Časopis pro pěstování matematiky

Štefan Schwarz

Vedecká práca prof. K. Petra v oblasti teórie čísel

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 3, 358--361

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108607

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

REFERÁTY

VEDECKÁ PRÁCA PROF. K. PETRA V OBLASTI TEÓRIE ČÍSEL*)

ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava

Vážení prítomní!

Je veľmi ťažko v takomto krátkom príhovore, ak mám pritom zachovať rozumné proporcie, pojednať podrobnejšie o Petrových prácach z teórie čísel.

Keď som opätovne prezrel súbor jeho vedeckých prác napočítal som 22 pôvodných prác, ktoré jednoznačne patria do teórie čísel. Tým ale nie je povedané, že by metódy teórie čísel neboli obsiahnuté aj v mnohých ďalších prácach, a to nielen v prácach algebraického charakteru, ale aj v prácach pojednávajúcich napr. o Bernouilliho číslach a Bernouilliho polynómoch.

Číselne teoretické práce prof. Petra sa týkajú zhruba týchto odborov:

a) Práce z elementárnej teórie čísel.
b) Aritmetická teória foriem.
c) Počet tried kvadratických foriem a analytická teória čísel.
d) Teória algebraických čísel.

Prehovorím postupne o jednotlivých úsekoch.

Petr prednášal často teóriu čísel a niektoré jeho práce z elementárnej teórie čísel sú zrejme výsledkom snahy zlepšovať a zjednodušovať dôkazy. Tak napr. jeho dôkaz kvadratického zákona reciprocity z roku 1933 je najkratší, ktorý poznám. Pritom je veľmi prehľadný.

Jedna z význačných prác z elementárnej teórie čísel je práca o Pellovej rovnici, kde ukázal, aký je vzťah medzi riešiteľnosťou rovnice $x^2 - dy^2 = 1$ $(d > 0)$ a rovnicami $d_1x^2 - d_2y^2 = \pm 1, \pm 2$, kde $d_1d_2 = d$, $d_1 < d_2$.

Iná z jeho prác podáva nový dôkaz vety o minimu kvadratickej formy

$$\min \left| \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k \right| < \left(\tfrac{4}{3}\right)^{(n-1)/2} . \sqrt[n]{|D|}$$

(pritom sú x_i celé čísla, nie všetky rovné nule a D je diskriminant kv. formy).

Z aritmetickej teórie foriem napísal niekoľko prác o kompozícii foriem.

*) Prejav prednesený na oslave 100 rokov od narodenia prof. Karla Petra dňa 7. júna 1968.

Už tieto drobné ukázky dokazujú, že v samotnej teórii čísel bol prof. Petr veľmi mnohostranný. Pravda (a uvádzam to hlavne pre mladých tu prítomných priateľov) bolo to v období, keď rozvoj matematiky nemal ešte taký búrlivý trend ako za posledných 25–30 rokov.

Veľký počet Petrových prác týka sa použitia teórie eliptických funkcií na problémy číselnej teórie.

Ako je známe eliptické funkcie dajú sa vyjadriť pomocou štyroch tzv. ϑ-funkcií $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$. To sú rýchlo konvergujúce nekonečné rady. Tak napr. funkcia $\vartheta_3(z)$ je definovaná takto:

$$\vartheta_3(z) = 1 + 2q \cos 2\pi z + 2q^4 \cos 4\pi z + 2q^9 \cos 6\pi z + \ldots,$$

kde $q = e^{i\pi\tau}$ a číslo τ leží v hornej polrovine. Je to teda funkcia dvoch premenných z a τ. Pri pevnom τ je to celistvá funkcia z, pri pevnom z regulárna funkcia τ v hornej polrovine.

Vlastnosti týchto špeciálnych funkcií boli v druhej polovine minulého storočia predmetom podrobného záujmu matematikov. Existuje mnoho vzťahov medzi týmito funkciami a eliptickými funkciami $\wp$, σ, ζ. Sú známe rozmanité transformácie ϑ-funkcií, ich trigonometrické rozvoje, rozmanité adičné teorémy, atď. Treba poznamenať, že štúdium týchto funkcií značne prispelo k rozvoju matematickej analýzy v komplexnom obore.

Ako tieto funkcie súvisia s číselnou teóriou vyložím na veľmi jednoduchom príklade.

Uvažujme napr. rozvoj

$$[\vartheta_3(0)]^4 = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots)^4 = \sum_{n=0}^{\infty} r_4(n) \,.\, q^n \,.$$

Je zrejmé, že číslo $r_4(n)$ dáva počet riešení rovnice $n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ v celých číslach. Ak dokážeme napr. že $r_4(n) > 0$, pre každé celé číslo $n > 0$, dokážeme tým túto Lagrangeovu vetu: Každé celé číslo $n > 0$ sa dá písať ako súčet 4 štvorcov. To je skutočne pravda. (Naviac podrobný výpočet čísla $r_4(n)$ dáva rovnosť $r_4(n) = 8 \sum_{d|n, 4 \neq d} d$.)

Petr sa zaoberal predovšetkým iným problémom. Uvažujme o všetkých kvadratických formách s celočíselnými koeficientmi $ax^2 + bxy + cy^2$, ktoré majú pevný diskriminant $d = b^2 - 4ac$. Takých je, pravda, mnoho. Nazvime dve formy (a, b, c), (a', b', c') ekvivalentnými, ak jedna prejde v druhú lineárnou substitúciou $x = r\xi + s\eta$, $y = t\xi + u\eta$, $ru - ts = 1$. Dá sa dokázať, že počet tried ekvivalentných foriem, označme ho znakom $h(d)$, je konečný.

Gauss a Dirichlet odvodili explicitné vzorce pre číslo $h(d)$. Metódy, ktoré pritom použili, dali vznik dnes veľmi rozvinutej analytickej teórii čísel.

Kronecker a Hermite našli isté rekurentné vzorce pre číslo $h(d)$, $d < 0$. Petr majstrovsky používajúc teóriu eliptických funkcií dokázal rad nových všeobecnejších a výhodnejších vzorcov.

Typický príklad takého vzorca je tento. Označme znakom $F(n)$ počet tried diskriminantu $-n$. Potom platí

$$F(n) + 2F(n - 1^2) + 2F(n - 2^2) + \ldots = \sum_\lambda d_\lambda - \sum_i d_i ,$$

kde na pravej strane sú isté (presne určené) delitele čísla n. Na ľavej strane berieme sčítance len potiaľ, pokiaľ sú ich argumenty kladné.

V období 15–20 rokov sa Petr niekoľko raz vrátil k tejto problematike a dokázal asi 20 rekurentných vzťahov podobného typu, napr. také, kde na ľavej strane sú výrazy

$$F(n) + 2F(n - 2^2) + F(n - 4^2) + \ldots$$
$$F(n) + 2F(n - 9.1^2) + 2F(n - 9.2^2) + \ldots$$

Pri odvodzovaní takýchto vzťahov treba majstrovsky kombinovať znalosti z teórie eliptických funkcií, trigonometrické rozvoje ϑ-funkcií s vyvinutým citom pre číselne teoretické problémy.

Ako — v istom zmysle vedľajší produkt — dostal v týchto súvislostiach prof. Petr explicitné vzorce pre počet celočíselných riešení rovníc napr. tvaru $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ax_4^2 = n$ $(a = 3, 5, 9)$ a pre rad iných rovníc.

Petr odvodil (používajúc vlastnosti ϑ-funkcií) aj klasický vzorec pre číslo $h(d)$ v novom tvare:

$$h(d) = -\frac{1}{|d|}\sum (d, k) \, . \, k \, , \quad (d < 0) \, ,$$

kde súčet sa vzťahuje na čísla $k = 1, 2, \ldots, -d-1$ a (d, k) je Weberovo zovšeobecnenie Legendreovho symbolu. Pri dôkaze tohto vzorca je charakteristické, že sa mu podarilo obísť obtiažne limitné prechody, kroré používal napr. Dirichlet.

Petrove metódy a výsledky podnietili rad ďalších autorov k novým vyšetrovaniam. Našli trvalé miesto v známej Dicksonovej monografii, History of the theory of numbers, kde v III. zväzku je Petrovým výsledkom venované mnoho miesta ako rovnocennému partnerovi takých matematikov akými boli Hermite, Kronecker a iní.

Petr použil teóriu ϑ funkcií ešte na dva ďalšie okruhy otázok. Odvodil vzorce pre počet vyjadrení celého čísla $n > 0$ ako súčet 10 a súčet 12 štvorcov. Iba na ilustráciu: Vyšetrenie výrazu $[\sum q^{k^2}]^{10}$ vedie ku štúdiu štvrtej derivácie funkcie $\vartheta_i\vartheta_j(\vartheta_k(z)/\vartheta_l(z))$.

Nie menej prekvapujúce je použitie eliptických funkcií (konkrétne Weierstrassovej σ-funkcie) na dôkaz zákona reciprocity pre bikvadratické a bikubické zvyšky. (Práca z r. 1929.)

Dve Petrove práce z algebraickej teórie čísel pochádzajú z rokov 1934–1936. Pravda, i niektoré staršie práce a aj niektoré práce z posledných rokov jeho života (z rokov 1946 a 1947), zapadajú do tejto oblasti.

V prvej z týchto prác, ktorá bola pre mňa osobne veľmi dôležitá, ide o riešenie tejto otázky: Nájsť metódu ako poznať či kongruencia

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv 0 \pmod p$$

je reducibilná alebo nie. Otázka se dá, pravda, vždy rozhodnúť po konečnom počte krokov. Petr našiel však metódu, ako tak urobiť bez skúšania. Explicitné vzorce a algoritmy boli vždy Petrovým ideálom. Nešlo len o to, že to odpovedalo povahe problémov a tendenciam obdobia kedy vyrástal a pracoval, ale – ako to vyplýva z celej Petrovej vedeckej činnosti – bol to základný rys jeho tvorby. V letnom semestri roku 1934 mal Petr o teórii konečných telies prednášku „publice" (1 hod. týždenne). Problematika ma osobne tak zaujala, že konečné telesá sa stali mojou prvou láskou. V roku 1937 som na túto tému vypracoval (ako posledný Petrov doktorant) svoju dizertačnú prácu. Na problematike konečných telies som sa naučil matematicky tvoriť. Vtedy som nemal tušenie o tom, že teória konečných telies nájde o 20 rokov neskôr uplatnenie v takých odvetviach ako je matematická štatistika, teória kódovania a kombinatorická matematika vôbec.

Posledná práca, o ktorej by som sa chcel zmieniť, je práca „O bázi celých čísel v obecných tělesech algebraických", ktorú Petr predniesol na Druhom sjezdu matematiků zemí slovanských v Prahe v septembri r. 1934 (a publikoval väčšinou iba bez dôkazov v roku 1935).

Celým algebraickým číslom nazývame číslo ϑ, ktoré vyhovuje rovnici $f(\vartheta) = 0$, kde $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ je polynóm, v ktorom a_i sú celé racionálne čísla. Nech ϑ je celé algebraické číslo a $R(\vartheta)$ teleso, ktoré vznikne adjunkciou čísla ϑ k telesu racionálnych čísel R. Vyšetrujme okruh celých algebraických čísel telesa $R(\vartheta)$. Ide o to nájsť bázu tohto okruhu, tj. n alg. celých čísel $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, tak, aby každé celé číslo $\in R(\vartheta)$ sa dalo napísať (a to jednoznačne) v tvare

$$x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \ldots + x_n\omega_n,$$

kde x_i sú celé racionálne čísla.

Báza sa dá napísať v tvare

$$1, \frac{\varphi_1(\vartheta)}{d_1}, \frac{\varphi_2(\vartheta)}{d_2}, \ldots, \frac{\varphi_{n-1}(\vartheta)}{d_{n-1}},$$

kde $d_i \mid d_{i+1}$ a $\varphi_i(x)$ je polynóm stupňa i. Ide o to určiť celé čísla $d_i > 0$ a polynómy $\varphi_i(x)$ alebo ich aspoň tak obmedziť, aby boli prístupné numerickému výpočtu. Petr našiel rad obmedzujúcich podmienok pre čísla d_i a polynómy $\varphi_i(x)$. Petrovu metódu som aj osobne vyskúšal na mnohých príkladoch. Som presvedčený, že by stálo za to túto metódu podrobnejšie rozpracovať. Vec nie je ovšem tak jednoduchá, ako by sa mohlo na prvý pohľad zdať. Napr. Delone v knihe „Teorija iracionalnostej tretej stepeni" (1940) venuje problému bázy v špeciálnom prípade kubického telesa mnoho a mnoho strán. (Za dobrú predprípravu môže slúžiť kniha W. Berwick, Integral bases, Cambridge Tracts, No 22, 1927.)

Úhrnom možno povedať, že prof. Petr celou svojou učiteľskou i vedeckou tvorbou sa stal zakladateľom moderného vývinu teórie čísel u nás a ovlivnil značnou mierou teóriu čísel i v medzinárodnom meradle.