Časopis pro pěstování matematiky

Ivan Singer

Poznámka o norme v priestoroch $L_\infty(S, \mu)$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 3, 355--357

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108604`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

RŮZNÉ

POZNÁMKA O NORME V PRIESTOROCH $L_\infty(S, \mu)$

IVAN SINGER, Řež u Prahy

(Došlo dňa 11. Januára 1968)

Podľa [1], $L_\infty(S, \mu)$ je lineárny priestor podstatne ohraničených merateľných reálnych funkcií na merateľnej množine S so spočetnou additívnou nezápornou mierou μ a s normou $\|f\| = \operatorname{vrai\,sup}_\mu |f(s)| = \inf_N \sup_{s \in S - N} |f(s)|$, kde $v(\mu, N)$ je totálna variácia μ na N a $v(\mu, N) = 0$. Z vlastností $L_\infty(S, \mu)$ okamžite plynie, že ak $f \in L_\infty(S, \mu)$, potom

(i) existuje nulová množina $M \subset S$ tak, že $\|f\| \sup_{s \in S - M} |f(s)|$ a pre každé $\xi < \|f\|$ existuje $M_\xi \subset S - M$, že $\mu(M_\xi) > 0$ a $|f(s)| \geqq \xi$ pre $s \in M_\xi$.

(ii) ak $f, g \in L_\infty(S, \mu)$ sú L-integrabilné funkcie, potom

$$\int_S |f(s)\, g(s)|\, \mu(\mathrm{d}s) = \alpha \,.\, \int_S |g(s)|\, \mu(\mathrm{d}s) \quad \text{kde} \quad 0 \leqq \alpha \leqq \|f\| \,.$$

Platí:

Veta. *Nech $f \in L_\infty(S, \mu)$ je $L-$ integrabilná funkcia a nech $\|f\| = 1$ potom*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\int_S |f(s)|^{n+1}\, \mu(\mathrm{d}s)}{\int_S |f(s)|^n\, \mu(\mathrm{d}s)} = 1 \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Dôkaz. Podľa (ii) je

$$\int_S |f(s)|^{n+1}\, \mu(\mathrm{d}s) = \alpha_n \int_S |f(s)|^n\, \mu(\mathrm{d}s)\,,$$

kde $0 < \alpha_n \leqq \|f\| = 1$ a teda postupnosť α_n je ohraničená s 1. Naviac platí, že $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 1$. V opačnom prípade by existovalo η, $0 < \eta < 1$ a nekonečná postupnosť n_i taká, že $\alpha_{n_i} \leqq \eta < \xi < 1$, kde ξ je ľubovoľné číslo z intervalu $(\eta, 1)$. Potom

$$p_{n_i} = \frac{\frac{1}{\xi}\int_S |f(s)|^{n_i+1}\,\mu(\mathrm{d}s)}{\int_S |f(s)|^{n_i}\,\mu(\mathrm{d}s)} \leqq \frac{\eta}{\xi} < 1\,.$$

Označme $f_\xi(s) = f(s)/\xi$. Podľa (i) existuje $M_\xi \subset S$, $\mu(M_\xi) > 0$ tak, že $\xi \leqq |f(s)| \leqq 1$ pre každé $s \in M_\xi$ a $1 \leqq |f_\xi(s)| \leqq 1/\xi = \|f_\xi\|$ pre všetky $s \in M_\xi$. Môžeme písať

$$p_{n_i} = \frac{\int_S |f_\xi(s)|^{n_i+1}\,\mu(\mathrm{d}s)}{\int_S |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(\mathrm{d}s)} = \frac{\int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i+1}\,\mu(\mathrm{d}s) + \int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i+1}\,\mu(\mathrm{d}s)}{\int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(\mathrm{d}s) + \int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(\mathrm{d}s)} =$$

$$= \frac{\alpha_{n_i}^{(\xi)}\int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(\mathrm{d}s) + \int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i+1}\,\mu(\mathrm{d}s)}{\int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(\mathrm{d}s) + \int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(\mathrm{d}s)}$$

kde $1 \leqq \alpha_{n_i}^{(\xi)} \leqq 1/\xi$, použijúc (ii). Je zrejme, že $\lim_{n_i\to\infty} \int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(\mathrm{d}s) = +\infty$ a $\lim_{n_i\to\infty} \int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(\mathrm{d}s) = 0$, pretože $|f_\xi(s)| < 1$ na $S - (M \cup M_\xi)$. Potom platí

$$\lim_{n_i\to\infty} \frac{\int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i+1}\,\mu(\mathrm{d}s)}{\int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(\mathrm{d}s)} = \lim_{n_i\to\infty} \frac{\int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(\mathrm{d}s)}{\int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(\mathrm{d}s)} = 0$$

a pre $\varepsilon = (\xi - \eta)/2\eta$ existuje také n_j, že pre všetky $n_i > n_j$ je

$$0 \leqq \frac{\int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(\mathrm{d}s)}{\int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(\mathrm{d}s)} < \frac{(\xi - \eta)}{2\eta}$$

a potom

$$p_{n_i} = \frac{\alpha_{n_i}^{(\xi)} + \frac{\int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i+1}\,\mu(\mathrm{d}s)}{\int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(\mathrm{d}s)}}{1 + \frac{\int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(\mathrm{d}s)}{\int_{M_\xi} |f_\xi(s)^{n_i}\,\mu(\mathrm{d}s)}} \geqq \frac{\alpha_{n_i}^{(\xi)}}{1 + \frac{(\xi - \eta)}{2\eta}} \geqq \frac{1}{1 + \frac{(\xi - \eta)}{2\eta}} = \frac{2\eta}{\eta + \xi} > \frac{\eta}{\xi}\,,$$

čo je v rozpore s predpokladom, že pre všetky n_i platí $p_{n_i} \leqq \eta/\xi$.

Dôsledok. *Nech $f \in L_\infty(S, \mu)$ je integrabilná funkcia s kladnou normou. Potom*

$$\|f\|^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_S f(s)^{2(n+1)}\,\mu(ds)}{\int_S f(s)^{2n}\,\mu(ds)}.$$

Dôsledok je zrejmy ak v predchádzajúcej vete uvažujeme funkciu $\Phi(s) = f(s)^2/\|f\|^2$.

Literatúra

[1] *N. Dunford, J. T. Schwartz:* Линейные операторы, Москва 1962.

Adresa autora: Řež u Prahy (Ústav jaderného výzkumu ČSAV).