Časopis pro pěstování matematiky, roč. 110 (1985), Praha

POZNÁMKA K SYMETRICKEJ KONEXII NA DOTYKOVOM A KODOTYKOVOM BANDLI

FRANTIŠEK HUSÁRIK, Zvolen

(Došlo dňa 6. januára 1984)

Keď M je diferencovateľná varieta, potom TM je dotykový a T^*M je kodotykový bandl. Nech $\mathscr{L}\colon TM \to T^*M$ je lineárny morfizmus nad id_M. Potom predpisom

$$\omega_{\mathscr{L}}(X, Y) = [\mathscr{L}(X)](Y)$$

je na M určená bilineárna forma. Obrátene, ak ω je bilineárna forma na M, tak predpisom

$$X \mapsto \mathrm{i}_X\omega\,, \quad \text{kde} \quad \mathrm{i}_X\omega(Y) = \omega(X, Y)$$

je určený lineárny morfizmus $\mathscr{L}_\omega\colon TM \to T^*M$ nad id_M.

Keď (x^i, y^j) a (x^i, z_j) sú lokálne súradnicové mapy na TM a T^*M, potom v súradniciach je morfizmus $\mathscr{L}$ daný predpisom

$$z_i = A_{ij}(x)\, y^j \quad \text{a} \quad \omega_{\mathscr{L}} = A_{ij}(x)\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j\,.$$

Dotykové zobrazenie $T\mathscr{L}\colon TTM \to TT^*M$ je určené rovnicami

$$\begin{aligned}
(1) \qquad T\mathscr{L}\colon\ \bar{x}^i &= x^i\\
z_i &= A_{ij}(x)\, y^j\\
\mathrm{d}\bar{x}^i &= \mathrm{d}x^i\\
\mathrm{d}z_i &= \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k}\, y^j\, \mathrm{d}x^k + A_{ij}\, \mathrm{d}y^j
\end{aligned}$$

Nech T^*X je pole na T^*M, ktoré vzniklo predĺžením poľa X na M použitím prolongačného funktora T^* z kategórie vzájomne difeomorfných variet do kategórie vektorových fibrovaných priestorov. Je známe pozri [2], že konštrukciou polí T^*X je každým $h \in T^*M$ určené zobrazenie $\varphi_h\colon (J^1TM)_{ph} \to T_hT^*M$. Ak Γ je zovšeobecnená konexia na TM, t.j. $\Gamma\colon TM \to J^1TM$, potom $\varphi_h \circ \Gamma\colon T_{ph}M \to T_hT^*M$. V [2] sa dokazuje, že zobrazeniami $\varphi_h \circ \Gamma$ je určená na T^*M konexia práve vtedy, keď konexia Γ je lineárna. Konexia na T^*M generovaná zobrazeniami $\varphi_h \circ \Gamma$ je v [2] označovaná $T^*\Gamma$.

V súradniciach, ak $dy^k = \Gamma^k_{ij} y^j \, dx^i$ sú rovnice konexie Γ, tak $dz_i = -\Gamma^k_{ij} z_k \, dx^j$ sú rovnice konexie $T^*\Gamma$.

Pripomeňme, že keď X je vektorové pole na M, potom absolútna derivácia poľa X vzhľadom na konexiu Γ je zobrazenie $\nabla_\Gamma X \colon TM \to VTM$. Označíme $\mathrm{I}(\nabla_\Gamma X(Y)) = \nabla_Y X$, kde I znamená kanonickú identifikáciu I: $V_h T_{uh} M \equiv T_{uh} M$, kde $u \colon TM \to M$. Potom

$$\nabla_{\partial/\partial x^i} \partial/\partial x^j = -\Gamma^k_{ij} \partial/\partial x^k$$

Absolútna derivácia formy $\omega_{\mathscr{L}}$ vzhľadom na konexiu Γ je forma určená predpisom (pozri [1])

$$(\nabla_X \omega_{\mathscr{L}})(Y, Z) = X(\omega(Y, Z)) - \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z) .$$

Z toho vyplýva, že forma $\omega_{\mathscr{L}}$ je invariantná vzhľadom na paralelný prenos určený konexiou Γ, t.j. $\nabla \omega_{\mathscr{L}} = 0$ práve vtedy keď $X(\omega(Y, Z)) = \omega(\nabla_X Y, Z) + \omega(Y, \nabla_X Z)$. Keď zvolíme $X = \partial/\partial x^k$, $Y = \partial/\partial x^i$, $Z = \partial/\partial x^j$ dostaneme súradnicový tvar nutnej a postačujúcej podmienky preto, aby $\nabla \omega_{\mathscr{L}} = 0$. Táto je

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} = -A_{sj} \Gamma^s_{ki} - A_{is} \Gamma^s_{kj} . \tag{2}$$

Hovoríme, že zobrazenie $\mathscr{L}$ je symetrické ak forma $\omega_{\mathscr{L}}$ je symetrická.

V prípade, že zobrazenie $\mathscr{L}$ je regulárne a symetrické, štruktúra $(M, \omega_{\mathscr{L}})$ je kvázi-Riemannova. Potom existuje práve jedna symetrická lineárna konexia, tzv. kvázi-Riemannova konexia na M tak, že platí rovnica (2).

V prípade, keď zobrazenie $\mathscr{L}$ je regulárne, konexiou Γ na TM je učená konexia $\mathscr{L}(\Gamma)$ na T^*M. Z rovníc (1) vyplývajú rovnice konexie $\mathscr{L}(\Gamma)$, tieto sú:

$$dz_i = \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} A^{js} z_s + A_{ij} \Gamma^j_{ku} A^{us} z_s \right) dx^k \tag{3}$$

kde A^{us} je matica inverzná k matici A_{us}.

Keď porovnáme rovnice konexie $T^*\Gamma$ s (3) dostaneme nutnú a postačujúcu súradnicovú podmienku pre to, aby $\mathscr{L}(\Gamma) = T^*\Gamma$. Táto je

$$\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} A^{js} + A_{ij} \Gamma^j_{ku} A^{us} \right) z_s = -\Gamma^s_{ik} z_s , \quad \text{t. j.}$$

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} = -A_{sj} \Gamma^s_{ik} - A_{is} \Gamma^s_{kj} . \tag{4}$$

Veta 1. *Nech Γ je lineárna symetrická konexia na TM. Nech $\mathscr{L}$ je regulárne zobrazenie. Potom $T^*\Gamma = \mathscr{L}(\Gamma)$ práve vtedy, keď $\nabla \omega_{\mathscr{L}} = 0$.*

Dôkaz: Plynie z porovnania vzťahov (2) a (4).

Dôsledok 1. *Nech $\mathscr{L}$ je symetrický izomorfizmus. Potom jedinou symetrickou lineárnou konexiou na TM takou, že $T^*\Gamma = \mathscr{L}(\Gamma)$ je kvázi-Riemannova konexia štruktúry $(M, \omega_{\mathscr{L}})$.*

Nech Γ je zovšeobecnená konexia na T^*M daná rovnicou

$$dz_i = a_{ij}(x, z)\, dx^i\,.$$

Konexiou Γ je určený rozklad $T^*M = VT^*M + H_\Gamma T^*M$ a tým aj kanonické projekcie v_Γ: $TT^*M \to VT^*M$, h_Γ: $TT^*M \to H_\Gamma T^*M$. Nech α je forma k-tého stupňa na T^*M. Hovoríme, že α je Γ-vertikálna (resp. Γ-horizontálna), ak pre každú k-ticu vektorov $X_1, \ldots, X_k \in T_h T^*M$ platí

$$\alpha(h_\Gamma X_1, \ldots, h_\Gamma X_k) = 0$$

resp.

$$\alpha(v_\Gamma X_1, \ldots, v_\Gamma X_k) = 0\,.$$

Označme $h_\Gamma\alpha$, resp. $v_\Gamma\alpha$ formy definované predpisom

$$h_\Gamma\alpha(X_1, \ldots, X_k) = \alpha(h_\Gamma X_1, \ldots, h_\Gamma X_k)$$

$$v_\Gamma\alpha(X_1, \ldots, X_k) = \alpha(v_\Gamma X_1, \ldots, v_\Gamma X_k)$$

Forma $h_\Gamma\alpha$ je Γ-horizontálna, forma $v_\Gamma\alpha$ je Γ-vertikálna.

Nech $\lambda = z_i\, dx^i$ je kanonická Liouvillova forma na T^*M. Potom $d\lambda = dz_i \wedge dx^i$. Položme $\tau_\Gamma = h_\Gamma\, d\lambda$. Forma τ_Γ sa bude volať torziou konexie Γ na T^*M.

V súradniciach, nech $X = a^i\, \partial/\partial x^i + A_i\, \partial/\partial z_i$, $Y = b^i\, \partial/\partial x^i + B_i\, \partial/\partial z_i$. Potom $h_\Gamma X = a^i\, \partial/\partial x^i + a_{ij}a^j\, \partial/\partial z_i$, $h_\Gamma Y = b^i\, \partial/\partial x^i + a_{ij}b^j\, \partial/\partial z_i$ a $\tau_\Gamma(X, Y) = a_{ij}a^j b^i - a_{ij}b^j a^i = (a_{ij} - a_{ji})\, a^j b^i$, t. j.

$$\tau_\Gamma = -a_{ij}\, dx^i \otimes dx^j\,.$$

Hovoríme, že konexia Γ je bez torzie (alebo, že je symetrická) ak $\tau_\Gamma = 0$. Konexia Γ je symetrická práve vtedy, keď $a_{ij} = a_{ji}$.

Hovoríme, že konexia Γ^t na T^*M je transponovaná ku konexii Γ, ak pre ľubovoľné vektory $X, Y \in TT^*M$ platí

$$d\lambda(h_\Gamma X, h_{\Gamma^t} Y) = 0\,.$$

V súradniciach, nech Γ^t je daná rovnicou $dz_i = A_{ij}(x, z)\, dx^j$. Nech $h_\Gamma X = a^i\, \partial/\partial x^i + a_{ij}a^j\, \partial/\partial z_i$, $h_{\Gamma^t} Y = b^i\, \partial/\partial x^i + A_{ij}b^j\, \partial/\partial z_i$. Potom $d\lambda(h_\Gamma X, h_{\Gamma^t} Y) = a_{ij}a^j b^i - A_{ij}b^j a^i = (A_{ij} - a_{ji})\, a^i b^j$. Z toho plynie, že konexia Γ^t je transponovaná ku konexii Γ práve vtedy, keď $A_{ij} = a_{ji}$.

Z vyššie uvedeného okamžite vyplýva

Veta 2. *Konexia Γ na T^*M je symetrická práve vtedy, keď $\Gamma = \Gamma^t$.*

Keď γ je lineárna forma na M, potom absolútna derivácia lineárnej formy γ podľa konexie Γ je zobrazenie $\nabla^\Gamma\gamma$: $TM \to VT^*M$ dané predpisom

$$\nabla^\Gamma \gamma(X) = \nabla^\Gamma_X \gamma = v_\Gamma T \gamma(X) .$$

Použitím kanonickej identifikácie $IV_{\gamma(m)} T^*_m M \equiv T^*_m M$ máme

$$I\nabla^\Gamma \gamma \colon TM \to T^*M .$$

V súradniciach, ak forma γ je daná rovnicami

$$\gamma \colon \bar{x}^i = x^i$$

$$z_i = \gamma_i(x)$$

potom $I\nabla^\Gamma \gamma$ je dané rovnicami

$$I\nabla^\Gamma \gamma \colon \bar{x}^i = x^i$$

$$z_i = \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial x^j} - a_{ij}(x, z_i = \gamma_i) \right) y^j .$$

Zobrazenie $I\nabla^\Gamma \gamma$ je lineárny morfizmus $TM \to T^*M$ a bilineárnu formu na M určenú morfizmom $I\nabla^\Gamma \gamma$ budeme označovať ω_γ. Označme $A_{ij} = \partial \gamma_i / \partial x^j - a_{ij}(x, z_i = \gamma_i)$. Potom

$$\omega_\gamma = A_{ij} \, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j .$$

Veta 3. *Nech konexia Γ je symetrická. Potom forma ω_γ je symetrická práve vtedy, keď forma γ je zatvorená.*

Dôkaz. Keďže podľa predpokladu je $a_{ij} = a_{ji}$, preto $A_{ij} = A_{ji}$ práve vtedy keď $\partial \gamma_i / \partial x^j = \partial \gamma_j / \partial x^i$, t.j. práve vtedy, keď $\gamma_i \, \mathrm{d}x^i$ je zatvorená forma.

Literatúra

[1] *S. Helgason:* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. Mir, Moskva, 1973.

[2] *F. Husárik:* Некоторые симплектические структуры на касательном и кокасательном пространстве. Math. Slovaca *33*, 1983, No. 2. 189—198.

Adresa autora: 960 53 Zvolen, Štúrova 4 (Vysoká škola lesnícka a drevárska).