M. S. Manolov

Sur l'existence des petites oscillations relatives d'un système de pendules invariablement relié à une sphère en rotation uniforme

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 2, 206--208

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108544`

Důsledek. Nechť α je ostrý úhel, pro nějž platí $\cos\alpha = \delta : r$ a nechť $\varepsilon_0 = (r - \delta) : \left(r \,.\, \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$. Pak právě pro $r > \delta$, $1 : \varepsilon < \varepsilon_0$ je f-křivka hyperbolou s vedlejší osou o.

Nahradíme-li v definici f-křivky, resp. F-křivky kružnice k, ${}^1k$, ${}^2k$ kulovými plochami Φ, ${}^1\Phi$, ${}^2\Phi$ a přímku p rovinou ϱ reálného resp. komplexního prostoru, dospíváme k definici f-plochy, resp. F-plochy. Platí pak tyto dvě věty:

Věta 5. *Pojmy f-plocha, F-plocha a rotační kvadrika jsou identické.*[9]) *Kulové plochy Φ, ${}^1\Phi$, ${}^2\Phi$ jsou dané ploše vepsány a ϱ je rovinou dotykové kružnice.*

Věta 6. *Rovinným průnikem rotační kvadriky je f-křivka, resp. F-křivka.* Určující údaje pro tuto f-křivku, resp. F-křivku vyplývají z určujících údajů pro danou rotační kvadriku jakožto f-plochu, resp. F-plochu.

Věta 6 je naším nejzazším zobecněním klasické Dandelinovy věty ve smyslu podaném v úvodu referátu.

Jednoduché kvadriky pouze s eliptickými body lze odvodit užitím dvou perspektivních kolineací z plochy kulové a touto elementární cestou lze vybudovat geometrii kvadrik pouze s eliptickými body. Při budování geometrie přímkových kvadrik lze vyjít od rotačního přímkového hyperboloidu a od něho přejít perspektivní kolineací k nerotačnímu přímkovému hyperboloidu a k hyperbolickému paraboloidu. Vtipně užívá tohoto postupu F. Hohenberg,[10]) avšak užívá pojmu algebraická plocha. Věta 3 dovoluje však obejít pojem algebraické plochy při důkazu, že rovinné průniky plochy jsou kuželosečky.

Poznámky. [1]) Monatshefte f. Math. *62* (1958), 1—15. [2]) Čas. pro pěst. mat. *44* (1915), 257—268. [3]) Čas. pro pěst. mat. *46* (1917), 65—71. [4]) Písmenem f zdůrazňujeme, že jde o zobecnění fokálních vlastností. [5]) Vyjímáme přitom kružnice. [6]) Písmenem F opět zdůrazňujeme zobecnění fokálních vlastností. [7]) Vyjímáme průnik kuželové plochy vrcholovou nesečnou rovinou a rovinou kolmou k ose rotace. [8]) Viz práci, citovanou v třetí poznámce. [9]) Vyjímáme plochu kulovou. [10]) F. Hohenberg, Konstruktive Geometrie für Techniker, Wien 1956, str. 141—142.

Václav Havel, Brno

SUR L'EXISTENCE DES PETITES OSCILLATIONS RELATIVES D'UN SYSTÈME DE PENDULES INVARIABLEMENT RELIÉ À UNE SPHÈRE EN ROTATION UNIFORME

(Conférence de M. S. Manolov (Sofia, Bulgarie) faite le 4 novembre 1958 à l'Ecole Polytechnique de Prague)

Dans le travail [1] nous avons considéré le problème des petites oscillations d'un système de pendules dans le cas où le plan de leur mouvement effectue un mouvement d'entraînement supplémentaire qui est une rotation uniforme autour d'un axe. Nous avons supposé nul l'angle α entre le plan des oscillations relatives et l'axe de rotation.

Ici nous donnerons un résultat dans le cas de deux pendules quand l'angle α est arbitraire. Plus exactement le nouveau problème peut se formuler de la façon suivante:

Une sphère tourne autour d'un axe fixe l avec une vitesse angulaire ω constante (fig. 1). Soit Q un point fixe sur la sphère. Soit G le centre de la sphère. Par suite de la rotation de la droite GQ autour de l'axe l l'angle α ne change pas. Au point A_1 sur GQ en dehors de la sphère est suspendu le pendule A_1A_2 qui représente une tige matérielle homogène de masse m et de longueur $2a$. Au point A_2 est suspendu un second pendule A_2A_3 de al même espèce de masse m et de longueur $2a$. Soit G_i le centre de gravité du pendule A_iA_{1+i}, $i = 1, 2$. En chacun des points G_1 est appliquée une force dirigée vers la sphère. Soit mq la grandeur de cette force. Les articulations en A_1 et A_2 sont telles que le plan de mouvement μ du système de pendules fait un angle de 90° avec le plan tournant, celui-ci étant déterminé par GQ et l. Désignons par α l'angle entre l'axe de rotation l et la droite GQ. Sur la figure 1 on voit le système de référence relatif $OXYZ$. Soit R la distance OA_1. Le mouvement relatif du système est déterminé par les angles Θ_i, $i = 1, 2$.

Nous avons établi le résultat suivant:

Soit

$$\omega^2 < 6q \frac{9R \sin 2\alpha + 4a(7 - 13 \sin^2 \alpha) - 8a \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha + 7}}{27R^2 \sin^2 2\alpha + 24Ra \sin 2\alpha(7 - 13 \sin^2 \alpha) + 16a^2(55 \sin^4 \alpha - 62 \sin^2 \alpha + 7)}$$

où le rapport $\frac{R}{a}$ *n'annule pas le dénominateur, et*

$$\omega^2 < \frac{9q}{8a \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha + 7}}$$

lorsque ce dénominateur est nul;[1]) *soit enfin* ω^2 *un nombre positif quelconque lorsque* $\alpha = 90°$. *Dans ces conditions la position* $\Theta_i = 0$, $i = 1, 2$ *est une position stable et le système dynamique considéré possède, au voisinage de cette position, un petit mouvement périodique de période* $2\frac{\pi + \delta}{K_1}$, *où* δ *est suffisamment petit. Une première approximation de cette oscillation périodique est le mouvement défini par les formules*

$$\Theta_\nu = \lambda \frac{\lambda_{1\nu}}{K_1} \sin K_1 t, \ \dot{\Theta}_\nu = \lambda\lambda_{1\nu} \cos K_1 t; \ \nu = 1, 2$$

où λ *est suffisamment petit en valeur absolue. Les quantités* λ_{i1} *et* λ_{i2} *se déterminent par les rapports*

$$\frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i1}} = \frac{18q - 32aK_i^2 - \omega^2(32a - 44a \sin^2 \alpha + 9R \sin \alpha 2)}{12a(K_i^2 + \omega^2)},$$

$i = 1, 2$.

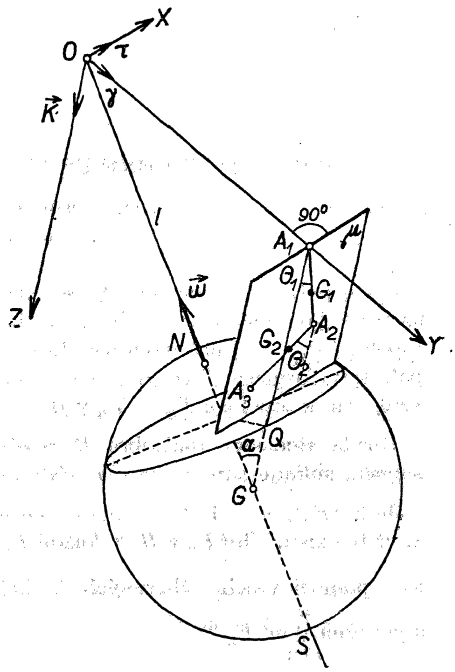

Fig. 1.

Enfin les nombres K_i *sont définis par les relations*

$$28aK_i^2 = \pm 4\sqrt{4a^2 \sin^4 \alpha \,.\, \omega^4 + 7[2q + (6a \sin^2 \alpha - R \sin 2\alpha)\,\omega^2]^2} - \omega^2(28a + 21R \sin 2\alpha - 124 \sin^2 \alpha) + 42q, \quad i = 1, 2$$

ayant en vue que $K_i > 0$ *et* $K_1 > K_2$.

---

[1]) Ceci n'est possible que si $\sqrt{\frac{7}{55}} < \sin \alpha < 1$ et

$$\frac{R}{a} = \frac{4(13 \sin^2 \alpha - 7 + 2 \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha + 7})}{9 \sin 2\alpha}.$$

La démonstration se fait en divisant convenablement l'intervalle [0, 1] de variation de sin α et en considérant séparément chacun des sousintervalles.

Remarquons que pour $\alpha \approx 0$ et $q = g$ on obtient $\omega^2 < \dfrac{3g(\sqrt{7} - 2)}{2\sqrt{7a}}$. C'est un résultat qui se trouve dans notre travail [1].

Remarque. Sur la fig. 1, les vecteurs unitaires partant du point O doivent être dénotés par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ au lieu de τ et γ.

LITTÉRATURE

[1] *Манолов С.*: О существовании малых периодических движений вокруг положения относительного устойчивого равновесия одной механической системы. П. М. М., том *XIX*, в. 4, 1955. СССР.

S. Manolov, Sofia

O TOPOLOGII URČENÉ USPOŘÁDÁNÍM V BOOLEOVÝCH ALGEBRÁCH

(Vlastní referát o přednášce, kterou přednesl dr. KLAUS MATTHES v matematické obci pražské dne 1. prosince 1958)

Polouspořádaná množina M se nazývá *topologická*, shoduje-li se topologie $T_{M\times M}$ kartézského součinu $M \times M$, určená uspořádáním, s kartézským součinem $T_M \times T_M$ topologií T_M v M, určených uspořádáním. V každé topologické Booleově algebře B jsou pak transformace $T_1(x, y) = x \vee y$, $T_2(x, y) = x \wedge y$, $T_3(x) = \bar{x}$ spojitými zobrazeními vzhledem k topologii $T_B \times T_B$ v $B \times B$ a vzhledem k topologii T_B v B.

Každá Booleova σ-algebra B, v níž jsou booleovské operátory spojité v uvedeném smyslu, splňuje tuto *podmínku distributivnosti*:

Je-li $\{F_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, posloupnost neprázdných podmnožin množiny B, pro niž 1. vždy existuje inf F_n v B, 2. každá F_n obsahuje s a a b také nějaké $c \leqq a \wedge b$, pak existuje pomocí všech výběrových funkcí $\Phi \in \bigtimes_{n=1}^{\infty} F_n$ vytvořená dolní hranice $\bigwedge_{\Phi} (\bigvee_{n=1}^{\infty} \Phi(n))$ a je rovna $\bigvee_{n=1}^{\infty} \inf F_n$.*)

Každý σ-homomorfismus φ podalgebry H Booleovy σ-algebry B_1 do Booleovy σ-algebry B_2 může být právě jedním způsobem rozšířen na σ-homomorfismus Booleovy σ-algebry H', vytvořené algebrou H v B_1, do B_2, jestliže B_2 splňuje uvedenou podmínku distributivnosti.

Jak ukázal R. SIKORSKI, nemůže být požadavek distributivnosti vypuštěn. Z toho plyne: *Existují úplné Booleovy algebry, které nejsou topologické.*

Přechodem od prvků Booleovy algebry k odpovídajícímu rozkladu jednotky (k zobecněným charakteristickým funkcím) dostaneme:

Existují K-prostory V, v nichž zobrazení $T_1(x, y) = x \vee y$ množiny $V \times V$ do V není spojité vzhledem k topologiím $T_V \times T_V$ a T_V.

Klaus Matthes, Berlín

*) $\bigtimes_{n=1}^{\infty} F_n$ označuje kartézský součin množin F_n.