František Zítek

Burkillovy integrály závislé na parametru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 2, 165--176

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108548`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

BURKILLOVY INTEGRÁLY ZÁVISLÉ NA PARAMETRU

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Došlo dne 19. května 1958)

DT: 517.39

S využitím pojmu stejnoměrné konvergence se v článku dokazují pro jednorozměrný Burkillův integrál některé věty, obdobné větám z teorie Riemannova resp. Lebesgueova integrálu, o spojitosti, derivaci a integraci vzhledem k parametru.

1. Úvod

Zavedeme si nejprve stálá označení a terminologii. Budiž K neprázdný konečný polootevřený interval tvaru $\langle a, b)$ na reálné ose $R = (-\infty, \infty)$. Symbolem $\boldsymbol{K}$ označíme pak systém všech intervalů [1]) obsažených v K. Je-li I interval v R, pak $|I|$ značí jeho délku. Dělením $\mathscr{D}$ konečného intervalu $J \subset R$ rozumíme libovolný konečný systém disjunktních intervalů $I_1, I_2, \ldots, I_n$ takových, že $\bigcup_{j=1}^{n} I_j = J$. Normou $\nu(\mathscr{D})$ takového dělení nazveme pak číslo $\max_{1 \leq j \leq n} |I_j|$.

V článku budeme studovati reálné nebo obecněji též komplexní funkce intervalu závislé na reálném parametru, tedy funkce $f(I, x)$ definované v $\boldsymbol{K} \times X$, kde $X \subset R$. Leckteré výsledky, které si zde uvedeme, lze ovšem bez potíží rozšířiti i na případ, kdy parametr x je prvkem obecnějšího prostoru nežli R, např. obecně metrického prostoru; toto zobecnění však již není podstatné; v úvahu přicházejí zde jen výsledky paragrafu 2 a 3.

V celém článku předpokládáme znalost základních vět a vztahů a pojmů teorie Burkillova integrálu v jednorozměrném případě (viz [1], [6]). Je-li dána funkce $f, g, \ldots$ intervalu, značíme její Burkillův integrál odpovídajícím velkým písmenem F, G, atd. Je-li f funkce intervalu a $\mathscr{D}$ dělení nějakého intervalu J, v němž je f definována, pak klademe $f(\mathscr{D}) = \sum_{I_j \in \mathscr{D}} f(I_j)$.

[1]) Slovem interval rozumíme zde i všude v dalším vždy polootevřený interval typu $\langle ,)$.

2. Stejnoměrná konvergence

Budiž $x_0 \in X \subset R$ a budiž f komplexní funkce definovaná v $\boldsymbol{K} \times X$. Řekneme, že f je *spojitá* v x_0[2]), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ a každému $I \in \boldsymbol{K}$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\{x \in X, |x - x_0| < \delta\} \Rightarrow \{|f(I, x) - f(I, x_0)| < \varepsilon\} . \tag{2.1}$$

Budiž m nějaká nezáporná funkce intervalu definovaná v $\boldsymbol{K}$ a taková, že $0 < M(K) < \infty$. Řekneme potom, že f je *m-stejně spojitá* v x_0[2]), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $I \in \boldsymbol{K}$ platí

$$\{x \in X, |x - x_0| < \delta\} \Rightarrow \{|f(I, x) - f(I, x_0)| < \varepsilon m(I)\} . \tag{2.2}$$

Řekneme, že f je spojitá, resp. m-stejně spojitá v X, jestliže je spojitá, resp. m-stejně spojitá v každém $x \in X$.

Budiž f komplexní funkce v $\boldsymbol{K} \times X$ a nechť pro každé $x \in X$ existuje Burkillův integrál $F(K, x) = \int_K f(I, x)$. Řekneme, že tento integrál *konverguje stejnoměrně* vzhledem k $x \in X$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné dělení $\mathscr{D}$ intervalu K splňující podmínku $\nu(\mathscr{D}) < \delta$ platí

$$\sup_{x \in X} |f(\mathscr{D}, x) - F(K, x)| < \varepsilon . \tag{2.3}$$

Zřejmě potom $|F(K, x)| < \infty$ pro každé $x \in X$. Snadno se přesvědčíme, že místo (2.3) lze žádati, aby

$$\sup_{x \in X} |f(\mathscr{D}_1, x) - f(\mathscr{D}_2, x)| < \varepsilon \tag{2.4}$$

pro každá dvě dělení $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ intervalu K splňující $\nu(\mathscr{D}_1) < \delta$, $\nu(\mathscr{D}_2) < \delta$, (srv. též [6], (3.6) a [7]).

Jak jsme ukázali již v [7] § 2, je stejnoměrná konvergence podobně jako existence Burkillova integrálu dědičnou vlastností intervalu, tj. platí

Věta 1. *Jestliže integrál $F(K, x)$ konverguje stejnoměrně vzhledem k $x \in X$, potom také pro libovolné $J \in \boldsymbol{K}$ integrál $F(J, x)$ konverguje stejnoměrně vzhledem k $x \in X$.*

3. Limita a spojitost podle parametru

V celém třetím paragrafu značí f komplexní funkci definovanou v $\boldsymbol{K} \times X$ a takovou, že pro každé $x \in X$ jest $|F(K, x)| < \infty$, m je nezáporná funkce definovaná v $\boldsymbol{K}$.

Věta 2. *Je-li f m-stejně spojitá v x_0, potom její integrál F je spojitý v x_0.*

---

[2]) Přesněji řečeno: spojitá v x_0 vzhledem k X. Tento detail však zvláště nezdůrazňujeme, neboť není celkem podstatný a dále ho nepotřebujeme; obvykle bude X souvislá část R.

Důkaz. Podle předpokladu existuje pro každé $\varepsilon > 0$ takové $\delta > 0$, že pro libovolné $I \in \boldsymbol{K}$ platí[3])

$$\{x \in X, |x - x_0| < \delta\} \Rightarrow \left\{|f(I, x) - f(I, x_0)| < \frac{\varepsilon}{M(K)} m(I)\right\}.$$

Pro libovolné $J \in \boldsymbol{K}$ a pro $|x - x_0| < \delta$ pak ovšem bude

$$|F(J, x) - F(J, x_0)| =$$

$$\left|\int_J [f(I, x) - f(I, x_0)]\right| \leqq \int_J |f(I, x) - f(I, x_0)| < \varepsilon \frac{M(J)}{M(K)} \leqq \varepsilon,$$

c. b. d.

Poznámka. Z důkazu věty 2 vyplývá navíc i to, že integrál F je M-stejně spojitý v x_0. Speciálně tedy platí pro aditivní funkci M:

Věta 3. *Integrál funkce M-stejně spojité je rovněž M-stejně spojitý.*

Věta 4. *Nechť f je spojitá v x_0; nechť existuje $\eta > 0$ takové, že integrál $F(K, x)$ konverguje stejnoměrně vzhledem k $x \in X$, $|x - x_0| < \eta$. Potom také F je spojitý v x_0.*

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$, $J \in \boldsymbol{K}$. V důsledku předpokladů věty 4 lze podle věty 1 najíti takové dělení $\mathscr{D}$ intervalu J, že pro všechna $x \in X$ splňující $|x - x_0| < \eta$ platí

$$|F(J, x) - f(\mathscr{D}, x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.1}$$

Vezmeme si toto pevné $\mathscr{D}$ a označíme n počet intervalů tvořících $\mathscr{D}$. Ježto f je spojitá v x_0, existuje pro každý interval $I_j \in \mathscr{D}$ takové $\delta_j > 0$, že

$$\{x \in X, |x - x_0| < \delta_j\} \Rightarrow \left\{|f(I_j, x) - f(I_j, x_0)| < \frac{\varepsilon}{3n}\right\}. \tag{3.2}$$

Položíme nyní $\delta = \min(\eta, \delta_1, \ldots, \delta_n)$; pro $x \in X$, $|x - x_0| < \delta$ bude pak platit současně (3.1) i (3.2), a tedy

$$|F(J, x) - F(J, x_0)| \leqq |F(J, x) - f(\mathscr{D}, x)| + |f(\mathscr{D}, x) - f(\mathscr{D}, x_0)| +$$
$$+ |f(\mathscr{D}, x_0) - F(J, x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + n\frac{\varepsilon}{3n} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

c. b. d.

Větu 4 lze ještě dále zobecniti tak, že omezíme předpoklad konvergence integrálu $F(K, x)$ na $x \neq x_0$.

Věta 5. *Nechť f je spojitá v x_0; nechť existuje $\eta > 0$ takové, že integrál $F(K, x)$ konverguje stejnoměrně vzhledem k $x \in X$, $0 < |x - x_0| < \eta$. Potom konverguje stejnoměrně i vzhledem ke všem $x \in X$ takovým, že $0 \leqq |x - x_0| < \eta$, a tedy podle věty 4 je spojitý v x_0.*

---
[3]) M značí opět integrál z m.

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$, k němu pak existuje $\delta_1 > 0$ takové, že pro každá dvě dělení $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ intervalu K splňující $\nu(\mathcal{D}_1) < \delta_1$, $\nu(\mathcal{D}_2) < \delta_1$ platí

$$|f(\mathcal{D}_1, x) - f(\mathcal{D}_2, x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pro všechna x hovící nerovnostem $0 < |x - x_0| < \eta$. Dokážeme, že pro taková dvě dělení platí rovněž

$$|f(\mathcal{D}_1, x_0) - f(\mathcal{D}_2, x_0)| < \varepsilon ;$$

tím bude věta 5 dokázána.

Ježto f je spojitá v x_0, existuje pro daná dvě dělení $\mathcal{D}_1$ a $\mathcal{D}_2$ takové $\delta_2 > 0$, že pro $|x - x_0| < \delta_2$ platí

$$|f(\mathcal{D}_j, x) - f(\mathcal{D}_j, x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad j = 1, 2,$$

to lze odvoditi zcela stejným postupem, jakého jsme použili při důkazu věty 4. Zvolíme si takové x_1 splňující zároveň $0 < |x_1 - x_0| < \eta$ a máme potom

$$f|(\mathcal{D}_1, x_0) - f(\mathcal{D}_2, x_0)| \leqq |f(\mathcal{D}_1, x_0) - f(\mathcal{D}_1, x_1)| + \\ + |f(\mathcal{D}_1, x_1) - f(\mathcal{D}_2, x_1)| + |f(\mathcal{D}_2, x_1) - f(\mathcal{D}_2, x_0)| < \varepsilon ,$$

c. b. d.

Jestliže parametr necháme probíhati pouze množinu přirozených čísel, dostaneme jako analogii k větě 5 následující celkem zřejmou větu o posloupnostech funkcí intervalu; důkaz této věty je zcela obdobný důkazu věty 5, a proto jej nebudeme prováděti.

Věta 6. *Budiž $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost funkcí definovaných v $\boldsymbol{K}$, budiž N množina obsahující všechna přirozená čísla s výjimkou nejvýše konečného počtu. Nechť pro každé $I \in \boldsymbol{K}$ jest $\lim_{n\to\infty} f_n(I) = f_0(I)$, a nechť integrály $\int_K f_n(I)$ konvergují stejnoměrně vzhledem k $n \in N$. Potom platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_J f_n(I) = \int_J f_0(I)$$

pro každé $J \in \boldsymbol{K}$.

4. Derivace podle parametru

V tomto paragrafu bude f komplexní funkce definovaná v $\boldsymbol{K} \times X$, kde $X = \langle c, d)$, $0 < d - c = l < \infty$.

Věta 7. *Nechť*

1° *integrál $F(K, x_0)$, $|F(K, x_0)| < \infty$, existuje pro alespoň jedno $x_0 \in X$,*
2° *pro všechna $I \in \boldsymbol{K}$ a pro všechna $x \in X$ existuje vlastní derivace*[4])

$$f'(I, x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [f(I, x + h) - f(I, x)] , \qquad (4.1)$$

[4]) V krajním bodě intervalu se tím rozumí jednostranná derivace.

3° *integrál* $\int\limits_K f'(I, x)$ *konverguje stejnoměrně vzhledem k* $x \in X$.

Potom

(I) *integrál* $F(K, x)$ *konverguje stejnoměrně vzhledem k* $x \in X$,

(II) *platí*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(K, x) = \int\limits_K f'(I, x) . \tag{4.2}$$

Důkaz. I. Budiž ε kladné číslo. Existuje pak $\delta > 0$ takové, že podle 1° pro každá dvě dělení $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ intervalu K s normami $\nu(\mathscr{D}_1) < \delta$, $\nu(\mathscr{D}_2) < \delta$ platí

$$|f(\mathscr{D}_1, x_0) - f(\mathscr{D}_2, x_0)] < \frac{\varepsilon}{2}$$

a současně podle 3° platí

$$\sup_{x \in X} |f'(\mathscr{D}_1, x) - f'(\mathscr{D}_2, x)| < \frac{\varepsilon}{2l} .$$

Při daných pevných $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ uvažujme funkci (argumentu x)

$$g(x) = f(\mathscr{D}_1, x) - f(\mathscr{D}_2, x) . \tag{4.3}$$

Pro všechna $x \in X$ existuje zřejmě derivace této funkce

$$g'(x) = f'(\mathscr{D}_1, x) - f'(\mathscr{D}_2, x) ,$$

a tedy podle známé věty o střední hodnotě platí pro $x \in X$

$$g(x) - g(x_0) = (x - x_0) \, . \, g'(\tilde{x}) ,$$

kde $\tilde{x} = x_0 + \vartheta(x - x_0)$, $0 < \vartheta < 1$.

Pro každá dvě dělení $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ intervalu K splňující $\nu(\mathscr{D}_j) < \delta$, $j = 1, 2$, platí potom pro každé $x \in X$ odhad

$$|f(\mathscr{D}_1, x) - f(\mathscr{D}_2, x)\,| = |g(x)| = |g(x) - g(x_0) + g(x_0)| \leqq |g(x) - g(x_0)| +$$
$$+ |g(x_0)| < l \, . \, \frac{\varepsilon}{2l} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Tím je dokázána prvá část tvrzení. Pokud se týče (II), položme pro $x \in X$, $x + h \in X$, $h \neq 0$, $I \in \boldsymbol{K}$:

$$\varphi(I, x, h) = \frac{1}{h} [f(I, x + h) - f(I, x)] .$$

Znovu podle věty o střední hodnotě je pak při pevném $x \in X$

$$\varphi(\mathscr{D}_1, x, h) - \varphi(\mathscr{D}_2, x, h) = \frac{1}{h} [g(x + h) - g(x)] = g'(\tilde{x}) =$$
$$= f'(\mathscr{D}_1, \tilde{x}) - f'(\mathscr{D}_2, \tilde{x}) ,$$

kde $\tilde{x} = x + \vartheta h$, $0 < \vartheta < 1$, a funkce g je pro daná dělení $\mathscr{D}_1$ a $\mathscr{D}_2$ opět definována vztahem (4.3). Integrál

$$\Phi(K, x, h) = \int_K \varphi(I, x, h) = \frac{1}{h}\,[F(K, x + h) - F(K, x)]$$

tedy konverguje stejnoměrně vzhledem k h: $|h| > 0$, $x + h \in X$. Podle věty 5 existuje tudíž také integrál z příslušné limity pro $h \to 0$ a platí (4.2), c. b. d.

Poznámka. Je celkem zřejmé, že (II) platí i tehdy, nahradíme-li interval K libovolným intervalem $J \in \boldsymbol{K}$.

5. Integrace podle parametru

V tomto paragrafu bude X opět konečný interval $\langle c, d\rangle$.

Věta 8. *Budiž f komplexní funkce definovaná v $\boldsymbol{K} \times X$, spojitá v X. Nechť integrál $F(K, x)$ konverguje stejnoměrně vzhledem k $x \in X$. Potom pro libovolné $y \in X$ platí*

$$\int_K [\int_c^y f(I, x)\,\mathrm{d}x] = \int_c^y F(K, x)\,\mathrm{d}x\,.^{5)} \tag{5.1}$$

Důkaz. Podle věty 4 je F spojitou funkcí x, takže integrál stojící v (5.1) vpravo skutečně existuje. Rovněž f je spojitá, existuje tedy pro každé $I \in \boldsymbol{K}$, $y \in X$ také integrál

$$\varphi(I, y) = \int_c^y f(I, x)\,\mathrm{d}x\,;$$

kromě toho zřejmě platí $\varphi'(I, x) = f(I, x)$. Podle věty 7 tedy konverguje stejnoměrně vzhledem k $y \in X$ také integrál $\int_K \varphi(I, y)$, neboť zřejmě $\int_K \varphi(I, c) = 0 < \infty$; existuje tedy i levá strana v (5.1). Přitom zřejmě pro $y = c$ rovnost (5.1) platí. Dokážeme si dále, že obě strany této rovnosti mají touž derivaci podle y, tím bude dokázána platnost (5.1) pro všechna $y \in X$. Pravá strana má (viz [2], věta 36) za derivaci $F(K, y)$. Na levou stranu aplikujeme opět větu 7 a dostaneme podle (II) její derivaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_K \varphi(I, y) = \int_K \varphi'(I, y) = \int_K f(I, y) = F(K, y)\,,$$

c. b. d.

Poznámka. Podobně jako u věty 7 lze i zde v (5.1) nahraditi K libovolným $J \in \boldsymbol{K}$.

[5]) Symbol $\int \ldots \mathrm{d}x$ značí zde Riemannův integrál.

Věta 9. *Budiž f reálná funkce v $\boldsymbol{K} \times X$. Nechť pro každé $I \in \boldsymbol{K}$ existuje Lebesgueův integrál $\int_c^d f(I, x)\,\mathrm{d}x$. Nechť pro každé $x \in X$ jest*

$$f(I_1 \cup I_2, x) \leqq f(I_1, x) + f(I_2, x) \tag{5.2}$$

pro každé dva disjunktní intervaly I_1, $I_2 \in \boldsymbol{K}$ takové, že $(I_1 \cup I_2) \in \boldsymbol{K}$. Nechť existuje pro každé $x \in X$ integrál $F(K, x)$.[6] *Potom platí rovnost* (5.1) *(kde $\int \dots \mathrm{d}x$ značí tentokráte Lebesgueovy integrály) pro všechna $y \in X$, pro něž integrál vpravo konverguje.*

Důkaz. Budiž $\{\mathscr{D}_n\}$ posloupnost dělení intervalu K taková, že $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$, a nechť pro každé přirozené n platí

$$(I \in \mathscr{D}_{n+1}) \Rightarrow (\text{existuje } J \in \mathscr{D}_n \text{ tak, že } I \subset J)\,.$$

Jest ovšem

$$F(K, x) = \lim_{n\to\infty} f(\mathscr{D}_n, x)\,,$$

takže podle známé věty z teorie Lebesgueova integrálu (viz např. [3], věta 57, str. 110) existuje integrál stojící v (5.1) vpravo a platí

$$\int_c^y F(K, x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \varphi(\mathscr{D}_n, y)\,,$$

kde jako dříve

$$\varphi(I, y) = \int_c^y f(I, x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Pro libovolné dělení $\mathscr{D}$ intervalu K platí však zřejmě v důsledku (5.2)

$$f(\mathscr{D}, x) \leqq F(K, x)\,.$$

Budiž $\{\mathscr{D}_n\}$ libovolná posloupnost dělení intervalu K, $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$. Budiž nyní $y_0 \in X$ takové, že $\int_c^{y_0} F(K, x)\,\mathrm{d}x < \infty$. Potom pro $y \in \langle c, y_0\rangle$ mají funkce $f(\mathscr{D}_n, y)$ integrabilní majorantu $F(K, y)$, takže (srv. [3], věta 65) limita

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^{y_0} f(\mathscr{D}_n, x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \varphi(\mathscr{D}_n, y_0)$$

existuje a je rovna integrálu limity, tedy

$$\int_c^{y_0} \lim_{n\to\infty} f(\mathscr{D}_n, x)\,\mathrm{d}x = \int_c^{y_0} F(K, x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Existuje tudíž Burkillův integrál $\Phi(K, y)$ pro každé $y \in \langle c, y_0\rangle$ a platí (5.1), c. b. d.

[6]) Podmínky pro existenci Burkillova integrálu funkce, o níž předpokládáme již (5.2), viz např. [1] a [4].

6. Příklady aplikací na Riemannův integrál

Budiž $f(y, x)$ komplexní funkce dvou reálných proměnných definovaná v oboru $\langle a, b) \times \langle c, d)$. Nechť pro každé $x \in \langle c, d)$ existuje vlastní Riemannův integrál $\int_a^b f(y, x)\,dy = F(x)$. Řekneme, že tento integrál konverguje stejnoměrně vzhledem k $x \in \langle c, d)$, jestliže součty (srv. [2]) $\Sigma f(y_i, x)\,\Delta y_i$ při $\max \Delta y_i \to \to 0$ konvergují k $F(x)$ stejnoměrně vzhledem k $x \in \langle c, d)$. Položme nyní pro $I = \langle y_1, y_2) \subset \langle a, b)$

$$f_1(I, x) = (y_2 - y_1)\,.\,f(y_1, x)\,. \tag{6.1}$$

Platí potom zřejmě (značíme $Y = \langle a, b)$, $X = \langle c, d)$): $\int_a^b f(y, x)\,dy = \int_Y f_1(I, x)$ a stejnoměrná konvergence Riemannova integrálu funkce f odpovídá stejnoměrné konvergenci Burkillova integrálu funkce f_1.

Věty, které jsme si dokázali pro Burkillovy integrály, lze pak přenésti i na integrály Riemannovy, resp. Lebesgueovy. Z věty 6 např. dostaneme toto tvrzení:

Věta 10. *Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost Riemannovsky integrovatelných funkcí v $\langle a, b)$, nechť integrály $\int_a^b f_n(x)\,dx$ konvergují stejnoměrně vzhledem k n a nechť $\lim f_n$ existuje. Potom*

$$\int_a^b \lim f_n(x)\,dx = \lim \int_a^b f_n(x)\,dx\,. \tag{6.2}$$

Věta 7 je téměř jen přepisem věty 108 z [3]. Poněkud zajímavější důsledek dostaneme z věty 9:

Věta 11. *Budiž $f(y, x)$ reálná funkce definovaná v $Y \times X = \langle a, b) \times \langle c, d)$. Nechť pro každé $y \in Y$ existuje Lebesgueův integrál $\int_c^d f(y, x)\,dx$. Nechť pro každé $x \in X$ je $f(y, x)$ monotonní resp. konvexní (konkávní) funkcí y. Potom platí rovnost (Lebesgueových integrálů)*

$$\int_a^b \Big[\int_c^d f(x, y)\,dx\Big]\,dy = \int_c^d \Big[\int_a^b f(y, x)\,dy\Big]\,dx\,. \tag{6.3}$$

Důkaz. Větu 11 dostaneme aplikací věty 9 na funkci $f_1(I, x)$ (viz (6.1)), je-li f monotonní v y, resp. na funkci

$$f_2(I, x) = (y_2 - y_1)\,.\,\tfrac{1}{2}[f(y_1, x) + f(y_2, x)]\,, \tag{6.4}$$

je-li f konvexní (konkávní).

Poznámka. Kromě funkcí f_1 a f_2 lze definovati ještě další funkce intervalu $f_j(I, x)$ takové, že pro funkci $f(y, x)$ pak platí

$$\int_a^b f(y, x)\,dy = \int_Y f_j(I, x)\,,$$

např. funkci f_3 definovanou pro $I = \langle y_1, y_2\rangle$ vzorcem

$$f_3(I, x) = \frac{2}{3}(y_2 - y_1)\left[f(y_1, x) + f(y_2, x) + 4f\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, x\right)\right], \tag{6.5}$$

která odpovídá pravidlu Simpsonovu podobně jako funkce f_1, resp. f_2 odpovídaly pravidlu obdélníkovému, resp. lichoběžníkovému. Odhady pro rozdíly

$$\int_{y_1}^{y_2} f(y, x)\,dy - f_j(I, x)$$

dostaneme snadno ze známých odhadů pro tato pravidla (viz [2], kap. VI., vzorce (4), (5) a (11)); poslouží nám při určování postačujících podmínek stejnoměrné konvergence Burkillových integrálů funkcí f_j. Složitější funkce f_j se získají z dalších vzorců pro numerickou integraci (viz např. [5], § 70, str. 381).

Vedle těchto funkcí lze ovšem vzíti i obecnější případ funkcí tvaru

$$f_j^*(I, x) = G(I)\,.\,H(f(y_1, x), f(y_2, x), \ldots)\,. \tag{6.6}$$

Bude potom možno přenášeti věty z teorie Burkillova integrálu i na integrály Riemann-Stieltjesovy. Přitom aditivní funkce intervalu G bude odpovídati integrující funkci (distribuční) $g(y)$ v integrálech tvaru $\int_a^b f(y, x)\,dg(y)$. Princip přenosu na tento obecnější případ je ovšem v podstatě stejný jako v případě Riemannových integrálů, kde jsme měli speciální integrující funkci $g(y) = y$, resp. $G(I) = |I|$. Pro nejjednodušší případ

$$f_1^*(I, x) = G(I)\,.\,f(y_1, x) \tag{6.7}$$

(srv. [3], kap. X., § 7) dostaneme tak např. z věty 6 toto známé tvrzení:

Věta 12. *Budiž $\{f_n\}$ posloupnost komplexních funkcí definovaných v $Y = \langle a, b)$ a g reálná zleva spojitá funkce s variací konečnou v Y. Nechť existuje $\lim f_n(y) = f(y), |f(y)| < \infty$, pro každé $y \in Y$ a nechť Stieltjesovy integrály $\int_a^b f_n(y)\,dg(y)$ konvergují stejnoměrně vzhledem k n[7]). Potom platí*

$$\int_{a'}^{b'} f(y)\,dg(y) = \lim_{n\to\infty} \int_{a'}^{b'} f_n(y)\,dg(y)$$

pro všechna $a \leqq a' \leqq b' \leqq b$.

Podobně lze přenésti i další věty, to však zde již nebudeme prováděti.

[7]) Je zřejmé, že tuto stejnoměrnou konvergenci rozumíme v obdobném smyslu jako pro Riemannovy integrály, tj. jako stejnoměrnou konvergenci příslušných součtů $f_1^*(\mathcal{D}_n, x)$.

LITERATURA

[1] *J. C. Burkill*: Functions of intervals; Proceedings London Math. Soc., Ser. 2, *22* (1923), 275—310.

[2] *V. Jarník*: Úvod do počtu integrálního, Praha 1948.

[3] *V. Jarník*: Integrální počet II, Praha 1955.

[4] *H. Kober*: On the existence of the Burkill integral; Canadian Journal of Math., *10* (1958), 115—121.

[5] *V. Láska, V. Hruška*: Teorie a praxe numerického počítání, Praha 1934.

[6] *L. A. Ringenberg*: The theory of the Burkill integral; Duke Math. Journal. *15* (1948), 239—270.

[7] *F. Zítek*: Poznámka k teorii (BB)-integrálu; Časopis pro pěstování matematiky, *84* (1959), 83—89.

Резюме

ИНТЕГРАЛЫ БЭРКИЛЛА, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek), Прага

(Поступило в редакцию 19/V 1958 г.)

В статье доказаны некоторые теоремы о предельном переходе, дифференцировании и интегрировании под знаком интеграла Бэркилла; они в большинстве случаев вполне аналогичны теоремам для интегралов Римана или Лебега.

В работе исследуются функции (вообще комплексные) от интервала f, определенные для подинтервалов I заданного конечного интервала $K \subset R = (-\infty, \infty)$ и зависящие от вещественного параметра $x \in X \subset R$. Для доказательства теорем используется здесь введенное в [7] понятие равномерной сходимости интеграла Бэркилла: говорим, что интеграл $F(K, x) = \int_K f(I, x)$ сходится равномерно по $x \in X$, если для любого разбиения $\mathscr{D}$ интервала K, норма которого достаточно мала ($\nu(\mathscr{D}) < \delta$), справедливо (2.3). Нормой разбиения $\mathscr{D} = \{I_1, \ldots, I_n\}$ называется число $\nu(\mathscr{D}) = \max_{1 \leq j \leq n} |I_j|$, где $|I_j|$ — длина интервала I_j.

Главными результатами статьи являются следующие теоремы:

Теорема 5. *Пусть функция f непрерывна в x_0.*[8]) *Пусть интеграл $\int_K f(I, x)$ сходится равномерно по $x \in X, 0 < |x - x_0| < \eta$, где $\eta > 0$. Тогда он сходится равномерно по $x \in X$, $0 \leqq |x - x_0| < \eta$ и справедливо*

[8]) Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого интервала $I \subset K$ существует $\delta > 0$ такое, что справедливо (2.1).

$$\lim_{x \to x_0} \int_J f(I, x) = \int_J f(I, x_0)$$

для любого интервала $J \subset K$.

Теорема 7. *Пусть*

1° *интеграл* $F(K, x_0) = \int_K f(I, x_0)$, $|F,(k, x_0)| < \infty$, *существует по крайней мере для одного* $x_0 \in X = \langle c, d)$;

2° *для всех* $x \in X$ *и для всех интервалов* $I \subset K$ *существует конечная производная* (4.1);

3° *интеграл* $\int_K f'(I, x)$ *сходится равномерно по* $x \in X$.

Тогда:

(I) *интеграл* $F(K, x)$ *сходится равномерно по* $x \in X$;

(II) *справедливо* (4.2).

Теорема 8. *Пусть* f *непрерывна для всех* $x \in X = \langle c, d)$ *и пусть интеграл* $\int_K f(I, x)$ *сходится равномерно по* $x \in X$. *Тогда для любого* $y \in X$ *справедливо равенство* (5.1), (*где символ* $\int \ldots \mathrm{d}x$ *означает интеграл Римана*).

В последнем, шестом, параграфе рассматриваются некоторые применения только что приведенных теорем на случай интегралов Римана и Лебега.

Zusammenfassung

ÜBER DIE BURKILLSCHEN INTEGRALE, DIE VON EINEM PARAMETER ABHÄNGEN

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Eingelangt am 19. Mai 1958)

In dieser Arbeit werden einige Sätze über Grenzübergang, Differenziation und Integration unter dem Burkillschen Integralzeichen bewiesen. Die Sätze sind meistens ganz analog den Sätzen, welche für das Riemannsche oder Lebesguesche Integral gelten.

Es werden hier also (komplexe) Intervallfunktionen $f(I, x)$ betrachtet, welche für Teilintervalle I eines gegebenen endlichen Intervalls K definiert sind, und welche ausserdem noch von einem reellen Parameter $x \in X \subset R = (-\infty, \infty)$ abhängen. Zum Beweisen der Sätze wird der schon in [7] eingeführte Begriff der gleichmässigen Konvergenz Burkillscher Integrale ausgenützt: man sagt, das Integral $F(K, x) = \int_K f(I, x)$ sei für $x \in X$ gleichmässig konver-

gent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass (2.3) für jede Zerteilung $\mathscr{D} = \{I_1, \ldots, I_n)$ des Intervalls K gilt, welche nur die Norm $\nu(\mathscr{D}) = \max_{1 \leqq j \leqq n} |I_j|$ kleiner als δ hat; $|I_j|$ bezeichnet da die Länge des Intervalls I_j.

Die Hauptergebnisse der Arbeit sind in den folgenden drei Sätzen gefasst.

Satz 5. *Es sei $f(I, x)$ eine Funktion, welche in x_0 stetig*[9]) *ist; das Integral $F(K, x) = \int_K f(I, x)$ sei für $x \in X$, $0 < |x - x_0| < \eta$, $(\eta > 0)$ gleichmässig konvergent. Dann ist es auch für $x \in X$, $0 \leqq |x - x_0| < \eta$ gleichmässig konvergent und es gilt*

$$\lim_{x \to x_0} \int_J f(I, x) = \int_J f(I, x_0)$$

für jedes Intervall $J \subset K$.

Satz 7. *Setzen wir voraus,*

1° *das Integral $F(K, x_0) = \int_K f(I, x_0)$, $|F(K, x_0)| < \infty$, existiere für mindestens ein $x_0 \in X = \langle c, d)$,*

2° *die endliche Abgeleitete* (4.1) *existiere für alle $x \in X$ und für alle Intervalle $I \subset K$,*

3° *das Integral $\int_K f'(I, x)$ sei für $x \in X$ gleichmässig konvergent.*

Dann gilt:

(I) *das Integral $F(K, x)$ ist für alle $x \in X$ gleichmässig konvergent;*

(II) (4.2).

Satz 8. *Es sei $f(I, x)$ eine für alle $x \in X = \langle c, d)$ stetige Funktion; das Integral $\int_K f(I, x)$ sei für $x \in X$ gleichmässig konvergent. Dann gilt* (5.1) *für jedes $y \in X$ (mit $\int \ldots \mathrm{d}x$ werden da Riemannsche Integrale bezeichnet).*

Im letzten, sechsten, Absatze werden dann noch einige Beispiele der Anwendungen der früher ausgesprochenen Sätze auf den Fall der Riemannschen und Lebesgueschen Integrale angeführt.

[9]) Das bedeutet, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem Intervalle $I \subset K$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass (2.1) gilt.