Karel Čulík

Charakterisace Brandtových grupoidů pomocí přímých součinů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 2, 200--202

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108545`

REFERÁTY

CHARAKTERISACE BRANDTOVÝCH GRUPOIDŮ POMOCÍ PŘÍMÝCH SOUČINŮ

(Vlastní referát K. ČULÍKA o přednášce proslovené v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 20. 10. 1958 v Brně)

V teorii relací se rozumí součinem binárních relací ϱ, σ definovaných na téže množině M (tj. $\varrho, \sigma \subset M \times M$) binární relace $\tau = \underset{[x,y]}{\mathsf{E}}$ {existuje takový $z \in M$, že $[x, z] \in \varrho$, $[z, y] \in \sigma$}. Definujme na libovolné binární relaci $\omega \subset M \times M$ tzv. *neúplnou operaci* (tj. funkci, jež některým uspořádaným dvojicím prvků z ω přiřazuje zase prvek z ω), kterou zapisujeme multiplikativně: Pro $[a, b], [c, d] \in \omega$

$$\text{součin } [a, b][c, d] \text{ (v tomto pořadí) existuje} \Leftrightarrow b = c \tag{1}$$

$$\text{a} \quad [a, b][b, d] = [a, d]\,. \tag{2}$$

V analogii k součinu komplexů grupy je pak relace τ množinou všech součinů $[a, b][c, d]$, kde $[a, b] \in \varrho$, $[c, d] \in \sigma$ v neúplné operaci definované na vhodné binární relaci. Zřejmě platí

Věta 1. *Na binární relaci lze definovat neúplnou operaci splňující* (1) *a* (2) *právě tehdy, když daná relace je transitivní. Každá neúplná operace splňující* (1) *a* (2) *splňuje první dva axiomy Brandtova grupoidu a zbývající dva splňuje právě tehdy, když je definována na plné relaci* (*tj. na relaci tvaru* $M \times M$).

Množina všech prvků Brandtova grupoidu, jejichž levá i pravá jednotka je rovna pevně zvolené jednotce, tvoří grupu a každé dvě takovéto grupy (odpovídající různým zvoleným jednotkám) jsou isomorfní (srv. [1], 362). Grupu, která je isomorfní s těmito grupami, nazveme *jádrem* daného Brandtova grupoidu, neboť jde o jádro jisté *smíšené grupy* (Mischgruppe) obsažené v daném grupoidu (srv. [2], 254). Potom *řádem* (Ordnung) Brandtova grupoidu je mohutnost jeho jádra.

Přímý součin Brandtových grupoidů se definuje formálně stejně jako v teorii grup s příslušným dovětkem o existenci součinů. Pak platí

Věta 2. *Přímý součin Brandtových grupoidů, jejichž hodnosti* (*Rang*) *jsou* $\mathfrak{m}$ *příp.* $\mathfrak{m}'$ ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ *jsou libovolné mohutnosti*) *a jejichž jádra jsou* $\mathfrak{G}$ *příp.* $\mathfrak{G}'$, *je Brandtovým grupoidem hodnosti* $\mathfrak{m} \,.\, \mathfrak{m}'$ *s jádrem* $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}'$.

Existují Brandtovy grupoidy, které mají stejnou hodnost i stejný řád a přesto nejsou isomorfní. Platí však

Věta 3. *Brandtův grupoid hodnosti* $\mathfrak{m}$ *s jádrem* $\mathfrak{G}$ *je isomorfní přímému součinu plné relace* $M \times M$, kard $M = \mathfrak{m}$, *na níž je definována neúplná operace splňující* (1) *a* (2), *s grupou* $\mathfrak{G}$, *příp. obecněji: je isomorfní přímému součinu Brandtova grupoidu hodnosti* $\mathfrak{m}$ *a řádu* 1 *s Brandtovým grupoidem hodnosti* 1 *s jádrem* $\mathfrak{G}$.

Tato věta byla dokázána např. v [3], 11.

Z věty 3 plyne

Důsledek. *Brandtův grupoid je (až na isomorfismus) jednoznačně určen svojí hodností a svým jádrem.*

K jiné realisaci Brandtových grupoidů slouží pojem *transmutace* (srv. [2]), tj. prostého zobrazení množiny na ekvivalentní množinu.

Nechť je předepsána grupa $\mathfrak{G}$ a mohutnost $\mathfrak{m}$. Pak lze zvolit systém navzájem ekvivalentních množin B_i, kard $B_i = \mathfrak{n} \geqq$ kard $\mathfrak{G}$, $i \in I$, kard $I = \mathfrak{m}$, $B_i \cap B_j = 0$ pro $i \neq j$. Dále lze zvolit permutace množiny B_1 a označit je symbolem $\varphi_{11}^{(x)}$, kde $x \in \mathfrak{G}$ tak, že $\varphi_{11}^{(x)} \to x$ je isomorfismus (vzhledem k běžnému skládání permutací). Zvolíme-li konečně libovolně transmutaci zobrazující B_1 na B_i pro každé $i \neq 1$, $i \in I$ a označíme-li ji, příp. její inversní transmutaci, symbolem $\varphi_{1i}^{(e)}$, příp. $\varphi_{i1}^{(e)}$, kde $e \in \mathfrak{G}$ je jednotkový prvek, potom množina všech transmutací systému množin B_i, které jsou tvaru

$$\varphi_{ij}^{(x)} = \varphi_{i1}^{(e)}\varphi_{11}^{(x)}\varphi_{1j}^{(e)} \quad \text{pro} \quad i, j \in I, x \in \mathfrak{G}\,, \tag{3}$$

tvoří *transmutační Brandtův grupoid* hodnosti $\mathfrak{m}$ s jádrem $\mathfrak{G}$, když jeho neúplnou operací je běžné skládání transmutací. Při tom zřejmě platí

$$\varphi_{ij}^{(x)}\varphi_{jk}^{(y)} = \varphi_{ik}^{(xy)}\,. \tag{4}$$

Existuje-li k předepsané grupě $\mathfrak{G}$ grupa $\mathfrak{B}_1$, jejíž grupa automorfismů je isomorfní s $\mathfrak{G}$, zvolme systém navzájem isomorfních a disjunktních grup $\mathfrak{B}_i$, $i \in I$, kard $I = \mathfrak{m}$ ($\mathfrak{B}_i$ je isomorfní s $\mathfrak{B}_1$). Potom množina všech automorfismů nebo isomorfismů mezi grupami $\mathfrak{B}_i$, tj. jistých transmutací zvoleného systému množin, tvoří transmutační Brandtův grupoid hodnosti $\mathfrak{m}$ s jádrem $\mathfrak{G}$. Jiné příklady transmutačních Brandtových grupoidů dostaneme, když vyjdeme od systému isomorfních algeber nebo n-rozměrných projektivních prostorů nebo homeomorfních topologických prostorů a uvažujeme množiny všech automorfismů či isomorfismů nebo všech projektivních zobrazení nebo všech homeomorfismů apod. (srv. [3]).

V předešlých příkladech šlo vesměs o jisté transmutační Brandtovy grupoidy daných systémů ekvivalentních množin B_i. Při tom zřejmě nebylo nutné žádat, aby pro množiny uvažovaného systému platilo $B_i \cap B_j = 0$ pro $i \neq j$. Stačilo totiž žádat $B_i \neq B_j$ pro $i \neq j$. Potom se lze tázat, kdy existuje transmutační Brandtův grupoid hodnosti $\mathfrak{m}$ systému množin B_i, kard $B_i = \mathfrak{n}$ pro každý $i \in I$, kard $I = \mathfrak{m}$, který je vytvořen transmutacemi splňujícími podmínku

$$\varphi_{ij}(x) = x \quad \text{pro} \quad x \in B_i \cap B_j\,. \tag{5}$$

Z (5) ovšem plyne, že každý takovýto grupoid má řád 1. Zvolíme-li např. $\mathfrak{n} = 2$ a $B_i = \{a_i, a_{i+1}\}$ pro $i = 1, 2, 3, 4$, $B_5 = \{a_5, a_1\}$, pak podmínkou (5) jsou již jednoznačně určeny transmutace $\varphi_{i,i+1}$, $i = 1, 2, 3, 4$ i $\varphi_{1,5}$, ale zřejmě $\varphi_{12}\varphi_{23}\varphi_{34}\varphi_{45} \neq \varphi_{15}$, takže hledaný Brandtův grupoid neexistuje. Platí však

Věta 4. *Nechť existuje transmutační Brandtův grupoid systému množin B_i,* kard $B_i = \mathfrak{n}$ *pro $i \in I$,* kard $I = \mathfrak{m}$, *$B_i \neq B_j$ pro $i \neq j$, který má řád* 1 *a který je vytvořen transmutacemi splňujícími* (5). *Pak neexistuje taková množina $B \subset \bigcup_{i \in I} B_i$, pro kterou platí*

$$\text{kard}\, B > \mathfrak{n} \tag{6}$$

a

$$x, y \in B \Rightarrow \text{existuje taková } B_i, \text{ že } x, y \in B_i\,. \tag{7}$$

Z předešlého příkladu vyplývá, že podmínka neexistence množiny B splňující (6) a (7) není postačující k existenci příslušného Brandtova grupoidu.

Vzhledem k větě 1 a 3 se nabízí vyšetřovat přímé součiny množiny, na níž je definována neúplná operace (splňující první dva Brandtovy axiomy případně ještě vhodně doplněné) s útvarem obecnějším než je grupa, např. s kvasigrupou, semigrupou, pologrupou atd.

LITERATURA

[1] *H. Brandt:* Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes, Math. Annalen *96* (1927), 360—366.

[2] *A. Loewy*: Über abstrakt definierte Transmutationssysteme oder Mischgruppen. Jour. f. d. reine und angew. Math. *157* (1927), 239—254.

[3] *A. Nijenhuis*: Theory of geometric object, Amsterdam 1952.

Karel Čulík, Brno

O PARALELNÍM PRŮMĚTU ORTONORMÁLNÍ BASE

(Referát V. Havla o přednášce konané v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 3. února 1958 v Brně)

V referátu byly dokázány tyto tři věty:

1. *Soustava vektorů* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$, *vytvářejících v* E_n *m-rovinu, kde* $n \geqq 2m - 1$, *je v* E_n *vždy paralelním průmětem ortonormální base.*

2. *Soustava vektorů* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$, *vytvářejících v* E_n *m-rovinu, kde* $n \leqq 2m - 1$, *je v* E_n *paralelním průmětem ortonormální base právě tehdy, když charakteristická čísla matice* $(\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j)_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n}$ *splňují při vhodném uspořádání relace* $g_1 \geqq \ldots \geqq g_{n-m} \geqq g_{n-m+1} = \ldots = g_m > g_{m+1} = \ldots = g_n = 0$.

3. *Soustava vektorů* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *vytvářejících v* E_n *m-rovinu je v* E_n *kolmým průmětem ortonormální base právě tehdy, když pro charakteristická čísla matice* $(\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j)_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n}$ *platí relace* $g_1 = \ldots = g_m > g_{m+1} = \ldots = g_n = 0$.

Tyto tři věty zobecňují předchozí výsledky E. Stiefela (1937), H. Hadwigera (1940) a H. Naumanna (1957). Důkaz těchto vět byl proveden metodami lineární algebry užitím transformací symetrických matic na diagonální tvar. První dvě věty jsou přirozeným zobecněním klasické věty Pohlkeovy, věta 3 je analogií klasické věty Gaussovy-Weissbachovy.

Václav Havel, Brno

O ROZKLADU NEAFINNÍ SINGULÁRNÍ KOLINEACE VE SHODNOST A PROJEKCI

(Referát V. Havla o přednášce původně nazvané „Sdružené desarguesovské konfigurace" konané v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 10. března 1958 v Brně)

V rozšířeném referátu byl formulován problém, za jakých podmínek lze danou neafinní singulární kolineaci $\varkappa$ rozšířeného prostoru E_n na vlastní m-rovinu A rozložit ve shodnost a centrální projekci. Formulace je volena tak, aby neužívala souřadnicového systému.

Nutno rozlišovat případy $n = m + 1$, $n > m + 1$, které vedou ke zcela odlišnému řešení: