ω_0 a zjistíme, že dojdeme ke sporu. V takovém případě leží v tečné rovině bod O_3 a jest

$$V_3(O_1) \equiv S(O_1) = 0\,, \quad \text{čili} \quad S(x_1, x_3) \equiv x_3 \,.\, R(x_1, x_3)\,.$$

Rovnici plochy (3) tedy můžeme zapsat ve tvaru(2). To ale znamená, že aspoň dvě přímky roviny ω_0 splynou, což je ve sporu s lemmatem 1.1. Tím je tedy důkaz proveden.

Zkoumejme nyní parabolické body[1]) plochy (1) v rovině ω_0. Jedním z nich je bod O_2, (který je dokonce planárním bodem řádu $(n - 2)$-ho) a pro parabolické body různé od O_2 dokážeme větu:

Lemma 1.3. *Buď $T \neq O_2$ bod plochy (1) v rovině ω_0. Bod T je parabolickým bodem plochy (1) jen tehdy, jestliže $M_2(T) = 0$.*

Důkaz. Označíme-li $(0, t_1, t_2, t_3)$ souřadnice bodu $T \neq O_2$, pak především aspoň jedna ze souřadnic t_1, t_3 musí být různá od nuly, takže přímka $p \subset \omega_0$, na které bod T leží má rovnice $(x_0 = 0,\ x_1 t_3 = x_3 t_1)$ a rovnici plochy (1) můžeme psát ve tvaru

$$V \equiv x_0 M(x_0, x_1, x_2, x_3) + (x_3 t_1 - x_1 t_3) \,.\, W(x_1, x_3) = 0\,, \quad W(T) \neq 0\,. \tag{4}$$

Nerovnost $W(T) \neq 0$ plyne z toho, že v opačném případě by ještě aspoň jedna z přímek rovin ω_0 splynula s přímkou $p \equiv (x_0 = 0,\ x_1 t_3 = x_3 t_1)$.

Má-li být bod $T \equiv (0, t_1, t_2, t_3)$ parabolickým bodem plochy (4), k tomu je nutno a stačí, aby $H(T) = 0$, kde H je hessián plochy (4). Snadno se přesvědčíme, že platí

$$\begin{aligned} H(T) &\equiv V_{02}^2(T) \,.\, [V_{13}^2(T) - V_{11}(T) \,.\, V_{33}(T)] \equiv \\ &\equiv M_2^2(T) \,.\, [t_1 W_1(T) + t_3 W_3(T)]^2\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Z Eulerových rovnic plyne: $(n - 1) \,.\, W(T) \equiv t_1 W_1(T) \div t_3 W_3(T)$, čili z (5) máme

$$H(T) \equiv [(n - 1) \,.\, M_2(T) \,.\, W(T)]^2$$

a protože (dle 4) je $W(T) \neq 0$ a dle předpokladu také $n > 3$, pak $H(T) = 0$ jen tehdy, je-li $M_2(T) = 0$, což jsme měli dokázat.

Při zkoumání počtu přímek na ploše (1) budeme postupovat tak, že zjistíme, kolik přímek neležících v rovině ω_0 protne každou z přímek této roviny.

Z n navzájem různých přímek roviny ω_0 volme jednu a označme ji p. Buď dále q jedna z přímek neležících v rovině ω_0, která přímku p protíná. Průsečík T přímek p, q tedy není bod O_2, neboť bodem O_2 procházejí jen přímky roviny ω_0. Jestliže $p \neq o_{23}$,

[1]) V parabolickém bodu plochy je hessián plochy roven nule. Obráceně je regulární bod, v němž je hessián plochy roven nule, parabolický.

(což můžeme předpokládat), pak přímka q protne souřadnicovou rovinu ω_1 v bodě $Y \equiv (u, 0, y, z)$, kde $u \neq 0$. Je tedy

$$p \equiv (x_0 = 0, x_3 = a \,.\, x_1) \tag{6}$$

a bod $T \not\equiv O_2$ této přímky má souřadnice

$$T \equiv (0, t, x, at)\,, \quad \text{kde} \quad t \neq 0\,. \tag{7}$$

Přímka q pak prochází body T, Y, kde

$$Y \equiv (u, 0, y, z)\,, \quad u \neq 0\,, \tag{8}$$

čímž je zajištěno, že přímka q neleží v rovině ω_0. Rovnici plochy (1) tak můžeme psát ve tvaru

$$V \equiv x_0 \,.\, M(x_0, x_1, x_2, x_3) + (x_3 - ax_1) \,.\, A(x_1, x_3) = 0\,; \quad A(T) \neq 0\,. \tag{9}$$

Nerovnost $A(T) \neq 0$ plyne opět z toho, že varieta $[x_0 = 0,\ A(x_1, x_3) = 0]$ se skládá z přímek, které mají s přímkou (6) společný jen bod O_2, různý od T.

Je známo, že nutnou a postačující podmínkou, aby přímka $q \equiv TY$ ležela na ploše V je současné splnění rovnic: $P_i(T) = 0$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, n$, kde

$$P_i \equiv [u \,.\, V_0 + y \,.\, V_2 + z \,.\, V_3]^{(i)}\,.$$

Abychom se zbavili symbolické mocniny, zaveďme operátor

$$g_{ijk} \equiv \binom{i}{j}\binom{j}{k} \cdot \frac{\partial^i}{\partial x_0^k \,.\, \partial x_2^{i-j} \,.\, \partial x_3^{j-k}}\,, \tag{10}$$

pomocí kterého můžeme výrazy P_i upravit na tvar

$$P_i \equiv u^k \,.\, y^{i-j} \,.\, z^{j-k} \,.\, g_{ijk}V\,,$$

kde sumační znaménka vynechávám a sečítám dle všech j, k pro něž $0 \leqq k \leqq j \leqq i$.

Snadno se přesvědčíme, že v bodě T (viz (7)) je pro plochu (9) : $g_{ij0}V(T) \neq 0$ jen když $j = i$. Můžeme tedy výrazy $P_i(T)$ rozepsat takto:

$$P_i(T) \equiv z^i \,.\, g_{ii0}V(T) + u^k \,.\, z^{j-k} \,.\, y^{i-j} \,.\, g_{ijk}V(T)\,, \tag{11}$$

kde ve druhém členu sečítáme dle všech j, k, pro která platí již jen nerovnost $1 \leqq k \leqq j \leqq i$.

Okamžitě se přesvědčíme, že podmínka $P_0(T) = 0$ je již splněna, neboť $P_0(T) \equiv V(T) = 0$ a aby byla splněna podmínka $P_1(T) = 0$, musí platit

$$z \,.\, g_{110}\, V(T) + u \,.\, g_{111}\, V(T) = 0\,,$$

čili dle (10):

$$z \,.\, V_3(T) + u \,.\, V_0(T) = 0\,,$$

což aplikováno na naši plochu (9) dává podmínku

$$(12) \qquad z \,.\, A(T) + u \,.\, M(T) = 0\,.$$

Použitím této rovnice dostaneme z (11) snadno

$$P_i(T) \,.\, A(T) \equiv u \,.\, P_i^*(T)\,,$$

kde

$$(13) \qquad P_i^* \equiv -M \,.\, z^{i-1} \,.\, g_{ii0}V + A \,.\, u^{k-1} \,.\, z^{j-k} \,.\, y^{i-j} \,.\, g_{ijk}V$$

a opět sečítáme podle všech j, k, pro něž platí $1 \leqq k \leqq j \leqq i$.

Protože dle (9) je $A(T) \neq 0$ a podle (8) také $u \neq 0$, plynou z podmínek $P_i(T) = 0$ podmínky $P_i^*(T) = 0$ pro všechna $i = 2, 3, \ldots, n$ a naopak.

Vypočítejme ještě podmínku $P_2^*(T) = 0$. Zřejmě jest

$$P_2^* \equiv -M \,.\, z \,.\, g_{220}V + A \,.\, y \,.\, g_{211}V + A \,.\, z \,.\, g_{221}V + A \,.\, u \,.\, g_{222}V \equiv$$
$$\equiv -M \,.\, z \,.\, V_{33} + 2 \,.\, A \,.\, y \,.\, V_{02} + 2 \,.\, A \,.\, z \,.\, V_{03} + A \,.\, u \,.\, V_{00}\,,$$

což aplikováno na plochu (9) dává podmínku

$$(14) \qquad z \,.\, [A(T) \,.\, M_3(T) - M(T) \,.\, A_3(T)] + u \,.\, A(T) \,.\, M_0(T) +$$
$$+ y \,.\, A(T) \,.\, M_2(T) = 0\,.$$

Můžeme tedy (s jistou opatrností, níže popsanou) vypočítat z rovnic (12) a (14) homogenní souřadnice u, y, z bodu Y (viz 8) jako funkce bodu T. Snadno totiž zjistíme, že je

$$u \equiv -A^2 \,.\, M_2\,; \quad y \equiv A^2 \,.\, M_0 - A \,.\, M \,.\, M_3 + M^2 \,.\, A_3\,; \quad z \equiv A \,.\, M \,.\, M_2\,,$$

při čemž společný nenulový koeficient na pravých stranách těchto identit vynechávám.

Víme však z (8), že musí být $u(T) \neq 0$ a to nastane jen tehdy, bude-li $M_2(T) \neq 0$, (neboť dle (9) je již $A(T) \neq 0$), čili jen v tom případě, kdy bod T je neparabolickým bodem (viz lemma 1.3).

Dosadíme-li právě vypočítané souřadnice u, y, z do výrazů (13), dostaneme ihned

$$P_i^* = -A \,.\, Q_i\,,$$

kde

$$(15) \qquad Q_i \equiv M^i \,.\, A^{i-2} \,.\, M_2^{i-1} \,.\, g_{ii0}V + (-1)^k \,.\, y^{i-j} \,.\, M_2^{j-1} \,.\, M^{j-k} \,.\, A^{j+k-2} \,.\, g_{ijk}V\,,$$

$y \equiv A^2 \,.\, M_0 - A \,.\, M \,.\, M_3 + M^2 \,.\, A_3$ a ve druhém členu výrazu Q_i sečítáme podle všech j, k pro něž platí $1 \leqq k \leqq j \leqq i$.

Protože z $P_i^*(T) = 0$ plyne $Q_i(T) = 0$ a naopak, můžeme vyslovit větu:

Lemma 1.4. *Neparabolickým bodem T (viz (7)) prochází přímka $q \not\subset \omega_0$ plochy (9) tehdy a jen tehdy, jestliže $Q_i(T) = 0$ pro všechna $i = 3, 4, \ldots, n$.*

Tento výsledek doplníme ještě větou, platnou i pro body parabolické:

Lemma 1.5. *Buď $X \equiv (0, t, x, at)$ obecný bod přímky $p \equiv (x_0 = 0,\ x_3 = a \,.\, x_1)$ na ploše (9). Prochází-li bodem B přímky p právě h přímek neležících v rovině ω_0, pak bod B je nejméně h-násobným bodem každé z forem $Q_i(X)$, kde $i = 3, 4, \ldots, n$.*

Důkaz. Volme $p \equiv o_{12}$ a bod B, kterým prochází právě h přímek $q \not\subset \omega_0$, volme za bod O_1 s tečnou rovinou ω_3. Uvažme nejprve, že je to přípustné, neboť bod B musí být různý od O_2 a jeho tečná rovina nesmí být ω_0, jak je patrno z lemmatu 1.2.

V rovnici (9) plochy V tedy můžeme psát $a = 0$,

$$M(x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv x_3 C(x_0, x_1, x_2, x_3) + D(x_0, x_2) \,.\, E(x_0, x_1, x_2)\,, \tag{16}$$

kde $D(x_0, x_2)$ je forma stupně právě h-tého a $D(O_2) \neq 0$.

Má-li být bod O_1 aspoň h-násobným bodem formy $Q_i(X)$, kde – v našem případě – je $X \equiv (0, t, x, 0)$, musí se dát x vytknout z $Q_i(X)$ aspoň v h-té mocnině, čili stručně psáno: $Q_i(X) \equiv x^h \,.\, Q_i^*(X)$. To máme dokázat.

Důkaz rozvrhneme do dvou částí:

Předpokládejme nejprve, že je $h > 1$. Ze zápisu (16) okamžitě plyne

$$M(X) \equiv x^h \,.\, M^*(X)\,; \quad M_2(X) \equiv x^{h-1} \,.\, M_2^*(X)\,; \quad M_0(X) \equiv x^{h-1} \,.\, M_0^*(X)\,,$$

takže z (15) je především $y(X) \equiv x^{h-1} \,.\, y^*(X)$ a dále

$$Q_i(X) \equiv x^{(h-1).(i-1)} \,.\, Q_i^{**}(X)\,.$$

V případě, že $h \geqq 2$, $i \geqq 3$ je tedy také

$$(h-1)\,.\,(i-1) = (i-3)\,.\,(h-1) + (h-2) + h \geqq h\,,$$

takže skutečně pro $h > 1$ a pro všechna $i = 3, 4, \ldots, n$ je $Q_i(X) \equiv x^h \,.\, Q_i^*(X)$.

Zbývá tedy dokázat, že v případě, kdy bodem $B \equiv O_1$ prochází právě jedna z přímek q, je také $Q_i(X) = x \,.\, Q_i^*(X)$.

Volme $q \equiv o_{01}$, takže v (16) je $D(x_0, x_2) \equiv x_2$ a pro obecný bod $X \equiv (0, t, x, 0)$ přímky o_{12} máme

$$M(X) \equiv x \,.\, M^*(X)\,, \quad M_0(X) \equiv x \,.\, M_0^*(X)\,,$$

čili z (15) je také

$$y(X) \equiv x \,.\, y^*(X)\,.$$

Kromě toho se snadno přesvědčíme, že

$$g_{iii}\, V(X) \equiv x \,.\, G(X)\,.$$

Je tudíž $Q_i(X) \equiv x \,.\, Q_i^*(X)$, což jsme měli dokázat.

Následující pomocná věta nám umožní odhadnout maximální počet přímek $q \not\subset \omega_0$, protínajících přímku $p \subset \omega_0$.

Lemma 1.6. *Buď* $X \equiv (0, t, x, at)$ *obecný bod přímky* $p \equiv O_2Z$ *na ploše* (9), *kde* $Z \equiv (0, 1, 0, a)$. *Nechť pro některý index* r (kde $3 \leqq r \leqq n$) *je* $Q_r(X) \equiv t^m \cdot \bar{Q}_r(X) \not\equiv \not\equiv 0$. *Pak:* 1) *přímku* p *může protnout nejvýše* s *přímek* $q \not\subset \omega_0$, *kde* s *je stupeň formy* $\bar{Q}_r(X)$, *čili* $s = 3nr - 2n - 5r - m + 4$;

2) *platí nerovnost* $m \geqq (n-2) \cdot (r-1)$, *při čemž rovnost nastane jen když* $R_r(Z) \neq 0$, *kde* $R_r \equiv (n-r)!\,(n-1)^{r-2} \cdot A^{r-2} \cdot g_{rr0}V - r \cdot (n-2)!\, A_3^{r-1}$.

Důkaz. Za předpokladu $\bar{Q}_r(X) \not\equiv 0$ může skutečně na přímce p existovat maximálně s bodů, (kde s je stupeň formy $\bar{Q}_r(X)$), kterými procházejí přímky q, čili vzhledem k lemmatu 1.5 maximálně s přímek q může protnout přímku p. Pro výpočet čísla s stačí uvážit, že forma $Q_r(X)$ musí být stupně $s + m = 3nr - 2n - 5r + 4$, o čemž se již snadno přesvědčíme.

Tím je první část věty dokázána a můžeme přistoupit k důkazu části druhé.

Uvažme především, že z (9) a (10) plyne

$$g_{rr0}\, V(X) \equiv t^{n-r} \cdot g_{rr0}\, V(Z)\,, \quad A(X) \equiv t^{n-1} \cdot A(Z)$$

a konečně

$$A_3(X) \equiv t^{n-2} \cdot A_3(Z)\,,$$

takže v (15) máme především

$$y(X) \equiv t^{n-2} \cdot \bar{y}(X)\,,$$

kde

$$\bar{y} \equiv t^n \cdot M_0 A^2(Z) - t \cdot M \cdot M_3 A(Z) + M^2 \cdot A_3(Z)\,.$$

Je tedy

$$Q_r(X) \equiv t^{(n-2)\cdot(r-1)} \cdot \bar{Q}_r(X)\,,$$

kde

$$\bar{Q}_r \equiv M^r \cdot M_2^{r-1} \cdot A^{r-2}(Z) \cdot g_{rr0}\, V(Z) +$$
$$+ (-1)^k \cdot \bar{y}^{r-j} \cdot M_2^{j-1} \cdot M^{j-k} \cdot A^{j+k-2}(Z) \cdot t^{n\cdot(k-1)+j-k} \cdot g_{rjk} V\,.$$

Tím je ověřeno, že z $Q_r(X)$ lze skutečně vytknout t nejméně v mocnině $(n-2)\,. \,.\,(r-1)$, čili v lemmatu 1.6 platí pro m nerovnost $m \geqq (n-2) \cdot (r-1)$.

V poslední části důkazu zkoumejme, za jakých podmínek bude platit ostrá nerovnost $m > (n-2) \cdot (r-1)$. To nastane zřejmě jen tehdy, jestliže z $\bar{Q}_r(X)$ lze vytknout ještě t, čili (vzhledem k souřadnicím bodu X), když bude $\bar{Q}_r(O_2) = 0$.

Snadno zjistíme, že je

$$\bar{Q}_r(O_2) \equiv M^r(O_2) \cdot M_2^{r-1}(O_2) \cdot A^{r-2}(Z) \cdot g_{rr0}\, V(Z) - \bar{y}^{r-1}(O_2) \cdot g_{r11}\, V(O_2)\,.$$

Z Eulerových rovnic plyne: $M_2(O_2) = (n - 1) . M(O_2)$ a po kratší úpravě zjistíme, že je také

$$(n - r)! . g_{r11} V(O_2) = r . (n - 1)! . M(O_2) \quad \text{a} \quad \bar{y}(O_2) = M^2(O_2) . A_3(Z) .$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do $\bar{Q}_r(O_2)$, dostaneme po snadné úpravě

$$\bar{Q}_r(O_2) \equiv \frac{n - 1}{(n - r)!} . M^{2r-1}(O_2) . R_r(Z) ,$$

kde R_r je výraz z posledního řádku lemmatu 1.6.

Uvažme, že je $M(O_2) \neq 0$, neboť v opačném případě by byl bod O_2 singulárním bodem plochy (9). Kromě toho je $(n - 1) : (n - r)! \neq 0$, neboť platí nerovnosti $n > 3$, $3 \leqq r \leqq n$.

Je tudíž $\bar{Q}_r(O_2) = 0$ jen v tom případě, jestliže $R_r(Z) = 0$, čili jen když nastane ostrá nerovnost $m > (n - 2) . (r - 1)$, čímž je důkaz věty proveden.

Poznámka. Z právě provedeného důkazu je rovněž okamžitě patrná platnost tohoto tvrzení: Jestliže pro některý index i je $Q_i(X) \equiv 0$, pak musí být $R_i(Z) = 0$. Na tuto poznámku, kterou zřejmě není třeba podrobně dokazovat se za chvíli odvolám.

Porovnáme-li obě části lemmatu 1.6 vidíme, že pro maximální počet s přímek q platí $s \leqq r . (2n - 3) + 2 - n$ a optimální případ by nastal, kdyby bylo $r = n$, čili $Q_i(X) \equiv 0$ pro všechna $i = 3, 4, \ldots, n - 1$, ale $Q_n(X) \not\equiv 0$. V tom případě by bylo $s \leqq 2 . (n - 1)^2$.

Poznámka. Poznamenávám k tomu výslovně, že za předpokladu $n > 4$ by takový případ mohl nastat nejvýše pro obecný bod X jedné z přímek $p \subset \omega_0$, kdežto pro obecný bod X_j libovolné ze zbývajících přímek p_j (v počtu $(n - 1)$) by již bylo $Q_3(X_j) \not\equiv 0$, čili každou z těchto přímek p_j by mohlo protnout maximálně již jen $(5n - 7)$ přímek $q \not\subset \omega_0$.

Důkazem tohoto tvrzení kapitolu zakončím.

Důkaz. Volme osu o_{12} za jednu z přímek roviny ω_0 na ploše (9). Užijeme-li označení lemmatu 1.6, pak pro tuto přímku platí

$$X \equiv (0, t, x, 0) ; \quad Z \equiv O_1$$

a rovnici plochy (9) můžeme psát

$$V \equiv x_0 . M(x_0, x_1 . x_2, x_3) + x_3 . A(x_1, x_3) = 0 , \tag{17}$$

kde vzhledem k $A(O_1) \neq 0$ lze varietu $A(x_1, x_3)$ zapsat ve tvaru

$$A(x_1, x_3) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} a_j . x_3^j . x_1^{n-j-1} ; \quad a_0 = 1 . \tag{18}$$

Lineární polára bodu O_1 vzhledem k $A(x_1, x_3)$ má tedy rovnici

$$(n-1) . x_1 + a_1 . x_3 = 0 .$$

Tato polára neprochází bodem O_1 a můžeme ji zřejmě volit za rovinu ω_1. Je tedy $a_1 = 0$.

Předpokládejme, že pro obecný bod $X \equiv (0, t, x, 0)$ naší přímky $p \equiv o_{12}$ je $Q(X) \equiv 0$ pro všechna $i = 3, 4, \ldots, n-1$.

Pak již ovšem musí být $Q_n(X) \not\equiv 0$, neboť v opačném případě by dle lemmatu 1.4 každým neparabolickým bodem přímky o_{12} procházela přímka $q \not\subset \omega_0$. Je však zřejmé, že naši přímku o_{12} může protnout jen konečný počet přímek.

Předminulá poznámka říká, že z podmínky $Q_i(X) \equiv 0$ plyne (kromě jiného) podmínka $R_i(Z) = 0$. V našem případě, kdy $Z \equiv O_1$, musí tedy platit

$$R_i(O_1) = 0 \quad \text{pro všechna} \quad i = 3, 4, \ldots, n-1 . \tag{19}$$

Ze zápisu (18) již snadno vypočítáme $A(O_1) = a_0 = 1$, $A_3(O_1) = a_1 = 0$ (viz výše), dále $g_{ii0} V(O_1) = i! . a_{i-1}$, čili dle lemmatu 1.6 a (19) dostáváme $a_{i-1} = 0$ pro všechna $i = 3, 4, \ldots, n-1$. Kromě toho je již také $a_1 = 0$, čili v (18) máme

$$A(x_1, x_3) \equiv x_1^{n-1} + a_{n-1} . x_3^{n-1} .$$

Rovnice plochy (17) tedy zní

$$V \equiv x_0 . M(x_0, x_1, x_2, x_3) + x_3 . x_1^{n-1} + a_{n-1} . x_3^n = 0 . \tag{20}$$

Z pochopitelné podmínky $a_{n-1} \neq 0$ plyne také, že je již $R_n(O_1) \neq 0$, čili vzhledem k poznámce již citované a vzhledem k pomocné větě 1.6, může přímku o_{12} protnout maximálně $2 . (n-1)^2$ přímek $q \not\subset \omega_0$.

Dokážeme nyní, že pro libovolnou další přímku $\bar{p} \not\equiv o_{12}$ roviny ω_0 klesne tento maximální možný počet přímek q na číslo $5n - 7$.

Na ose o_{13} jsme již volili bod O_1, kterým procházela přímka o_{12} a bod O_3, incidentní s lineární polárou bodu O_1 vzhledem k $A(x_1, x_3)$. Můžeme tedy ještě na ose o_{13} volit bod jednotkový $\bar{Z} \equiv J_{13}$, kterým bude procházet přímka $\bar{p} \equiv O_2\bar{Z}$. Je tedy v rovnici (20)

$$a_{n-1} = -1$$

a plochu V můžeme upravit na tvar:

$$V \equiv x_0 . M(x_0, x_1, x_2, x_3) + (x_3 - x_1) . \bar{A}(x_1, x_3) = 0 ,$$

kde

$$\bar{A}(x_1, x_3) \equiv \sum_{j=0}^{n-2} x_1^{n-j-2} . x_3^{j+1} .$$

Pro bod $\bar{Z} \equiv J_{13}$ dostaneme (po kratší námaze)

$$\bar{A}(J_{13}) = n - 1 \; ; \quad \bar{A}_3(J_{13}) = \frac{n-1}{2} \, . \, n \, , \quad g_{330} \, V(J_{13}) = 3 \, . \, \bar{A}_{33}(J_{13}) =$$

$$= n \, . \, (n - 1) \, . \, (n - 2) \, ,$$

z čehož v lemmatu 1.6 po snadné úpravě máme

$$R_3(J_{13}) = \tfrac{1}{4} \, . \, n! \, . \, (n - 1) \, . \, (n - 4) \, .$$

Z poznámky za lemmatem 1.6 a z podmínky $Q_3(J_{13}) \equiv 0$ plyne podmínka $R_3(J_{13}) = 0$.

Pro $n > 4$ je tedy $Q_3(J_{13}) \not\equiv 0$, čímž je dokázáno také naše tvrzení z poslední poznámky.

Vidíme tedy, že jedině pro plochy V stupně čtvrtého by mohl nastat ten případ, že pro všechny čtyři průsečíky Z_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ přímek $p_j \subset \omega_0$ s osou o_{13} platí $R_3(Z_j) = 0$, $R_4(Z_j) \neq 0$.

Takovou plochu skutečně nalezneme a uvidíme, že existuje dokonce plocha V stupně čtvrtého té vlastnosti, že pro všechny čtyři obecné body X_j přímek p_j platí:

$$Q_3(X_j) \equiv 0 \quad \text{a z toho} \quad Q_4(X_j) \not\equiv 0 \, .$$

Dokážeme dále, že na této ploše leží maximální počet přímek a zjistíme zajímavé vztahy mezi těmito přímkami a planárními body obou možných řádů.

Těmto úvahám jsou věnovány následující dvě kapitoly.

KAPITOLA 2

V této kapitole se zaměříme na hledání plochy V stupně čtvrtého, bez singulárních bodů a s nejvyšším možným počtem přímek. Existenci aspoň jednoho planárního bodu řádu druhého ovšem stále předpokládáme.

Volme opět bod O_2 za planární bod druhého řádu s tečnou rovinou ω_0. Jednu z přímek této roviny volme za osu o_{12}, takže rovnici plochy V můžeme upravit na tvar

$$\text{(1)} \qquad V \equiv x_0 \, . \, M(x_0, x_1, x_2, x_3) + x_3 \, . \, \bar{A}(x_1, x_3) = 0 \, , \quad \text{kde} \quad \bar{A}(O_1) \neq 0 \, ,$$

neboť v opačném případě by ještě aspoň jedna z přímek roviny ω_0 splynula s přímkou o_{12}, což je ve sporu s pomocnou větou 1.1.

Protože budeme ještě v dalším volbu souřadnicového systému přípustně doplňovat, je třeba mít dobrý přehled o tom, které prvky soustavy jsme již upevnili. Zatím to byl bod O_2 s tečnou rovinou ω_0 a osa o_{12}, což stručně zaznamenáme:

Volba 1. O_2, o_{12}, ω_0.

Vzhledem k $\bar{A}(O_1) \neq 0$ můžeme psát

$$A(x_1, x_3) \equiv x_1^3 + b \,.\, x_1^2 \,.\, x_3 + c \,.\, x_1 \,.\, x_3^2 + d \,.\, x_3^3 \,.$$

Lineární polára bodu O_1 vzhledem k této formě zní $3x_1 + b \,.\, x_3 = 0$ a neprochází tedy bodem O_1. Volme ji tak, aby protínala rovinu ω_0 v ose o_{23}. Pak je především $b = 0$ a formu $\bar{A}(x_1, x_3)$ tím upravíme na tvar

$$\bar{A}(x_1, x_3) \equiv x_1^3 + c \,.\, x_1 \,.\, x_3^2 + d \,.\, x_3^3 \,. \tag{2}$$

Poznamenejme si ještě upevnění osy o_{23}. Sjednocením s volbou 1 vidíme, že jsou již upevněny osy o_{12}, o_{23}, čili

Volba 2. o_{12}, o_{23}.

Předpokládejme dále, že platí:

Předpoklad 1. *Existuje plocha V, na níž leží aspoň* 64 *přímek.*

Protože cílem této kapitoly je vyhledat plochu V s maximálním počtem přímek, umožňuje nám předpoklad 1 vyloučit z našich úvah plochy s menším počtem přímek než 64, (na něž bychom se eventuálně soustředili teprve v případě, kdyby se předpoklad ukázal být nesprávným).

Podle pomocné věty 1.6 lze z $Q_3(X)$ vytknout t nejméně v mocnině čtvrté. Z toho je zřejmé, že kdyby pro obecné body X_j ($j = 1, 2, 3, 4$) všech čtyř přímek p_j roviny ω_0 bylo $Q_3(X) \not\equiv 0$, mohlo by každou z těchto přímek p_j protnout maximálně třináct přímek $q \not\subset \omega_0$. Na ploše V by v tom případě (spolu s přímkami p_j) leželo nejvýše 56 přímek.

V předpokladu 1 předpokládáme existenci plochy V s minimálním počtem 64 přímek. Chceme-li ji dosáhnout, musí tedy být především $Q_3(X_j) \equiv 0$ pro obecný bod X_j nejméně jedné z přímek p_j.

Nechť tento případ nastane právě pro přímku o_{12}. Obecný bod X této přímky má souřadnice $X \equiv (0, t, x, 0)$. Z poznámky za lemmatem 1.6 plyne, že má-li být $Q_3(X) \equiv 0$, musí být (kromě jiného) také $R_3(Z) = 0$, kde v našem případě je $Z \equiv O_1$.

Ze zápisu (2) snadno vypočítáme

$$\bar{A}(O_1) = 1 \,, \quad \bar{A}_3(O_1) = 0 \,,$$

takže v lemmatu 1.6 jest

$$R_3(O_1) \equiv 3 \,.\, g_{330} \, V(O_1) \equiv 18 \,.\, c = 0$$

a forma (2) nabývá tvaru

$$\bar{A}(x_1, x_3) \equiv x_1^3 + d \,.\, x_3^3 \,,$$

kde $d \neq 0$, neboť jinak by tři přímky roviny ω_0 splynuly. Žádná z těchto přímek tedy neprochází bodem O_3 a jednou z nich je o_{12}. Volme další za O_2J_{13}, takže platí $\bar{A}(J_{13}) = 0$, čili $d = -1$ a rovnici plochy (1) tím uvedeme na tvar

$$(3) \qquad V \equiv x_0 \,.\, M(x_0, x_1, x_2, x_3) + x_1^3 \,.\, x_3 - x_1^4 = 0\,.$$

Neopomeňme ještě poznamenat upevnění přímky O_2J_{13}. Sjednocením s volbou 2 tak dostáváme:

Volba 3. $o_{12}, o_{23}, O_2J_{13}$.

Z výsledku (3) je okamžitě patrno, že čtyři navzájem různé přímky roviny ω_0 tvoří ekvianharmonickou čtveřinu. Označíme-li p jednu z těchto přímek s obecným bodem X, pak $X \equiv (0, t, x, at)$, kde a je kořenem rovnice $z^4 - z = 0$ a rovnici plochy (3) můžeme také psát

$$(4) \qquad V \equiv x_0 \,.\, M(x_0, x_1, x_2, x_3) + (x_3 - a \,.\, x_1) \,.\, A(x_1, x_3) = 0\,,$$

kde

$$A(x_1, x_3) \equiv x_1^3 \,.\, (1 - a^3) - a^2 \,.\, x_1^2 \,.\, x_3 - a \,.\, x_1 \,.\, x_3^2 - x_3^3\,.$$

Pro obecný bod $X \equiv (0, t, x, at)$ přímky p tedy platí

$$A(X) = (1 - 4a^3) \,.\, t^3\,, \quad A_3(X) = -6 \,.\, a^2 \,.\, t^2\,, \quad g_{330}\, V(X) = -24 \,.\, a \,.\, t\,,$$

kde – jak známo – a je kořenem rovnice $z^4 - z = 0$, čili ze vzorce (15) minulé kapitoly dostaneme po kratší námaze

$$(5) \qquad Q_3(X) \equiv -\tfrac{1}{48} \,.\, M_{222}^2 \,.\, (4 \,.\, a^2 \,.\, D_{13} + 4 \,.\, a \,.\, D_{33} + D_{11}) \,.\, t^6 \,.\, x^{11} + {} + t^7 \,.\, Q_3^*(X)\,,$$

kde D_{ij} jsou dvouřadové doplňky determinantu

$$(6) \qquad D = \begin{vmatrix} M_{211}, M_{212}, M_{213} \\ M_{212}, M_{222}, M_{223} \\ M_{213}, M_{223}, M_{233} \end{vmatrix}\,.$$

Všimněme si, jaký důsledek to má pro výpočet plochy s maximálním počtem přímek.

Kdyby pro obecný bod X aspoň dvou přímek $p \subset \omega_0$ bylo $Q_3(X) \not\equiv 0$, pak by dle lemmatu 1.6 každou tuto přímku protínalo maximálně 11 přímek $q \not\subset \omega_0$ (neboť v lemmatu 1.6 by bylo $r = 3$, $n = 4$, $m = 6$, z čehož $s = 11$) a každou ze zbývajících dvou přímek roviny ω_0 by mohlo protnout nejvýše 18 přímek q. Pro obecné body obou těchto přímek by totiž v optimálním případě bylo již $Q_3 \equiv 0$, čili $Q_4 \not\equiv 0$ a z relací $r = n = 4$, $m \geqq 6$ by bylo $s \leqq 18$.

Z toho je patrno, že na ploše V by leželo maximálně 48 přímek $q \not\subset \omega_0$ a spolu se čtyřmi přímkami $p \subset \omega_0$ by tato plocha obsahovala maximálně 52 přímek.

Chceme-li dosáhnout plochy V, na níž dle předpokladu 1 leží aspoň 64 přímek, může být (zatím) $Q_3(X) \not\equiv 0$ pro obecný bod X nejvýše jen jedné z přímek $p \subset \omega_0$ čili platí:

Lemma 2.1. *Aby na ploše V leželo aspoň* 64 *přímek, musí být* $Q_3(X) \equiv 0$ *pro obecné body X nejméně tří přímek* $p \subset \omega_0$.

Je zřejmě lhostejno, které ze tří přímek $p \subset \omega_0$ volíme. Nechť tedy žádná z těchto přímek není o_{12}, čili za obecné body X_i (kde $i = 1, 2, 3$), pro něž platí $Q_3(X_i) \equiv 0$ volme

(7) $$X_i \equiv (0, t, x, a_i . t)\,, \quad \text{kde } a_i \text{ jsou kořeny rovnice} \quad y^3 = 1\,.$$

Vraťme se ještě k výsledku (5).

Má-li být $Q_3(X_i) \equiv 0$ pro všechny tři citované body X_i, musí především platit:

$$4 . a_i^2 . D_{13} + 4 . a_i . D_{33} + D_{11} = 0\,, \quad \text{neboť je zřejmě} \quad M_{222} \neq 0\,,$$

aby bod O_2 nebyl singulární. Z těchto tří rovnic okamžitě plyne $D_{11} = D_{13} = D_{33} = 0$ a snadno se přesvědčíme, že v takovém případě jsou rovny nule všechny dvouřadové doplňky D_{ij} determinantu D ze zápisu (6). Vzhledem k $M_{222} \neq 0$ má tedy determinant D hodnost právě jedna.

Sledujme geometrický význam tohoto výsledku: Z pomocné věty 1.3 je patrno, že parabolické body, různé od O_2, plochy V v rovině ω_0 jsou průsečíky přímek této roviny s kuželosečkou

$$K \equiv [x_0 = 0, M_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0]\,.$$

Diskriminant této kuželosečky je právě determinant D, o němž jsme dokázali, že má hodnost jedna. Skládá se kuželosečka K tedy z dvojnásob počítané přímky, neprocházející bodem O_2 (neboť $M_{222} \neq 0$) a můžeme ji zřejmě volit za osu o_{13}. V tomto případě lze formu $M(x_0, x_1, x_2, x_3)$ ze zápisu (3) upravit na tvar

(8) $$M(x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv x_0 . P(x_0, x_1, x_2, x_3) + x_2^3 . f + S(x_1, x_3)\,; \quad f \neq 0\,.$$

Poznamenejme ještě upevní osy o_{13}. Sjednocením s volbou 3 dostáváme:

Volba 4. O_1, O_2, O_3, J_{13}.

Hledejme dále koeficient při $x^{10} . t^7$ v rozvoji $Q_3 . (X_i)$ pro obecné body X_i ze zápisu (7). Podle (4) vidíme, že pro tyto body platí

(9) $$A(X_i) = -3t^3\,, \quad A_3(X_i) = -6 . a_i^2 . t^2\,, \quad g_{330}\, V(X_i) = -24 . a_i . t$$

a využijeme-li výsledku (8), je také $M_2(X_i) = 3 . f . x^2$. Snadno již dostaneme

$$Q_3(X_i) \equiv 27 . f^4 . x^{10} . t^7 . [3 . S_{133} - a_i(4 . S_{111} + S_{333})] + t^8 . \bar{Q}_3(X_i)\,.$$

Má-li tedy být $Q_3(X_i) \equiv 0$ pro všechny tři obecné body X_i ze zápisu (7), musí zřejmě platit

$$S_{133} = 4 \,.\, S_{111} + S_{333} = 0\,,$$

čili formu (8) můžeme upravit

$$M(x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv x_0 \,.\, P(x_0, x_1, x_2, x_3) + fx_2^3 + s_1x_1^3 + 3s_2x_1^2x_3 - 4s_1x_3^3 \,. \tag{10}$$

Sledujme opět geometrický význam tohoto výsledku:

Víme již, že osa o_{13} protne plochu (3) ve čtyřech parabolických bodech. Označíme-li je Z_j $(j = 1, 2, 3, 4)$, pak $Z_j \equiv (0, 1, 0, a_j)$, kde a_j jsou kořeny rovnice $z^4 - z = 0$. Tečné roviny τ_j bodů Z_j vzhledem k ploše (3) mají rovnice

$$\tau_j \equiv x_0 \,.\, M(Z_j) + 3 \,.\, a_j \,.\, x_1 + (1 - 4a_j^3) \,.\, x_3 = 0\,,$$

čili dle zápisu (10) lze tyto rovnice upravit na tvar

$$\tau_j \equiv (s_1 - a_j \,.\, s_2) \,.\, x_0 - a_j \,.\, x_1 + x_3 = 0\,.$$

Z toho okamžitě vidíme, že čtyřřadová matice

$$\| s_1 - a_j \,.\, s_2, -a_j, 1 \|$$

má hodnost právě dvě, takže všechny čtyři tečné roviny τ_j se protínají v jedné přímce, která prochází bodem O_2, ale neleží v rovině ω_0. Volme ji za osu o_{02}.

Z podmínek $\tau_j(O_0) = 0$ plyne $s_1 = s_2 = 0$ a ze zápisu (10) vidíme, že je tedy

$$M(x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv x_0 \,.\, P(x_0, x_1, x_2, x_3) + f \,.\, x_2^3\,.$$

Dříve než si poznamenáme upevnění osy o_{02} uvažme ještě, že tečná rovina bodu $(0, t, x, 0)$ přímky o_{12} vzhledem k ploše (3) má rovnici $x_0 \,.\, f \,.\, x^3 + x_3 \,.\, t^3 = 0$. Existuje tedy na přímce o_{12} bod $B(O_1 \not\equiv B \not\equiv O_2)$ takový, že jeho tečná rovina vzhledem k ploše (3) je $x_0 - x_3 = 0$. Položme $B \equiv J_{12}$, pak $f = -1$ a formu $M(x_0, x_1, x_2, x_3)$ můžeme psát

$$M(x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv x_0 \,.\, P(x_0, x_1, x_2, x_3) - x_2^3\,.$$

Lineární polára bodu O_2 vzhledem k $M(x_0, x_1, x_2, x_3)$ má tedy rovnici $x_0 \,.\, P(O_2) - 3 \,.\, x_2 = 0$ a můžeme ji zřejmě volit za rovinu ω_2. Pak $P(O_2) = 0$, čili

$$\begin{aligned} M(x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv{}& x_0^3 \,.\, p - x_2^3 + x_0^2 \,.\, E(x_1, x_2, x_3) + \\ &+ x_0 \,.\, x_2 \,.\, F(x_1, x_3) + x_0 \,.\, G(x_1, x_3)\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Poznamenejme ještě upevnění osy o_{02}, bodu J_{12} a roviny ω_2. Sjednocením s volbou 4 snadno dostaneme:

Volba 5. $O_0, O_1, O_2, O_3, J_{13}, J_{12}$.

Vzhledem k výsledkům (9) a (11) platí tedy pro tři body X_i ze zápisu (7)

$$Q_3(X_i) \equiv 2 \cdot 3^5 \cdot x \cdot t^9 \cdot [x^6 \cdot q_1(X_i) + 3 \cdot t^3 \cdot q_2(X_i)],$$

kde

$$q_1 \equiv G_3 - 2 \cdot a_i^2 \cdot G_1 + x \cdot F_3 - 2 \cdot a_i^2 \cdot x \cdot F_1,$$

$$q_2 \equiv x \cdot F \cdot G + G^2 - 3 \cdot E \cdot x^3 .$$

Z podmínky $Q_3(X_i) \equiv 0$ pro všechny tři body X_i plyne okamžitě $q_1(X_i) \equiv 0$, $q_2(X_i) \equiv 0$.

Zkoumejme nejprve podmínku $q_1(X_i) \equiv 0$. Z té dostáváme $F_1 = F_3 = G_{11} = G_{13} = G_{33} = 0$, takže v zápise (11) je $F(x_1, x_3) \equiv 0$, $G(x_1, x_3) \equiv 0$. Z tohoto výsledku pak druhá podmínka $q_2(X_i) \equiv 0$ dává $E(x_1, x_2, x_3) \equiv 0$.

Vzhledem k zápisu (11) můžeme tedy rovnici plochy (3) psát ve tvaru: $V \equiv x_0^4 \cdot p - x_0x_2^3 + x_1^3x_3 - x_3^4 = 0$, kde $p \neq 0$, aby bod O_0 nebyl singulární. Z toho je patrno, že osa o_{02} protne tuto plochu ve čtyřech navzájem různých bodech, z nichž jeden je O_2. Volme další ze zbývajících bodů za J_{02}. Pak je $p = 1$ a plocha V nebývá konečného tvaru

$$V \equiv x_0^4 - x_0x_2^3 + x_1^3x_3 - x_3^4 = 0 . \tag{12}$$

Uvažme ještě také, že touto poslední volbou bodu J_{02} jsou (vzhledem k větě 5) všechny elementy souřadnicového systému upevněny.

Téměř na první pohled je patrno, že všechny čtyři parabolické body, v nichž plochu (12) protne přímka o_{13} jsou planární a to řádu druhého. Kromě toho přímky plochy jimi procházející tvoří vždy ekvianharmonickou čtveřinu.

Tím se však budeme ještě podrobněji zabývat v kapitole následující. Zatím ukažme, že plocha (12) vyhovuje základnímu předpokladu a že na ní skutečně neleží žádný singulární bod.

Snadno se totiž přesvědčíme, že jest

$$V_0 \equiv 4x_0^3 - x_2^3, \quad V_1 \equiv 3 \cdot x_1^2x_3, \quad V_2 \equiv -3 \cdot x_0x_2^2, \quad V_3 \equiv x_1^3 - 4 \cdot x_3^3,$$

Z podmínek $V_i = 0$ (pro všechna $i = 0, 1, 2, 3$) okamžitě plyne $x_i = 0$ (pro všechna $i = 0, 1, 2, 3$), což je ovšem nepřípustné.

Na ploše tedy skutečně singulární body nejsou.

Zbývá ovšem ještě dokázat, že na ploše (12) leží nejméně 64 přímek. Důkaz toho provedu v následující kapitole. Potom bude oprávněn i předpoklad 1 ze začátku této kapitoly a plocha (12) bude zároveň hledanou plochou čtvrtého stupně, bez singulárních bodů, mající aspoň jeden planární bod řádu druhého a obsahující největší možný počet přímek.

KAPITOLA 3

V této kapitole dokážeme, že na ploše

$$V \equiv x_0^4 - x_0 x_2^3 + x_1^3 x_3 - x_3^4 = 0 \tag{1}$$

leží právě 64 přímek a dále zjistíme zajímavé vztahy mezi těmito přímkami a planárními body plochy a konečně určíme počet automorfních kolineací.

Především platí:

Lemma 3.1. *Osm bodů, v nichž plochu* (1) *protnou osy* o_{13}, o_{02} *tvoří se šestnácti přímkami této plochy prostorovou konfiguraci* $(8_4, 16_2)$.

Důkaz. Osa o_{13} protne plochu ve čtyřech bodech $M \equiv (0, 1, 0, m)$ a osa o_{02} protne tuto plochu ve čtyřech bodech $N \equiv (n, 0, 1, 0)$, kde m, n jsou kořeny rovnice $x^4 - x = 0$.

Ihned vidíme, že každá přímka, procházející body M, N leží na ploše. Procházejí tedy každým z bodů M, N čtyři přímky plochy a na každé z těchto šestnácti přímek leží právě jeden bod M a jeden bod N. To jsme měli dokázat.

Zkoumejme nyní kolik přímek plochy protne přímku o_{12} v neparabolických bodech.

Je-li A neparabolický bod přímy o_{12}, pak především $O_1 \neq A \neq O_2$ (Body O_1, O_2 jsou totiž dokonce planární řádu druhého, neboť každým z nich procházejí čtyři přímky plochy. Viz větu 0.3). Souřadnice bodu A tedy můžeme psát $A \equiv (0, 1, t, 0)$, kde $t \neq 0$.

Má-li naopak bod A tyto souřadnice, pak je neparabolickým bodem přímky o_{12}, neboť v rovině ω_0 jsou jedinými parabolickými body průsečíky plochy s osou o_{13} a bod O_2.

Označme q přímku plochy, protínající o_{12} v bodě A. Přímka q neleží v rovině ω_0, neboť tečná rovina bodu A je dle lemmatu 1.2 různá od této roviny. Protne tedy přímka q rovinu ω_1 v bodě B, jehož souřadnice jsou

$$B \equiv (1, 0, f, e).$$

Pro obecný bod X přímky $q \equiv AB$ pak platí

$$X \equiv (b, a, bf + at, be)$$

a má-li přímka q ležet na ploše (1) musí být

$$V(X) \equiv a^3 b \,.\, (e - t^3) - 3 \,.\, a^2 b^2 \,.\, f t^2 - 3 \,.\, a b^3 \,.\, t f^2 + b^4 \,.\, (1 - f^3 - e^4) \equiv 0,$$

(identicky vzhledem k parametrům a, b), čili

$$e = t^3, f = 0, e^4 = 1.$$

Platí tedy:

Lemma 3.2. *Přímku o_{12} protne právě dvanáct přímek v neparabolických bodech. Označíme-li X_i obecný bod jedné z těchto dvanácti přímek q_i, pak pro jeho souřadnice platí*

(2) $\quad X_i \equiv (b, a, at_i, bt_i^3)$, *kde t_i je kořenem rovnice* $t^{12} = 1$.

Zkoumejme, které z bodů X_i přímky q_i jsou parabolické. Před chvíli jsme ukázali, že průsečík přímky q_i s osou o_{12} je neparabolický bod. Ze zápisu (2) vidíme, že tedy pro parabolické body T_i přímky q_i je $b \neq 0$ a můžeme psát $T_i \equiv (1, a, at_i, t_i^3)$, kde opět t_i je kořenem rovnice $t^{12} = 1$. Označíje-li H hessián plochy (1), pak

$$H(T_i) \equiv \begin{vmatrix} 12, & 0, & -3a^2t_i^2, & 0 \\ 0, & 6at_i^3, & 0, & 3a^2 \\ -3a^2t_i^2, & 0, & -6at_i, & 0 \\ 0, & 3a^2, & 0, & -12t_i^6 \end{vmatrix} \equiv 3^4 \,.\, a^2 \,.\, t_i(8 + a^3t_i^3) \,.\, (8 \,.\, t_i^9 + a^3),$$

čili vzhledem k $t_i^{12} = 1$ dostáváme $H(T_i) \equiv [9 \,.\, a \,.\, t_i^{-4} \,.\, (8 \,.\, t_i^9 + a^3)]^2$ a z podmínky $H(T_i) = 0$ plyne $a \,.\, (8 \,.\, t_i^9 + a^3) = 0$. Souřadnice parabolických bodů přímky q_i tedy jsou

(3) $\quad T_{ij} \equiv (1, -2y_j, -2y_jt_i, t_i^3)$, kde y_j jsou kořeny rovnice $y \,.\, (y^3 - t_i^9) = 0$ a t_i je kořenem rovnice $t^{12} = 1$.

Dokážeme nyní pomocnou větu:

Lemma 3.3. *Na každé z dvanácti přímek q_i $(i = 1, 2, \ldots, 12)$, protínajících osu o_{12} v neparabolických bodech leží čtyři planární body řádu prvního a každým z nich procházejí tři přímky plochy.*

Důkaz. Parabolické body T_{ij} přímky q_i rozdělme do dvou skupin. Do první nechť náleží bod $T_i^* \equiv (1, 0, 0, t_i^3)$ a do druhé body $T_{ik} \equiv (1, -2y_k, -2y_kt_i, t_i^3)$, kde y_k jsou kořeny rovnice $y^3 - t_i^9 = 0$.

Snadno se přesvědčíme, že ke každému kořenu y_k existuje kolineace

$$x_0 = x_0^* - x_2^*, \quad x_1 = -y_kt_i \,.\, (x_1^* + 2 \,.\, x_3^*t_i^8),$$
$$x_2 = -y_kt_i \,.\, (2 \,.\, x_0^* + x_2^*), \quad x_3 = -x_1^*t_i^4 + x_3^*,$$

která má tyto vlastnosti:

1. přímka q_i s obecným bodem (b, a, at_i, bt_i^3) je samodružná,
2. je automorfní vzhledem k ploše (1),
3. převádí bod T_{ik} na bod T_i^*.

Je-li tedy bod T_i^* planárním bodem řádu prvního, kterým procházejí tři přímky plochy, bude mít takové vlastnosti i každý z bodů T_{ik}. Stačí zřejmě dokázat, že bodem T_i^* procházejí právě tři přímky plochy, pak již (dle definice z úvodní kapitoly) bude také bod T_i^* planárním bodem řádu právě prvního.

Spojme bod T_i^* s bodem $Z_j \equiv (0, 1, z_j, 0)$. Přímka $T_i^*Z_j$ leží na ploše (1) zřejmě právě tehdy, je-li z_j kořenem rovnice $z^3 = t_i^3$. Z toho je patrno, že bodem T_i^* procházejí již aspoň tři přímky plochy. Tyto přímky protínají osu o_{12} v bodech Z_j, takže v rovině určené přímkou o_{12} a bodem T_i^* leží čtyři přímky, z nichž tři procházejí bodem T_i^* a čtvrtá (osa o_{12}), již bodem T_i^* neprochází.

Tím je důkaz věty proveden.

Dokažme ještě poslední pomocnou větu této kapitoly:

Lemma 3.4. *Na ploše* (1) *leží maximálně* 72 *planárních bodů, z nichž aspoň osm je řádu druhého.*

Hledejme nejprve planární body, které neleží v žádné ze souřadnicových rovin ω_0, ω_3. Souřadnice takových bodů jsou $P \equiv (1, -2tx, -2y, t)$, kde $t \neq 0$ a má-li být bod P planárním aspoň řádu prvního, pak jeho kvadratická polára W_2 vzhledem k ploše (1) musí (dle věty 0.1) obsahovat tečnou rovinu W_1, čili diskriminant kvadratické poláry (tj. hessián H plochy) má především hodnost 3. Okamžitě vidíme, že

$$H(P) \equiv \begin{vmatrix} 12, & 0, & -12y^2, & 0 \\ 0, & -12t^2x, & 0, & 12t^2x^2 \\ 12y^2, & 0, & 12y, & 0 \\ 0, & 12t^2x^2, & 0, & -12t^2 \end{vmatrix} \equiv 12^4 \,.\, t^4 \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & x - x^4, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & y - y^4, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} .$$

Má-li tedy mít $H(P)$ hodnost menší než tři, musí být současně $x - x^4 = 0$, $y - y^4 = 0$ a pro bod P kromě toho platí $V(P) \equiv 1 + 8 \,.\, y^3 - t^4 \,.\, (1 + 8x^3) = 0$, z čehož je ihned patrno, že takových bodů P může být maximálně 64.

Ukážeme-li, že v rovinách ω_0, ω_3 leží ještě osm planárních bodů druhého řádu (citovaných v lemmatu 3.1), bude tím lemma 3.4 celá dokázáno.

Automorfní kolieace

$$(4) \qquad x_0 = x'_3\,, \quad x_1 = x'_2\,, \quad x_2 = x'_1\,, \quad x_3 = x'_0$$

má tyto vlastnosti: převádí rovinu ω_0 na ω_3, osu o_{13} na osu o_{02}, bod O_2 na O_1 a naopak.

Pro parabolické body $T \neq O_2$ roviny ω_0 platí dle lemmatu 1.4 podmínka $V_{02}(T) = 0$, čili $x_2 = 0$, takže tyto body leží na ose o_{13}. Jsou tedy skutečně jedinými parabolickými body roviny ω_0 průsečíky plochy s přímkou o_{13} a bod O_2.

Vzhledem k vlastnostem automorfní kolineace (4) jsou právě tak jedinými parabolickými body roviny ω_3 průsečíky plochy s osou o_{02} a bod O_1. Vidíme tedy, že na průsečících os o_{13} a o_{02} s plochou (1) leží osm parabolických bodů, které vzhledem k pomocné větě 3.1 jsou dokonce planárními body řádu druhého, neboť každým z nich procházejí čtyři přímky plochy.

Tím je také lemma 3.4 dokázáno.

Dokažme nyní, že na ploše (1) skutečně leží 64 přímek. V rovině ω_0 leží čtyři přímky p. Jednou z nich je osa o_{12} (pro niž jsme dokazovali pomocné věty 3.2 a 3.3) a zbývající tři přímky spojují bod O_2 s body $Y_i \equiv (0, 1, 0, y_i)$, kde y_i jsou kořeny rovnice $y^3 = 1$.

Ke každému kořenu y_i existuje automorfní kolieace:

$$x_0 = \bar{x}_0 \sqrt{3}\,, \quad x_1 = \bar{x}_1 + 2\,.\,\bar{x}_3\,.\,y_i^2\,, \quad x_2 = \bar{x}_2 \sqrt{3}\,, \quad x_3 = \bar{x}_1\,.\,y_i - \bar{x}_3\,,$$

která převádí přímkou O_2Y_i na o_{12} a naopak.

Lemmata 3.2 a 3.3 platí tedy také pro každou z přímek O_2Y_i. Z lemmatu 3.2 především vidíme, že každou z přímek $p \subset \omega_0$ protíná dvanáct přímek $q \not\subset \omega_0$ v neparabolických bodech. Kromě toho každou z přímek p protnou ještě tři další přímky roviny ω_0, procházející planárním bodem druhého řádu (průsečíkem přímky p s osou o_{13}).

Leží tudíž na ploše celkem 64 přímek a z výsledků předchozí kapitoly můžeme vyslovit větu:

Věta 1. *Buď V plocha čtvrtého stupně bez singulárních bodů, na níž existuje aspoň jeden planární bod druhého řádu. Pak*

1. *na ploše V nemůže ležet více než* 64 *přímek a*
2. *existuje právě jedna plocha s* 64 *přímkami, jejíž rovnici můžeme upravit na tvar*

$$V \equiv x_0^4 - x_0x_2^3 + x_1^3x_3 - x_3^4 = 0\,. \tag{1}$$

Z 64 přímek plochy (1) prochází 16 planárními body řádu druhého a tvoří s nimi prostorovou konfiguraci $(8_4, 16_2)$.

Na každé ze zbývajících 48 přímek plochy leží čtyři planární body prvního řádu a každým z těchto bodů procházejí tři tyto přímky. Tvoří tudíž 64 planárních bodů řádu prvního s 48 přímkami plochy prostorovou konfiguraci $(64_3, 48_4)$.

Vzhledem k pomocné větě 3.4 tedy platí:

Věta 2. *Na ploše* (1) *leží právě* 72 *planárních bodů, z nichž* 64 *je řádu prvního a osm řádu druhého. Planární body prvního řádu tvoří s* 48 *přímkami plochy prostorovou konfiguraci* $(64_3, 48_4)$ *a planární body řádu druhého tvoří se zbývyjícími šestnácti přímkami prostorovou konfiguraci* $(8_4, 16_2)$.

Při hledání automorfních kolineací plochy (1) vycházejme z poznatku, že čtyři planární body druhého řádu leží na ose o_{02} a zbývající čtyři na ose o_{13}. Mohou tudíž existovat dvě skupiny automorfních kolineací, z nichž při první zůstávají osy o_{02} a o_{13} samodružné, kdežto při druhé se navzájem vyměňují. Kolineace obou těchto skupin můžeme tedy psát ve tvaru

$$\text{I.} \quad x_0 = A_0\bar{x}_0 + B_0\bar{x}_2\,, \quad x_1 = A_1\bar{x}_1 + B_1\bar{x}_3\,,$$
$$x_2 = A_2\bar{x}_0 + B_2\bar{x}_2\,, \quad x_3 = A_3\bar{x}_1 + B_3\bar{x}_3\,,$$

$$\text{II.} \quad x_0 = a_0\bar{x}_1 + b_0\bar{x}_3\,, \quad x_1 = a_1\bar{x}_0 + b_1\bar{x}_2\,,$$
$$x_2 = a_2\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_3\,, \quad x_3 = a_3\bar{x}_0 + b_3\bar{x}_2\,.$$

Rovnici plochy (1) upravme ještě na rozdíl dvou členů:

(5) $$V \equiv M - N = 0\,, \quad \text{kde} \quad M \equiv x_0^4 - x_0 x_2^3\,, \quad N \equiv x_3^4 - x_3 x_1^3\,.$$

Soustředíme se nyní na kolineace skupiny I. Tyto kolineace zachovávají každý ze členů M, N rovnice (5) jako celek. Hledejme tedy nejprve automorfní kolineace

(6) $$x_0 = A_0 \bar{x}_0 + B_0 \bar{x}_2\,, \quad x_2 = A_2 \bar{x}_0 + B_2 \bar{x}_2\,,$$

které zachovávají jako celek člen M.

Protože na ose o_{02} leží čtyři planární body druhého řádu o souřadnicích $(t, 0, 1, 0)$, kde t je kořenem rovnice $z^4 - z = 0$, musí některý z těchto bodů při aplikaci automorfní kolineace (6) přejít na bod O_2, čili musí být $B_0 = B_2 t$. Z toho okamžitě plyne $B_2 \neq 0$, neboť jinak by kolineace (6) byla singulární. Vzhledem k podmínce $t^4 - t = 0$, můžeme tedy položit $B_2 = 2t^3 - 1$; takže je $B_0 = t$ a kolineace (6) nabývá tvaru

(6′) $$x_0 = A_0 \bar{x}_0 + t \,.\, \bar{x}_2\,, \quad x_2 = A_2 \bar{x}_0 + (2t^3 - 1) \,.\, \bar{x}_2\,.$$

Dosaďme tyto výsledky za x_0, x_2 do výrazu M ze zápisu (5) a označme k_i koeficient při mocnině $\bar{x}_0^i \,.\, \bar{x}_2^{4-i}$.

Vypočítejme nejprve k_2. Snadno zjistíme, že

$$k_2 = 3 \,.\, [2 \,.\, A_0^2 t^2 - A_2^2 t \,.\, (2t^3 - 1) - A_0 A_2 \,.\, (2t^3 - 1)^2]\,,$$

čili vzhledem k $t^4 - t = 0$ jest:

$$k_2 = 3 \,.\, [2 \,.\, A_0^2 t^2 - t \,.\, A_2^2 - A_0 A_2] = 3 \,.\, [A_0 \,.\, (2t^3 - 1) - t \,.\, A_2] \,.\, [A_2 + 2A_0 t^2]\,.$$

Aby kolineace (6′) nebyla singulární, musí být $A_0 \,.\, (2t^3 - 1) - t \,.\, A_2 \neq 0$. Má-li tedy být (6′) automorfní kolineací vzhledem k členu M ze zápisu (5), musí být (kromě jiného) $k_2 = 0$, čili $A_2 = -2A_0 \,.\, t^2$ a zápis (6′) přechází na tvar

(7) $$x_0 = a \,.\, \bar{x}_0 + t \,.\, \bar{x}_2\,, \quad x_2 = 2at^2 \,.\, \bar{x}_0 + (2t^3 - 1) \,.\, \bar{x}_2\,, \quad t^4 - t = 0\,.$$

Dosadíme-li tyto výsledky za x_0, x_2 do členu M ze zápisu (5) a použijeme-li opět označení k_i v témž smyslu, jako před chvílí, pak vidíme okamžitě, že jest

$$k_0 = k_2 = k_3 = 0\,, \quad k_1 = a^4 \,.\, (8t^3 + 1)\,, \quad k_4 = a \,.\, (8t^3 + 1)\,.$$

Z poslední podmínky pro automorfní kolineaci, tj. $k_1 = -k_4 \neq 0$ plyne okamžitě $a^3 - 1 = 0$.

Z toho je patrno, že existuje právě dvanáct automorfních kolineací (7), které zachovávají člen M v rovnici plochy $V \equiv M - N = 0$ ze zápisu (5).

Tyto automorfní kolineace jsou již dostatečně známé a tvoří tetraedrickou grupu G_{12} (viz např. [5] str. 152).

Právě tak tvoří tetraedrickou grupu G'_{12} kolineace zachovávající člen N v rovnici plochy V ze zápisu (5).

Kolineace tvořící grupu G_{12} a G'_{12} můžeme spolu libovolně kombinovat, čímž dostáváme 144 kombinací. Označíme-li T_i kolineace grupy G_{12} a obdobně T'_j kolineace grupy G'_{12}, lze symbolicky těchto 144 kolineací zapsat ve tvaru $T_i . [z . T'_j]$, kde $i . j = 1, 2, \ldots, 12$ a z je dosud neznámý číselný faktor.

Aplikujeme-li libovolnou z těchto kolineací na naši plochu V, nezmění T_i její první člen (M), kdežto $z . T'_j$ způsobí násobení druhého členu (N) faktorem z^4. Je tedy třeba, aby bylo $z^4 = 1$. Tím dostáváme 576 kolineací skupiny I.

Mají-li se členy M, N při aplikaci kolineací skupiny II. navzájem vyměnit, dostáváme dalších 576 prvků. Tím je dokázána věta:

Věta 3. *Plocha* (1) *se reprodukuje* 1152 *automorfními kolineacemi, z nichž pro polovinu jsou osy o_{02}, o_{13} samodružné a pro druhou polovinu se navzájem vyměňují.*

Literatura

[1] *G. Affolter:* Über Gruppen gerader Linien auf Flächen höherer Ordnung. Mathem. Annalen: *27* (1886) a *29* (1887).

[2] *W. F. Meyer:* Spezielle algebraische Flächen. Enzyklopädie der math. Wissenschaften, svazek III. 2, číslo C 10 b.

[3] *R. Sturm:* Die Lehre von den geometrischen Wissenschaften, díl III.

[4] *B. Bydžovský:* Úvod do algebraické geometrie.

[5] *J. Vojtěch:* Geometrie projektivní, Praha 1932.

Adresa autora: Liberec, Hálkova 5 (Vysoká škola strojní a textilní).

Zusamenfassung

ÜBER GEWISSE ALGEBRAISCHE FLÄCHEN MIT DER MAXIMALER ANZAHL DER GERADEN UND MIT PLANARPUNKTEN HÖCHSTEN GRADES

VÁCLAV METELKA, Liberec

Das Arbeitsziel besteht in der Untersuchung der Beziehungen zwischen den Planarpunkten und der maximaler Anzahl der Geraden auf Flächen wenigstens vierter Ordnung, ohne Singunlarpunkte. In der Einleitung ist das Grad des Planarpunktes definiert und ein Satz (unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen ein Regularpunkt einer Fläche ein Planarpunkt des bestimmten Grades ist) bewiesen. Nach dem gemeingültigen Teil, dem das erste Kapitel gewidmet ist, stellt sich der Verfasser auf die Fläche der vierten Ordnung ein und beweist, dass unter der Vorzussetzung der Existenz mindenstens eines Planarpunktes zweiten Grades genau eine bestimmte Fläche mit der Maximalanzahl (64) der Geraden existiert. Diese Fläche reproduziert sich mit 1152 Kollineationen und enthält 72 Planarpunkte, aus denen 64 ersten und 8 zweiten Grades sind. Planarpunkte des ersten Grades bilden mit 48 Geraden dieser Fläche die Raumkonfiguration $(64_3, 48_4)$ und analogisch die Planarpunkte zweiten Grades mit den übrigen Geraden die Raumkonfiguration $(8_4, 16_2)$.