Adolf Karger

Lieovy grupy a kinematická geometrie v rovině

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 2, 186--200

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108572`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

LIEOVY GRUPY A KINEMATICKÁ GEOMETRIE V ROVINĚ

ADOLF KARGER, Praha

(Došlo dne 14. dubna 1967)

V předložené práci se studuje kinematická geometrie v euklidovské rovině, pseudoeuklidovské rovině, na sféře v prostoru E_3 a na sféře v prostoru E_3^1. Autor děkuje prof. URBANOVI za četné rady a připomínky k této práci.

I. OBECNÉ VLASTNOSTI AFINNÍHO POHYBU

1. DEFINICE AFINNÍHO POHYBU A KANONICKÁ FORMA

Buď G nekonečná souvislá Lieova grupa afinních transformací afinního prostoru A_n, jejíž Lieova algebra $\mathfrak{g}$ má triviální centrum. Každou grupu afinních transformací v A_n lze uvažovat jako lineární grupu matic typu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix},$$

kde a je sloupec typu n a b nesingulární matice typu $n \times n$. Budeme-li v dalším mluvit o grupě G, budeme mít na mysli právě tuto její representaci.

Je-li $\mathcal{R}$ repér v A_n a je-li $\bar{\mathcal{R}}$ jeho obraz při nějaké transformaci z G, pak existuje právě jeden prvek $g \in G$, že $\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R}g$. Násobení repérů a prvků z G definujeme formálně jako součin řádku $\mathcal{R} = (\mathrm{A}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ a matice g. Je-li $\mathrm{X} = \mathrm{A} + x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n$ bod z A_n, přiřaďme mu $(n + 1)$-tici čísel

$$X_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

lze tedy psát $\mathrm{X} = \mathcal{R}X_{\mathcal{R}}$, kde součin vpravo znamená součin řádku a sloupce. Je-li $\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R}g$ pro nějaké $g \in G$, jsou souřadnice transformovaného bodu $\bar{\mathrm{X}} = g\mathrm{X}$ v repéru $\bar{\mathcal{R}}$ stejné, jako souřadnice bodu X v repéru $\mathcal{R}$, a tedy $\bar{X}_{\bar{\mathcal{R}}} = X_{\mathcal{R}}$.

Platí tedy: $X = \mathscr{R}X_{\mathscr{R}}$, $\bar{X} = \mathscr{R}\bar{X}_{\mathscr{R}} = \bar{\mathscr{R}}\bar{X}_{\bar{\mathscr{R}}} = \bar{\mathscr{R}}X_{\mathscr{R}} = (\mathscr{R}g)X_{\mathscr{R}} = \mathscr{R}\,.\,gX_{\mathscr{R}}$, a tedy $\bar{X}_{\mathscr{R}} = gX_{\mathscr{R}}$. Je-li $\mathbf{v}$ vektor z A_n, přiřadíme mu v každém repéru sloupec $n + 1$ čísel

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix},$$

kde v^i jsou jeho souřadnice v tomto repéru. Vektory se při transformacích grupy G chovají podobně jako body. Grupa G působí tedy na repéry zprava a na souřadnice bodů a vektorů zleva. V dalším budeme stále předpokládat, že v A_n je pevně zvolený repér, index $\mathscr{R}$ u souřadnic budeme proto vynechávat.

Afinním pohybem nazveme jednoparametrickou soustavu afinních transformací z G. Taková soustava je (při pevně zvoleném repéru) popsána křivkou $g(t)$ z G. Budeme o ní předpokládat, že je třídy C^2 a že nemá singulární body. Ukažme ještě, jak se změní křivka $g(t)$, změní-li se repéry $\mathscr{R}$ a $\bar{\mathscr{R}}$. Nechť $\bar{\mathscr{R}} = \bar{\mathscr{R}}_1 g_1$, $\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 g_2$. Pak $\bar{\mathscr{R}}_1 g_1 = \mathscr{R}_1 g_2 g$, a tedy $\bar{\mathscr{R}}_1 = \mathscr{R}_1 g_2\, g(t)\, g_1^{-1}$. Křivka $g(t)$ tedy přejde v křivku $g_2\, g(t)\, g_1^{-1}$.

Kinematická geometrie afinního pohybu studuje jeho geometrické vlastnosti, tedy ty vlastnosti křivky $g(t)$, které nezávisí na parametrisaci křivky $g(t)$ ani na volbě repérů $\mathscr{R}$ a $\bar{\mathscr{R}}$, tj. na levých a pravých translacích v grupě G. Označme dále $\mathfrak{g}$ Lieovu algebru grupy G (interpretovanou jako tečný prostor v jednotce grupy), $\Omega, \bar{\Omega}$ její pravoinvariantní a levoinvariantní kanonickou formu.

Máme tedy

$$(1)\quad \Omega\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right)_{g(t)} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\,.\,g^{-1}(t)\,,\quad \bar{\Omega}\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right)_{g(t)} = g^{-1}(t)\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\,,\quad \Omega\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{ad}g(t)\,\bar{\Omega}\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right).$$

(Translace a jejich diferenciály značíme stejnými písmeny, neboť zde nemůže dojít k nedorozumění.) Při změně parametru na křivce $g(t)$ se hodnoty Ω i $\bar{\Omega}$ násobí týmž faktorem, při translacích na grupě G se změní takto:

$$\Omega\left(g_1\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\,g_2\right) = \mathrm{ad}g_1\Omega\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right),\quad \bar{\Omega}\left(g_1\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\,g_2\right) = \mathrm{ad}g_2^{-1}\,\bar{\Omega}\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right).$$

Označme $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\mathrm{ad}\mathbf{v})^2$ Killingovu kvadratickou formu na $\mathfrak{g}$. Tato forma je invariantní při zobrazeních z adjungované representace grupy G, tj. platí $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\mathrm{ad}g\,.\,\mathbf{v}, \mathrm{ad}g\,.\,\mathbf{v})$ pro všechna $g \in G$ a $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$. Zúžení forem $\Omega, \bar{\Omega}$ na křivku $g(t)$ značme dP, $\mathrm{d}\bar{\mathrm{P}}$. Předpokládejme, že pro náš pohyb je $(\mathrm{dP}, \mathrm{dP}) \neq 0$ na celém definičním intervalu. Pak je $\mathrm{dP} = a\,.\,\mathrm{d}t\,.\,\mathbf{R}$, $\mathrm{d}\bar{\mathrm{P}} = \bar{a}\,.\,\mathrm{d}t\,.\,\bar{\mathbf{R}}$ kde $\mathbf{R}, \bar{\mathbf{R}} \in \mathfrak{g}$ jsou voleny tak, aby byly jednotkové vzhledem ke Killingově kv. formě. Tento zápis je skutečně možný, protože forma dP je lineární diferenciální forma s vektorovými hodnotami, závislá na jednom parametru. Množinu vektorů $\mathbf{R}(t)$ a $\bar{\mathbf{R}}(t)$ nazveme pevným a hybným řídicím kuželem pohybu, vzhledem k tomu, že podle (1) je $(\mathrm{ad}g(t))\,\mathrm{d}\bar{P} = \mathrm{dP}$, je

$(\mathrm{ad}g\mathbf{R}, \mathrm{ad}g\mathbf{R}) = (\mathbf{R}, \mathbf{R})$ a $\bar{a} = a$. (Lze předpokládat $a > 0$.) Parametr φ, pro nějž je $a \,.\, \mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi$, nazveme kanonickým parametrem.

Platí tedy:

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}\varphi\mathbf{R}\,, \quad \mathrm{d}\bar{P} = \mathrm{d}\varphi\bar{\mathbf{R}}\,, \quad \bar{\mathbf{R}} = \mathrm{ad}(g^{-1})\,\mathbf{R}\,. \tag{2}$$

Je-li ψ jiný kanonický parametr, je zřejmě $\psi = \pm\varphi + c$, kde c je konstanta. V tomto smyslu je kanonický parametr invariantem pohybu.

Věta 1. *Nechť je dán kužel* $\mathbf{R}(t)$ *v* $\mathfrak{g}$, $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \pm 1$, $t \in [0, 1]$. *Pak existuje jediný pohyb* $g(t)$ *takový, že* $g(0) = e$, *jeho pevným řídicím kuželem je* $\mathbf{R}(t)$ *a parametr* t *je kanonický.*

Důkaz této věty je snadnou aplikací důkazu analogické věty z [2].

2. ADJUNGOVANÝ POHYB

Adjungovaná representace grupy G v $\mathfrak{g}$ přiřazuje každému pohybu $g(t)$ z G pohyb v $\mathfrak{g}$, totiž $\mathrm{ad}g(t)$. Tento pohyb je pro každé t automorfismem $\mathfrak{g}$, zachovávajícím invariantní kvadratické formy na $\mathfrak{g}$, speciálně tedy i Killingovu formu. Adjungovaný pohyb je tedy skutečně „pohybem". Vzhledem k předpokladu o centru $\mathfrak{g}$ je adjungovaná representace lokálním isomorfismem a je tedy možné studovat vlastnosti daného pohybu pomocí adjungovaného pohybu.

Lemma. *Budiž*

$$\mathbf{Y}(t) = \mathrm{ad}g(t)^{-1}\,\mathbf{X}(t), \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{g}\,. \quad \text{Pak} \quad \mathbf{Y}' = \mathrm{ad}g(t)^{-1}\,.\,\mathbf{X}' + \mathrm{ad}g(t)^{-1}[\mathbf{X}, g'g^{-1}]\,.$$

Věta 2. *Kužele* $\mathrm{ad}g(t_0)\,\bar{\mathbf{R}}(t)$ a $\mathbf{R}(t)$ *mají v bodě* t_0 *styk alespoň prvého řádu.*

Důkaz.

$$\{\mathrm{ad}g(t_0)\,\bar{\mathbf{R}}(t)\}_{t_0} = \mathbf{R}(t_0)\,,$$
$$\{\mathrm{ad}g(t_0)\,\bar{\mathbf{R}}(t)\}'_{t_0} = \mathrm{ad}g(t_0)\,\{\mathrm{ad}g^{-1}(t)\,\mathbf{R}'(t)\}_{t_0} + \{\mathrm{ad}g^{-1}(t)\,[\mathbf{R}, \mathbf{R}]\}_{t_0} = \mathbf{R}'_{t_0}\,,$$
$$\{\mathrm{ad}g(t_0)\,\bar{\mathbf{R}}(t)\}''_{t_0} = \mathbf{R}''(t_0) + \left\{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,[\mathbf{R}', \mathbf{R}]\right\}_{t_0}\,.$$

Při adjungovaném pohybu se tedy hybný řídicí kužel „odvaluje" po pevném řídicím kuželi.

3. TRAJEKTORIE A OKAMŽITÝ POHYB

Buď $\mathbf{R} \in \mathfrak{g}$ libovolný pevný vektor. Vektoru $\mathbf{R}$ lze přiřadit vektorové pole $\boldsymbol{R}_i$ na A_n takto: $(\boldsymbol{R}_i)_{\mathrm{X}} = \{(\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau)\,(\exp(\tau\mathbf{R}))\,\mathrm{X}\}_0$ pro všechny body X z A_n.

Věta 3. $(\boldsymbol{R}_i)_X = \mathbf{R}X$.

Důkaz. Nechť $g(\tau) = \exp(\tau\mathbf{R})$ a tedy $(g'(\tau))_0 = \mathbf{R}$. Trajektorie bodu X v jednoparametrické podgrupě $g(\tau)$ je $X(\tau) = g(\tau)\, X$ a její tečný vektor pro $\tau = 0$ je $X'(0) = g'(0)\, X = \mathbf{R}X$, neboť $g(0) = e$.

Věta 4. *Buď dán pohyb $g(t)$ jako funkce kanonického parametru. Pak tečné vektory trajektorií všech bodů tvoří pro každé t_0 vektorové pole $\boldsymbol{R}(t_0)_i$ indukované vektorem $\mathbf{R}(t_0)$ na A_n.*

Důkaz. $g(t)$ A je trajektorie bodu A, vektor tečny trajektorie v bodě $g(t_0)$ A je

$$\boldsymbol{T}_{g(t_0)A} = (g(t)\, A)'_{g(t_0)A} = (g'A)_{gA} = (g'g^{-1}gA)_{gA} = (g'g^{-1}B)_B = (\mathbf{R}B)_B = (\boldsymbol{R}_i)_{g(t_0)A}\,.$$

Definice. 1-parametrickou podgrupu $\exp(\tau\, \mathbf{R}(t_0))$ nazývejme okamžitým pohybem v t_0 pohybu $g(t)$.

Tvrzení. a) $\exp(\tau\overline{\mathbf{R}}(t_0)) = g(t_0)\exp(\tau\mathbf{R}(t_0))\, g(t_0)^{-1}$.

b) *Daný pohyb a okamžitý pohyb mají pro každé t_0 společné tečny trajektorií.*

Důkaz tvrzení a) plyne z definice $\mathbf{R}$ a adjungované representace,

b) z vět 3 a 4. Z tvrzení plyne, že vlastnosti 1. řádu daného pohybu lze vyšetřovat pomocí okamžitých pohybů.

Definice. Buďte $\boldsymbol{R}_i(t)$ vektorová pole indukovaná pohybem $g(t)$ v A_n. Množinu bodů (závislou na parametru t), v nichž je některé z těchto polí nulové, nazveme pevnou polodií. Analogicky definujeme hybnou polodii. Je tedy pevná polodie řešením rovnice

$$\mathbf{R}X = 0 \tag{3}$$

a hybná polodie je řešením rovnice $\overline{\mathbf{R}}X = 0$, pokud tato řešení existují.

Definice. Buď $g(t)$ pohyb. Pohyb daný křivkou $g(t)^{-1}$ nazývejme vratným pohybem daného pohybu. Pevný řídicí kužel vratného pohybu označme S, hybný označme $\overline{\mathrm{S}}$. Pak platí

Věta 5. $\mathbf{R} + \overline{\mathbf{S}} = \overline{\mathbf{R}} + \mathbf{S} = 0$.

Důkaz. Zvolme kanonický parametr – to lze, neboť řídicí kužel nezávisí na změně parametru. Pak $\mathbf{R} = g'g^{-1}$, $\overline{\mathrm{S}} = (g^{-1})^{-1}(g^{-1})' = g\,.\,(g^{-1})' = -g'g^{-1}$ a podobně pro druhou rovnost.

Důsledek. *Pevná polodie vratného pohybu je hybnou polodií původního pohybu a podobně pro druhou polodii. Uveďme ještě následující vztahy, potřebné v dalším:*

$$\bar{\mathbf{R}}(t) = \operatorname{ad} g^{-1}(t)\,\mathbf{R}(t)\,,$$

$$\bar{\mathbf{R}}'(t) = \operatorname{ad} g^{-1}\mathbf{R}'(t)\,, \quad \bar{\mathbf{R}}''(t) = -[\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}'] + \operatorname{ad} g^{-1}(t)\,\mathbf{R}''(t)\,. \tag{4}$$

4. TRAJEKTORIE A POLODIE ADJUNGOVANÉHO POHYBU

Je-li $g(t)$ pohyb z G, pak trajektorie vektoru $\mathbf{X} \in \mathfrak{g}$ při adjungovaném pohybu je $\mathbf{X}(t) = \operatorname{ad} g(t)\,\mathbf{X} = g(t)\,\mathbf{X} g\,(t)^{-1}$, kde součin vpravo je míněn jako součin matic.

Lemma. *Tečný vektor trajektorie v bodě* $\mathbf{X}(t_0)$ *je*

$$[\mathbf{R}(t_0), \mathbf{X}(t_0)]\,. \tag{5}$$

D ů k a z.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g\mathbf{X}g^{-1})_{t_0} = \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\,.\,\mathbf{X}g^{-1}\right)_{t_0} + \left(g\mathbf{X}\,.\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,g^{-1}\right)_{t_0} = \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\,g^{-1}\,.\,g\mathbf{X}g^{-1}\right)_{t_0} +$$

$$+ \left(g\mathbf{X}g^{-1}\,.\left(-\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\,g^{-1}\right)\right)_{t_0} = \mathbf{R}(t_0)\,\mathbf{X}(t_0) - \mathbf{X}(t_0)\,\mathbf{R}(t_0) = [\mathbf{R}(t_0), \mathbf{X}(t_0)]\,.$$

Důsledek. Polodie adjungovaného pohybu jsou dány rovnicemi

$$[\mathbf{R}, \mathbf{X}] = 0 \quad \text{a} \quad [\bar{\mathbf{R}}, \mathbf{X}] = 0\,. \tag{6}$$

Věta 6. *Adjungovaný pohyb má netriviální polodie.*

Věta je jednoduchým důsledkem lemmatu.

II. KINEMATICKÁ GEOMETRIE ROVINY A SFÉRY

1. FRENETOVY FORMULE PRO ŘÍDICÍ KUŽEL V ALGEBRÁCH DIMENSE 3 HODNOSTI 1

Lieovy algebry dimense 3 hodnosti 1 jsou dvou typů:

1. typ: Lze vybrat basi $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ tak, aby platilo

$$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = 0\,, \quad [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3] = \alpha\mathbf{X}_1 + \beta\mathbf{X}_2\,, \quad [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = \gamma\mathbf{X}_1 + \delta\mathbf{X}_2\,,$$

kde $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$, a matice $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ má přitom jeden z těchto reálných Jordanových tvarů

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha_1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & \beta_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ -\beta_1 & \alpha_1\end{pmatrix}.$$

Pro vektor $\mathbf{X} = a_1\mathbf{X}_1 + a_2\mathbf{X}_2 + a_3\mathbf{X}_3$ z $\mathfrak{g}$ platí pak $(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = a_3^2$. Na podalgebře generované vektory $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_2$ je tedy Killingova forma degenerovaná. Chceme-li sestrojit Frenetův repér řídicího kužele obvyklým způsobem, je k tomu zapotřebí, aby existovala invariantní kvadratická forma na celé algebře. Zjistěme, pro které z našich algeber taková forma existuje. Vzhledem k tomu, že na prostoru generovaném vektorem $\mathbf{X}_3$ takovou formu už máme, lze předpokládat, že hledaná forma je tvaru

$$\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\} = a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1a_2 + a_{22}a_2^2 .$$

Je-li tato forma invariantní, musí být

$$\{\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{X}_3]\} + \{[\mathbf{X}, \mathbf{X}_3], \mathbf{Y}\} = 0 .$$

(Kvadratická forma a jí příslušná symetrická bilineární forma jsou stejně označeny.) Snadno se zjistí, že tato soustava má netriviální řešení pouze pro algebry, v nichž je $\alpha + \delta = 0$. To nastává pouze pro tyto Jordanovy tvary matice

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha_1\end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad \alpha_1 = -1 ;$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad \alpha = 0 , \quad \beta = 1 .$$

Přicházejí tedy v úvahu pouze tyto dvě algebry

a) $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = 0,\ [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3] = \mathbf{X}_1,\ [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = -\mathbf{X}_2,\ \{\mathbf{X}, \mathbf{X}\} = a_1a_2,$

b) $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = 0,\ [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3] = \mathbf{X}_2,\ [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = -\mathbf{X}_1,\ \{\mathbf{X}, \mathbf{X}\} = a_1^2 + a_2^2.$

2. typ: U tohoto typu lze vybrat basi tak, aby bylo

a) $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{X}_3,\ [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = \mathbf{X}_1,\ [\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_1] = \mathbf{X}_2,\ (\mathbf{X}, \mathbf{X}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$

b) $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{X}_3,\ [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = \mathbf{X}_1,\ [\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_1] = -\mathbf{X}_2,\ (\mathbf{X}, \mathbf{X}) = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2.$

Tyto čtyři algebry jsou algebrami následujících Lieových grup (zaveďme pro ně nové označení):

E^0: typ 1a: grupa euklidovských shodností v rovině,

E^1: typ 1b: grupa pseudoeuklidovských shodností v rovině,

S^0: typ 2a: grupa sférických transformací v E_3,

S^1: typ 2b: grupa ekvicentroafinních transformací v rovině.

V dalším se budeme zabývat jen těmito grupami a jejich algebrami. Označme $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ součin $([\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2], \mathbf{X}_3)$. Pak platí

Lemma.

$$(\mathbf{X}_{i_1}, \mathbf{X}_{i_2}, \mathbf{X}_{i_3}) = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} . (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3).$$

$(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = 0$, jsou-li vektory $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ lineárně závislé.

$(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ je invariantní při adjungovaném zobrazení.

Lemma je snadným důsledkem invariantnosti Killingovy formy. Stejná věta platí i pro formu $\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\}$ v E^0 a E^1.

Předpokládejme nyní, že v některé z našich algeber je dán kužel $\mathbf{P}(t)$, tj. jednoparametrická soustava vektorů, který nemusí nutně být řídicím kuželem nějakého pohybu, a nechť $(\mathbf{P}, \mathbf{P}) \neq 0$.

Zvolme $\mathbf{R}(t) = \lambda(t)\, \mathbf{P}(t)$ tak, aby $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \varepsilon_0$, kde $\varepsilon_0 = \pm 1$ a předpokládejme, že všude je $\mathbf{R}' \neq 0$; dále zvolme $\varkappa_1 > 0$ tak, aby platilo $\mathbf{R}'(t) = \varkappa_1 \mathbf{T}$, a $(\mathbf{T}, \mathbf{T}) = \pm 1$ pro $(\mathbf{R}', \mathbf{R}') \neq 0$ a $\{\mathbf{T}, \mathbf{T}\} = \pm 1$ pro $(\mathbf{R}', \mathbf{R}') = 0$.

Pišme $\mathbf{N} = [\mathbf{R}, \mathbf{T}]$. Násobíme-li Killingovu formu resp. formu $\{,\}$ vhodným faktorem úměrnosti, lze ještě dosáhnout toho, aby $(\mathbf{N}, \mathbf{N})$ resp. $\{\mathbf{N}, \mathbf{N}\} = \pm 1$. Snadno se zjistí, že při naší volbě Killingovy formy i formy $\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\}$ je tento požadavek splněn.

Zaveďme označení: $(\mathbf{T}, \mathbf{T}) = \varepsilon_1$, $(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = \varepsilon_4$,

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \quad \text{pro} \quad \varepsilon_1 \neq 0\,, \qquad && \varepsilon_3 = \varepsilon_4 \quad \text{pro} \quad \varepsilon_1 \neq 0\,, \\
&\varepsilon_2 = \{\mathbf{T}, \mathbf{T}\} \quad \text{pro} \quad \varepsilon_1 = 0\,, && \varepsilon_3 = \{\mathbf{N}, \mathbf{N}\} \quad \text{pro} \quad \varepsilon_1 = 0\,.
\end{aligned} \tag{7}$$

Věta 7. *Za uvedených předpokladů a označení platí Frenetovy formule*:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}' &= \varkappa_1 \mathbf{T}\,, & [\mathbf{R}, \mathbf{T}] &= \mathbf{N}\,, \\
\mathbf{T}' &= -\varkappa_1 \varepsilon_0 \varepsilon_1 \mathbf{R} + \varkappa_2 \mathbf{N}\,, & [\mathbf{T}, \mathbf{N}] &= \varepsilon_4 \varepsilon_0 \mathbf{R}\,, \\
\mathbf{N}' &= -\varkappa_2 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \mathbf{T}\,. & [\mathbf{R}, \mathbf{N}] &= -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \mathbf{T}\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Důkaz. Předně je $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \text{konst}$, $\{\mathbf{R}, \mathbf{R}\} = \text{konst}$ atd. Z toho plyne, že $\mathbf{R}'$ má složku do $\mathbf{R}$ nulovou a podobně pro ostatní. Dále je $(\mathbf{R}, \mathbf{T}) = (\mathbf{T}, \mathbf{N}) = (\mathbf{N}, \mathbf{R}) = \{\mathbf{R}, \mathbf{T}\} = \ldots = 0$. Z toho plyne $(\mathbf{R}', \mathbf{T}) + (\mathbf{R}, \mathbf{T}') = \varkappa_1(\mathbf{T}, \mathbf{T}) + (\mathbf{R}, \alpha\mathbf{R} + \gamma\mathbf{N}) = \varkappa_1\varepsilon_1 + \alpha\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_0 \neq 0$, a tedy $\alpha = -\varepsilon_0\varepsilon_1\varkappa_1$; γ označíme $\varkappa_2$. Dále $(\mathbf{N}', \mathbf{R}) + (\mathbf{R}', \mathbf{N}) = \varkappa_1(\mathbf{T}, \mathbf{N}) + (\alpha\mathbf{R} + \beta\mathbf{T}, \mathbf{R}) = \alpha\varepsilon_0 = 0$, a tedy $\alpha = 0$. $(\mathbf{T}', \mathbf{N}) + (\mathbf{T}, \mathbf{N}') = \varkappa_2(\mathbf{N}, \mathbf{N}) + \beta(\mathbf{T}, \mathbf{T}) = 0$. Rozlišme nyní oba případy:

i) $(\mathbf{T}, \mathbf{T}) \neq 0$, a tedy $\beta = -\varkappa_2\varepsilon_1\varepsilon_4 = -\varkappa_2\varepsilon_2\varepsilon_3$,

ii) $(\mathbf{T}, \mathbf{T}) = 0$, a tedy $\beta = -\varkappa_2\varepsilon_2\varepsilon_3$, uvážíme-li druhou formu.

Zbývají formule pro násobení:

$(\mathbf{R}, [\mathbf{T}, \mathbf{N}]) = ([\mathbf{R}, \mathbf{T}], \mathbf{N}) = (\mathbf{N}, \mathbf{N}) = \varepsilon_4$. Je-li $[\mathbf{T}, \mathbf{N}] = \alpha\mathbf{R} + \beta\mathbf{T} + \gamma\mathbf{N}$, je $\beta = 0$, $\gamma = 0$ a $\alpha\varepsilon_0 = \varepsilon_4$, tj. $\alpha = \varepsilon_0\varepsilon_4$ a podobně pro ostatní: je-li $[\mathbf{R}, \mathbf{N}] = \beta\mathbf{T}$, pak $(\mathbf{T}, [\mathbf{R}, \mathbf{N}]) = \beta(\mathbf{T}, \mathbf{T}) = \beta\varepsilon_1$ resp. $\{\mathbf{T}, [\mathbf{R}, \mathbf{N}]\} = \beta\{\mathbf{T}, \mathbf{T}\}$. Dále je $(\mathbf{T}, [\mathbf{R}, \mathbf{N}]) = ([\mathbf{T}, \mathbf{R}], \mathbf{N}) = -\varepsilon_4$ resp. $\{\mathbf{T}, [\mathbf{R}, \mathbf{N}]\} = \{\mathbf{N}, \mathbf{N}\}$. V obou případech je $-\varepsilon_3 = \beta\varepsilon_2$, tj. $\beta = -\varepsilon_2\varepsilon_3$. Tím je věta dokázána.

Parametr s, v němž je $\varkappa_1 = 1$, nazveme obloukem křivky $\mathbf{R}(t)$; výraz $\varkappa_2\varepsilon_2\varepsilon_3/\varkappa_1$, který nezávisí na parametrisaci, nazveme křivostí k křivky $\mathbf{R}(t)$ v g.

Věta 8. *Křivost k křivky $\mathbf{R}(t)$ je dána vztahem*

$$k = \frac{(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{R}'')\,\varepsilon_2}{\{\varepsilon_2(\mathbf{R}', \mathbf{R}')\}^{3/2}}\,. \tag{9}$$

Důkaz. $\mathbf{R}' = \varkappa_1 T$, $[\mathbf{R}, \mathbf{R}'] = \varkappa_1\mathbf{N}$,

$$\mathbf{R}'' = \varkappa_1'\mathbf{T} - \varkappa_1^2\varepsilon_0\varepsilon_1\,.\,\mathbf{R} + \varkappa_1\varkappa_2\,.\,\mathbf{N}\,, \quad (\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{R}'') = \varkappa_1^2\varkappa_2\varepsilon_3\,,$$
$$(\mathbf{R}', \mathbf{R}') = \varkappa_1^2\varepsilon_2 \quad \text{a} \quad \varkappa_1 = [\varepsilon_2(\mathbf{R}', \mathbf{R}')]^{1/2}\,.$$

Je tedy

$$k = \frac{\varkappa_1^2\varkappa_2\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varkappa_1^3} = \frac{(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{R}'')\,\varepsilon_2}{\{\varepsilon_2(\mathbf{R}', \mathbf{R}')\}^{3/2}}\,.$$

Chceme-li získat Frenetovy formule pro pohyb, je třeba k odvozeným vztahům přidat ještě rovnici (2). Platí tedy celkem

Věta 9. *Buď $g(t)$ pohyb v některé z grup E^i nebo S^i $(i = 0, 1)$ třídy C^4 bez singulárních bodů $((\mathbf{R}, \mathbf{R}) \neq 0,\ \mathbf{R}' \neq 0)$. Pak platí*

$$\mathrm{d}\mathbf{P} = \mathrm{d}\varphi\mathbf{R}\,, \qquad \mathrm{d}\mathbf{T} = -\varkappa_1\,\mathrm{d}\varphi\varepsilon_0\varepsilon_1\mathbf{R} + \varkappa_2\,\mathrm{d}\varphi\mathbf{N}\,,$$
$$\mathrm{d}\mathbf{R} = \mathrm{d}\varphi\varkappa_1\mathbf{T}\,, \quad \mathrm{d}\mathbf{N} = -\varkappa_2\,\mathrm{d}\varphi\varepsilon_2\varepsilon_3\mathbf{N}\,.$$

Definice. Invarianty $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ nazvěme 1. a 2. křivostí pohybu.

Najděme souvislost mezi invarianty polodií a invarianty řídicího kužele pro pohyb v grupách E^i. Je-li $\mathbf{R}(t)$ řídicí kužel nějakého pohybu z této grupy, je $\mathbf{R}\mathbf{X} = 0$ rovnice pevné polodie. Označme $\boldsymbol{x}(t)$ křivku, která je řešením této rovnice. Pak je $\mathbf{R}(t)\,\boldsymbol{x}(t) = 0$. Z toho plyne $\mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}\boldsymbol{x}' = 0$, a tedy $\mathbf{R}\mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}^2\boldsymbol{x}' = 0$. V E^i platí $\mathbf{R}^2\boldsymbol{v} = -\varepsilon_2\varepsilon_3\boldsymbol{v}$ pro každý vektor v rovině. Je tedy $\varepsilon_2\varepsilon_3\boldsymbol{x}' = \mathbf{R}\mathbf{R}'\boldsymbol{x}$, tj. $\boldsymbol{x}' = \varepsilon_2\varepsilon_3\mathbf{R}\mathbf{R}'\boldsymbol{x} = \varkappa_1\varepsilon_2\varepsilon_3(\mathbf{T}\mathbf{R} + \mathbf{N})\,\boldsymbol{x} = \varkappa_1\varepsilon_2\varepsilon_3\mathbf{N}\boldsymbol{x}$; jednotkový tečný vektor pak je roven $\boldsymbol{t} = \varepsilon_2\varepsilon_3\mathbf{N}\boldsymbol{x}$, $\varkappa_1 = \mathrm{d}s/\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}s = \mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}\varphi\,.\,\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}s = (1/\varkappa_1)\,k\,.\,\boldsymbol{n} = (\varepsilon_2\varepsilon_3)/\varkappa_1\,.\,(\mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi)\,(\mathbf{N}\boldsymbol{x}) = (\varepsilon_2\varepsilon_3)/\varkappa_1\,(\mathbf{N}'\boldsymbol{x} + \mathbf{N}\boldsymbol{x}') = (1/\varkappa_1)\,(\varkappa_2\mathbf{T}\boldsymbol{x} + \varepsilon_2\varepsilon_3\varkappa_1\mathbf{N}\mathbf{T}\boldsymbol{x}) = -(1/\varkappa_1)\,\varkappa_2\mathbf{T}\boldsymbol{x}$. Srovnáním dostaneme, že křivost k polodie je rovna $k = \varkappa_2/\varkappa_1$ a normálový vektor $\boldsymbol{n}$ je $\boldsymbol{n} = -\mathbf{T}\boldsymbol{x}$. Stejné vztahy platí pro hybnou polodii a hybný řídicí kužel.

2. VZTAHY MEZI INVARIANTY ŘÍDICÍCH KUŽELŮ

Buďte $\mathbf{R}(t)$ a $\overline{\mathbf{R}}(t)$ řídicí kužele nějakého pohybu $g(t)$, $\varkappa_1, \varkappa_2, \bar{\varkappa}_1, \bar{\varkappa}_2$ jejich invarianty. Pak je $\overline{\mathbf{R}}'(t) = \bar{\varkappa}_1 \overline{\mathbf{T}}(t)$, $\mathbf{R}' = \varkappa_1 \mathbf{T}$, $\overline{\mathbf{R}}' = \operatorname{ad} g^{-1} \mathbf{R}'$; z toho plyne $\bar{\varkappa}_1 \overline{\mathbf{T}} = \operatorname{ad} g^{-1} \mathbf{R}' = \operatorname{ad} g^{-1} \varkappa_1 \mathbf{T} = \varkappa_1 \operatorname{ad} g^{-1} \mathbf{T}$. Jelikož $(\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{T}}) = (\operatorname{ad} g^{-1} \mathbf{T}, \operatorname{ad} g^{-1} \mathbf{T}) = (\mathbf{T}, \mathbf{T})$, je $\overline{\mathbf{T}} = \operatorname{ad} g^{-1} \mathbf{T}$, $\bar{\varkappa}_1 = \varkappa_1$. $\overline{\mathbf{T}}' = \operatorname{ad} g^{-1} \mathbf{T}' + [\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{R}}]$; podle (4), dosadíme-li z (8)

$$-\varepsilon \bar{\varkappa}_1 \overline{\mathbf{R}} + \bar{\varkappa}_2 \overline{\mathbf{N}} = \operatorname{ad} g^{-1} (\varepsilon \varkappa_1 \mathbf{R} + \varkappa_2 \mathbf{N}) + [\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{R}}] = \varepsilon \varkappa_1 \overline{\mathbf{R}} + \varkappa_2 \operatorname{ad} g^{-1} \mathbf{N} - \overline{\mathbf{N}}\,.$$

Protože je $(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{N}}) = (\mathbf{N}, \mathbf{N})$, je $\bar{\varkappa}_2 = \varkappa_2 - 1$.

Věta 10. *Pro invarianty obou řídicích kuželů platí vztahy*

$$\bar{\varkappa}_1 = \varkappa_1\,, \quad \varkappa_2 - \bar{\varkappa}_2 = 1\,. \tag{10}$$

Přímým důsledkem této věty je

Věta 11. *Adjungovaný pohyb vzniká odvalováním řídicích kuželů a při daných* $\mathbf{R}(0)$ *a* $\overline{\mathbf{R}}(0)$ *je jimi určen.*

V grupách E^0 a E^1 platí též věta pro pevnou a hybnou polodii, vzhledem ke vztahům, které platí mezi invarianty řídicích kuželů a polodií v těchto grupách.

3. KŘIVOST TRAJEKTORIE V KINEMATICE E^0 A E^1

Buď tedy E^0 grupa euklidovských shodností a E^1 grupa pseudoeuklidovských přímých shodností v rovině. V E^i zvolme basi

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

kde $\varepsilon = -1$ pro $i = 0$ a $\varepsilon = +1$ pro $i = 1$. Pak je $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = 0$, $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3] = -\varepsilon \mathbf{X}_2$, $[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = -\mathbf{X}_1$. Při $\mathbf{X} = \sum a_k \mathbf{X}_k \in E^i$ je $(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = a_3^2$, $\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\} = a_1^2 - \varepsilon a_2^2$.

Nechť nyní $g(t)$ je pohyb z E^i třídy C^4 bez singulárních bodů ($(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \neq 0$, $\mathbf{R}' \neq 0$). Kanonický parameter je úhel otočení. Pišme $\mathbf{R}(t) = a\mathbf{X}_1 + b\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3$, to znamená, že předpokládáme, že kanonický parametr je vybrán tak, že třetí složka vektoru $\mathbf{R}$ je kladná. Označme $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ bod v rovině a $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\}$ formu, kterou forma $\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\}$ zřejmým způsobem indukuje v rovině, $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ pak značme antisymetrický součin vektorů v rovině, $\varepsilon' = \operatorname{sgn} \{\mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\}$.

Tečný vektor $\boldsymbol{x}'$ trajektorie $\boldsymbol{x}(t) = g(t)\, \boldsymbol{x}$ bodu $\boldsymbol{x}$ v bodě $\boldsymbol{x}(t)$ je roven $\boldsymbol{x}'(t) = \mathbf{R}(t)\, \boldsymbol{x}(t)$; pak je dále $\boldsymbol{x}'' = \mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}\boldsymbol{x}' = \mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}^2\boldsymbol{x}$ a pro oblouk s trajektorie je $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = (\varepsilon'\{\mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\})^{1/2}$. Křivost k_x trajektorie v bodě $\boldsymbol{x}$ je pak dána tímto vztahem

$$k_x = \frac{\langle \boldsymbol{x}'', \boldsymbol{x}' \rangle}{\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^{3/2}} = \frac{\langle \mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}^2\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x} \rangle}{(\varepsilon'\{\mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\})^{3/2}} . \tag{11}$$

Vektor $-\varepsilon\mathbf{R}^2\boldsymbol{x}$ má směr kladné normály trajektorie a jeho velikost je $(\varepsilon'\{\mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\})^{1/2}$. Střed oskulační „kružnice“ S_x (v případě E^0 je to skutečně kružnice, v případě E^1 je to pseudoeuklidovská kružnice, tj. rovnoosá hyperbola resp. dvě sdružené rovnoosé hyperboly) trajektorie v bodě $\boldsymbol{x}$ je dána vztahem:

$$\mathrm{S}_x = \boldsymbol{x} + (k_x)^{-1} \,.\, \boldsymbol{n}_x = \boldsymbol{x} - \frac{\varepsilon(\varepsilon'\{\mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\})^{3/2}}{\langle \mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}^2\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x} \rangle} \cdot \frac{1}{(\varepsilon'\{\mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\})^{1/2}} \mathbf{R}^2\boldsymbol{x} =$$

$$= \boldsymbol{x} - \frac{\{\mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\}}{\langle \mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}^2\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x} \rangle} \varepsilon'\varepsilon\mathbf{R}^2\boldsymbol{x} .$$

Rozlišme nyní oba případy:

a) E^0: Zaveďme polární souřadnice vztahy $x_1 = b + \varrho \cos \vartheta$, $x_2 = -a + \varrho \sin \vartheta$ kde $\varrho \in (-\infty, +\infty)$, $\varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Pak

$$\mathbf{R}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varrho \sin \vartheta \\ -\varrho \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}'\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ a' \\ b' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^2\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varrho \cos \vartheta \\ -\varrho \sin \vartheta \end{pmatrix};$$

$$\frac{\{\mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\}}{\langle \mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}^2\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x} \rangle} = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - \varrho(a' \cos \vartheta + b' \sin \vartheta)} = \frac{\varrho}{\varrho - (a' \cos \vartheta + b' \sin \vartheta)} =$$

$$= \frac{\varrho}{\varrho + \varkappa_1 \cos \varphi} ;$$

$$a' \cos \vartheta + b' \sin \vartheta = \sqrt{\{(a')^2 + (b')^2\}} \left(\frac{a'}{\sqrt{\{(a')^2 + (b')^2\}}} \cos \vartheta + \right.$$

$$\left. + \frac{b'}{\sqrt{\{(a')^2 + (b')^2\}}} \sin \vartheta \right) = -\varkappa_1 \cos \varphi ,$$

kde φ je úhel mezi normálou polodie a pólovou přímkou. Množina inflexních bodů trajektorií je dána rovnicí $\varrho + \varkappa_1 \cos \varphi = 0$, což skutečně je rovnice inflexní kružnice. Tím je rovněž nalezen geometrický význam 1. křivosti pohybu: $-\varkappa_1$ je průměr inflexní kružnice, $\varkappa_1$ je průměr kružnice vratu (i s orientací). Napišme nyní rovnice příbuznosti mezi body a jejich středy křivosti: Má-li bod $\boldsymbol{x}$ souřadnice (ϱ, ϑ) a S_x souřadnice (ϱ', ϑ'), je

$$\vartheta = \vartheta' , \quad \varrho' = \varrho - \frac{\varrho^2}{\varrho + d} = \frac{\varrho^2 + \varrho d - \varrho^2}{\varrho + d}$$

(kde píšeme $d = \varkappa_1 \cos \varphi$), a tedy $\varrho\varrho' = d(\varrho - \varrho')$.

Při tom φ je úhel kladné jednotkové normály s jednotkovým vektorem pólové přímky, orientovaným ve smyslu rostoucího kanonického parametru. Tečna polodie je orientována ve smyslu rostoucího kanonického parametru, normála tak, že $(\mathbf{t}_x, \mathbf{n}_x)$ tvoří pravotočivý repér. Za těchto předpokladů platí $(1/r) - (1/\bar{r}) = (1/2r_0)$, jsou-li $r, \bar{r}, r_0$ orientované poloměry křivosti pevné a hybné polodie a kružnice vratu.

b) E^1: Zaveďme nejprve polární souřadnice vztahy

$$x_1 = -b + \varrho \operatorname{ch} \vartheta\,, \quad x_2 = -a + \varrho \operatorname{sh} \vartheta\,.$$

Analogicky jako v prvém případě dostaneme

$$\frac{\{\mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\}}{\langle \mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}^2\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\rangle} = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 + \varrho(+a' \operatorname{ch} \vartheta - b' \operatorname{sh} \vartheta)} = \frac{\varrho}{\varrho - \varkappa_1 \operatorname{ch} \varphi}\,,$$

kde φ je pseudoeuklidovský úhel mezi normálou a pólovou přímkou. Příbuznost má tuto rovnici (značíme-li opět ϱ, ϑ souř. bodu $\boldsymbol{x}$ a ϱ', ϑ' souř. bodu S_x)

$$\varrho\varrho' = -d(\varrho - \varrho')\,, \quad d = \varkappa_1 \operatorname{ch} \varphi\,.$$

Pro isotropické směry je $S_x = \boldsymbol{x}$, pro část roviny danou polárními souřadnicemi $x_1 = -b + \varrho \operatorname{sh} \vartheta$, $x_2 = -a + \varrho \operatorname{ch} \vartheta$ je

$$\varrho\varrho' = d(\varrho - \varrho')\,, \quad d = \varkappa_1 \operatorname{sh} \varphi\,.$$

Množina inflexních bodů je dána rovnicí $\varrho - \varkappa_1 \operatorname{ch} \varphi = 0$, což je pseudoeuklidovská kružnice s průměrem $\varkappa_1$, tj. rovnoosá hyperbola s osami délky $\varkappa_1$, můžeme ji tedy považovat za kružnici „obratu". Podobně se definuje i kružnice „vratu". Mají stejné vlastnosti, jako kružnice vratu a obratu v případě grupy E^0.

4. KINEMATIKA GRUPY S^0

$\boldsymbol{S}^0$ je algebra matic tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

pišme $\mathbf{X} = a_1\mathbf{X}_1 + a_2\mathbf{X}_2 + a_3\mathbf{X}_3$. $(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 4.\ \sum(a_i)^2$, $\frac{1}{2}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, je-li $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ obvyklý vektorový součin. Ztotožníme-li centroeuklidovský prostor, ve kterém se děje pohyb, s algebrou $\boldsymbol{S}^0$ tak, že ztotožníme base těchto prostorů, je $\mathbf{R}\mathbf{X} = \frac{1}{2}[\mathbf{R}, \mathbf{X}]$. Z toho plyne, že struktura sférického pohybu je táž jako struktura pohybu k němu adjungovaného. Budeme se tedy zabývat pouze adjungovaným pohybem, což učiníme v dalším. Právě uvedené skutečnosti se využívá při studiu sférické kinematiky pomocí kvaternionů (viz [4]). Označíme-li K multiplikativní grupu jednotkových kvaternionů, je K lokálně isomorfní s S^0. Lokální isomorfismus mezi nimi je dán např. takto: je-li g otočení kolem osy s jedn. vektorem $\boldsymbol{n}_0$ o úhel φ, přiřaďme mu kvaternion $\cos\varphi + \boldsymbol{n}_0 \sin\varphi$. Lieova algebra $\boldsymbol{K}$ grupy K je tvořena algebrou ryze imaginárních kvaternionů, jejíž algebraická struktura je dána obvyklým násobením kvaternionů (a je ovšem isomorfní s $\boldsymbol{S}^0$). Adjungovaná representace grupy K v algebře $\boldsymbol{K}$ je dána takto:

Je-li $k \in K$, $\mathbf{X} \in \boldsymbol{K}$, a je-li $\tilde{k} = k^{-1}$ sdružený kvaternion ke k, je $(\mathrm{ad}k)\,\mathbf{X} = k\mathbf{X}\tilde{k}$. Tím je dán lokální isomorfismus i mezi S^0 a $\mathrm{ad}K$.

5. KINEMATIKA EKVICENTROAFINNÍ GRUPY S^1

Nechť S^1 je grupa ekvicentroafinních transformací v rovině, tedy grupa matic typu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_1 & g_2 \\ 0 & g_3 & g_4 \end{pmatrix},$$

pišme krátce

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix},$$

kde $g_1 g_4 - g_2 g_3 = 1$. $\boldsymbol{S}^1$ je algebra matic tvaru

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & -a_3 \end{pmatrix};$$

zvolme basi

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pak platí $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{X}_3$, $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3] = -2\mathbf{X}_1$, $[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = 2\mathbf{X}_2$, $(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 4(a_3^2 + a_1 a_2)$. Rovnice $\mathbf{RX} = 0$ má jediné řešení $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. To znamená, že polodie degenerují v bod. Hledejme dále charakteristické směry operátoru $\mathbf{R}$, tj. řešme rovnici $\mathbf{RX} = \lambda\mathrm{X}$. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - (\mathbf{R}, \mathbf{R}) = 0$. Charakteristické směry jsou tedy dva reálné různé pro pohyb s $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = 1$, žádné (imaginární) pro pohyb s $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = -1$. V ekvicentroafinní grupě jsou tedy dva typy okamžitých pohybů (pomineme-li singulární pohyby s $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = 0$). Je-li $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = 1$, jsou trajektorie okamžitých pohybů hyperboly; je-li $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = -1$, jsou to elipsy.

Snadno se zjistí, že tečna a normála trajektorie jsou sdružené směry kuželosečky, která je trajektorií okamžitého pohybu (normála trajektorie prochází počátkem).

Pro invarianty křivky v ekvicentroafinní geometrii platí: $s' = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \rangle$, $k = \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \rangle / \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \rangle^3$. Vztahy pro invarianty trajektorie v bodě $\boldsymbol{x}$ pak jsou

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \langle \boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x} \rangle, \quad k_x = \frac{\langle \mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}^2\boldsymbol{x} \rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x} \rangle^3}.$$

6. KINEMATIKA ADJUNGOVANÉHO POHYBU V GRUPÁCH E^i A S^i

Nechť je dán pohyb $g(t)$ třídy C^4 bez singulárních bodů v některé z těchto grup a uvažujme pohyb k němu adjungovaný. Jelikož algebry těchto grup mají hodnost 1, má rovnice $[\mathbf{R}, \mathbf{X}] = 0$ řešení pouze $\lambda\mathbf{R}$, kde λ je reálný parametr. To znamená, že polodie adjungovaného pohybu jsou jednoznačně určeny řídicími kuželi. Pro tečný vektor trajektorie bodu $\mathbf{X}$ platí podle (5): $\mathbf{X}' = [\mathbf{R}, \mathbf{X}]$, z toho plyne $\mathbf{X}'' = [\mathbf{R}', \mathbf{X}] + [\mathbf{R}, \mathbf{X}'] = (\mathrm{ad}\mathbf{R}')\,\mathbf{X} + (\mathrm{ad}\mathbf{R})^2\,\mathbf{X}$. Frenetův repér řídicího kužele (pevného) je tvořen vektory $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{R}$ a platí pro něj formule (8). Budeme zkoumat trajektorie bodů ležících na jednotkové kouli, to znamená na kouli dané rovnicí $(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \varepsilon$, kde $\varepsilon = \pm 1$.

Označme $\boldsymbol{t}_{\mathbf{X}}$ a $\boldsymbol{n}_{\mathbf{X}}$ tečný a normálový vektor trajektorie, ležící v tečné rovině koule v bodě $\mathbf{X}$, ne nutně jednotkový. Pak je $\boldsymbol{t}_{\mathbf{X}} = [\mathbf{R}, \mathbf{X}]$, $\boldsymbol{n}_{\mathbf{X}} = [\mathbf{X}, [\mathbf{R}, \mathbf{X}]]$. Označme $\bar{\varepsilon}_2 = \operatorname{sgn}(\boldsymbol{t}_{\mathbf{X}}, \boldsymbol{t}_{\mathbf{X}})$, $\bar{\varepsilon}_3 = \operatorname{sgn}(\boldsymbol{n}_{\mathbf{X}}, \boldsymbol{n}_{\mathbf{X}})$ s úmluvou podobnou jako v (7). Považujme za míru křivosti trajektorie její sférickou (geodetickou) křivost na jednotkové kouli. Pro ni platí podle (9)

$$k_x = \frac{(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \mathbf{X}'')\,\bar{\varepsilon}_2}{\left(\bar{\varepsilon}_2 \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^{3/2}}, \quad \bar{\varepsilon}_2 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \{\bar{\varepsilon}_2(\mathbf{X}', \mathbf{X}')\}^{1/2}.$$

Zaveďme vektor sférické (geodet.) křivosti takto:

$$(12) \quad \mathbf{S}_x = \mathbf{X} + \frac{1}{k_x}\mathbf{N}_x = \mathbf{X} + \frac{(\bar{\varepsilon}_2(\mathbf{X}', \mathbf{X}'))^{3/2}\,\bar{\varepsilon}_2}{(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \mathbf{X}'')} \cdot \frac{1}{(\bar{\varepsilon}_2(\mathbf{X}', \mathbf{X}'))^{1/2}} [\mathbf{X}, [\mathbf{R}, \mathbf{X}]] =$$

$$= \mathbf{X} + \frac{(\mathbf{X}', \mathbf{X}')}{(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \mathbf{X}'')} [\mathbf{X}, [\mathbf{R}, \mathbf{X}]] = \mathbf{X} + \frac{(\mathrm{ad}\mathbf{R}\mathbf{X}, \mathrm{ad}\mathbf{R}\mathbf{X})}{(\mathbf{X}, \mathrm{ad}\mathbf{R}\mathbf{X}, \mathrm{ad}\mathbf{R}'\mathbf{X} + (\mathrm{ad}\mathbf{R})^2\,\mathbf{X})} [\mathbf{X}, [\mathbf{R}, \mathbf{X}]].$$

Je-li $\mathbf{X} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$ bod a jsou-li α, β, γ jeho souřadnice v repéru $\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, je po dosazení do (12):

$$\mathbf{S}_x \equiv \varepsilon_0\varepsilon \left(\frac{(\beta^2\varepsilon_2 + \gamma^2\varepsilon_3) + \alpha\gamma\varkappa_1\varepsilon_2}{(\beta^2\varepsilon_2 + \gamma^2\varepsilon_3) + \gamma\varkappa_1\varepsilon_2\varepsilon_0\varepsilon}, \; \beta \frac{\gamma\varkappa_1\varepsilon_2}{(\beta^2\varepsilon_2 + \gamma^2\varepsilon_3)\,\alpha + \gamma\varkappa_1\varepsilon_2\varepsilon_0\varepsilon}, \right.$$

$$\left. \gamma \frac{\gamma\varkappa_1\varepsilon_2}{(\beta^2\varepsilon_2 + \gamma^2\varepsilon_3)\,\alpha + \gamma\varkappa_1\varepsilon_2\varepsilon_0\varepsilon} \right).$$

Promítněme nyní bod **X** i bod $\mathbf{S}_x$ ze středu 0 do tečné roviny koule v bodě **R**, průměty těchto bodů označme $\pi\mathbf{X}$ a $\pi\mathbf{S}_x$ a zkoumejme takto vzniklou příbuznost v tečné rovině koule:

$$\pi\mathbf{X} : \left(1, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}\right),$$

$$\pi\mathbf{S}_x : \left(1, \frac{\beta\gamma\varkappa_1\varepsilon_2}{(\beta^2\varepsilon_2 + \gamma^2\varepsilon_3) + \alpha\gamma\varkappa_1\varepsilon_2}, \frac{\gamma \cdot \gamma\varkappa_1\varepsilon_2}{(\beta^2\varepsilon_2 + \gamma^2\varepsilon_3) + \alpha\gamma\varkappa_1\varepsilon_2}\right) =$$

$$= \left(1, \frac{\beta\gamma\varkappa_1}{(\beta^2 + \gamma^2\varepsilon_2\varepsilon_3) + \alpha\gamma\varkappa_1}, \frac{\gamma \cdot \gamma\varkappa_1}{(\beta^2 + \gamma^2\varepsilon_2\varepsilon_3) + \alpha\gamma\varkappa_1}\right).$$

1. $\varepsilon_2 . \varepsilon_3 = +1$: Pišme $\beta/\alpha = \varrho \sin \varphi$, $\gamma/\alpha = \varrho \cos \varphi$, pak

$$\varphi = \varphi', \quad \varrho' = \frac{\varrho^2\varkappa_1 \cos\varphi}{\varrho^2 + \varrho\varkappa_1 \cos\varphi} = \frac{\varrho d}{\varrho + d},$$

kde $d = \varkappa_1 \cos \varphi$. Je tedy $\varrho\varrho' = d(\varrho - \varrho')$.

2. $\varepsilon_2 . \varepsilon_3 = -1$: Pišme $\beta/\alpha = \varrho \operatorname{sh} \varphi$, $\gamma/\alpha = \varrho \operatorname{ch} \varphi$, pak

$$\varphi = \varphi', \quad \varrho' = \frac{\varrho^2\varkappa_1 \operatorname{ch}\varphi}{-\varrho^2 + \varrho\varkappa_1 \operatorname{ch}\varphi} = \frac{\varrho d}{-\varrho + d},$$

kde $d = \varkappa_1 \operatorname{ch} \varphi$. V tomto případě je $\varrho\varrho' = -d(\varrho - \varrho')$. Je-li $\beta/\alpha = \varrho \operatorname{ch} \varphi$, $\gamma/\alpha = \varrho \operatorname{sh} \varphi$, je

$$\varphi = \varphi', \quad \varrho' = \frac{\varrho^2\varkappa_1 \operatorname{sh}\varphi}{\varrho^2 + \varrho\varkappa_1 \operatorname{sh}\varphi} = \frac{\varrho d}{\varrho + d},$$

kde $d = \varkappa_1 \operatorname{sh} \varphi$, a tedy $\varrho\varrho' = d(\varrho - \varrho')$.

Poznámka. Tam, kde je to zapotřebí, vezme se místo formy (,) forma {,}.

Množina bodů, pro které výše zavedený vektor křivosti nemá smysl, to znamená množina „inflexních" bodů ve smyslu příslušné geometrie, je dána rovnicemi

$$\varepsilon = \varepsilon_0\alpha^2 + \varepsilon_4^2(\varepsilon_2\beta^2 + \varepsilon_3\gamma^2), \quad 0 = \gamma\varkappa_1\varepsilon_2\varepsilon_0\varepsilon + \alpha(\beta^2\varepsilon_2 + \gamma^2\varepsilon_3).$$

Jestliže je $\varepsilon_4 = 0$, tj. v grupách E^0 a E^1, dostáváme

$$\gamma\varkappa_1\varepsilon_2 + \beta^2\varepsilon_2 + \gamma^2\varepsilon_3 = 0 \quad \text{tj.} \quad \varkappa_1\gamma + \beta^2 + \gamma^2\varepsilon_2\varepsilon_3 = 0,$$

což skutečně je rovnice inflexní kružnice (kružnice „obratu"). Jestliže je $\varepsilon_4 \neq 0$, je to křivka o těchto rovnicích

$$\varepsilon = \varepsilon_0\alpha^2 + \varepsilon_2\beta^2 + \varepsilon_3\gamma^2, \quad 0 = \gamma\varkappa_1\varepsilon_2 + (\varepsilon_0 - \varepsilon\alpha^2)\,\alpha.$$

Celkem lze o studované příbuznosti říci toto: Je-li tečná rovina koule euklidovská, je uvažovaná příbuznost táž, jako v kinematice grupy euklidovských shodností v rovině, je-li pseudoeuklidovská $(\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1)$, je tato příbuznost stejná jako v kinematice grupy pseudoeuklidovských shodností.

Závěrem si povšimněme, že grupa S^0 je isomorfní s grupou pohybů eliptické roviny, realisované na kouli $(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 1$ v S^0, a že grupa S^1 je isomorfní s grupou pohybů hyperbolické roviny, realisované na kouli s imaginárním poloměrem v prostoru S^1, dané rovnicí $(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = -1$. Těmito dvěma případy je tedy na jednom z jejich modelů řešena i kinematická geometrie neeuklidovských rovin.

Seznam literatury

[1] *N. Jacobson:* Lie Algebras (ruský překlad), Moskva 1964.
[2] *K. Nomizu:* Lie groups and differential geometry (ruský překlad), Moskva 1960.
[3] *П. А. Широков, А. П. Широков:* Аффинная диффэренциальная геометрия, Москва 1959.
[4] *W. Blaschke:* Kinematik und Quaternionen, Berlin 1960.

Adresa autora: Horská 4, Praha 2 - Nové Město (České vysoké učení technické).

Zusammenfassung

DIE LIESCHEN GRUPPEN UND DIE EBENE KINEMATIK

ADOLF KARGER, Praha

Diese vorgelegte Arbeit befaßt sich mit der kinematischen Geometrie in der euklidischen Ebene, in der pseudoeuklidischen Ebene, auf der Sphäre und auf der Pseudosphäre mit Verwendung der Theorie der Lieschen Gruppen. Im ersten Teil sind grundlegende Begriffe für die affine Bewegung des affinen Raumes angeführt und ihre einfachsten Eigenschaften gefunden. Zu jeder affinen Bewegung aus der Untergruppe G der affinen Gruppe werden mittels der kanonischen Form auf G zwei Kegel von Lieschen Algebra $\mathfrak{g}$ der Gruppe G zugeordnet, der sog. Rast- und Gangrichtkegel. Die adjungierte Repräsentation der Gruppe G in $\mathfrak{g}$ ordnet jeder Bewegung aus G eine Bewegung in $\mathfrak{g}$ zu, die sog. adjungierte Bewegung.

Im zweiten Teil werden die eingeführten Begriffe zum Studium der ebenen Kinematik der euklidischen und pseudoeuklidischen Kongruenzen sowie zum Studium der adjungierten Bewegungen in den zwei erwähnten Gruppen und weiter in der Gruppe der sphärischen Bewegungen in E_3 und in der Gruppe der pseudosphärischen Bewegungen in E_3^1 benutzt. Es werden die Invarianten der Richtkegel gefunden. Endlich wird auch die Verwandschaft zwischen den Punkten und den Krümmungsmittelpunkten ihrer Ganglinien studiert.