Časopis pro pěstování matematiky

Miroslav Novotný; Karel Svoboda; Miloš Zlámal

K šedesátinám Otakara Borůvky

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 2, 236--1,237--250

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108543

K ŠEDESÁTINÁM OTAKARA BORŮVKY

MIROSLAV NOVOTNÝ, KAREL SVOBODA a MILOŠ ZLÁMAL, Brno

Dne 10. května t. r. se dožívá šedesáti let vynikající československý matematik, člen korespondent Československé akademie věd Otakar Borůvka, profesor přírodovědecké fakulty Masarykovy university v Brně. S jeho jménem je nerozlučně spjat rozvoj matematiky v Československu, zejména pak na Moravě a na Slovensku. Jeho zásluhou se vytvořil pracovní kolektiv, který se svými výsledky zařadil na přední místo v našem matematickém životě. Zejména v posledních letech vytvořil prof. Borůvka z Brna pracoviště v oboru diferenciálních rovnic, které vyhledávají i zahraniční matematikové.

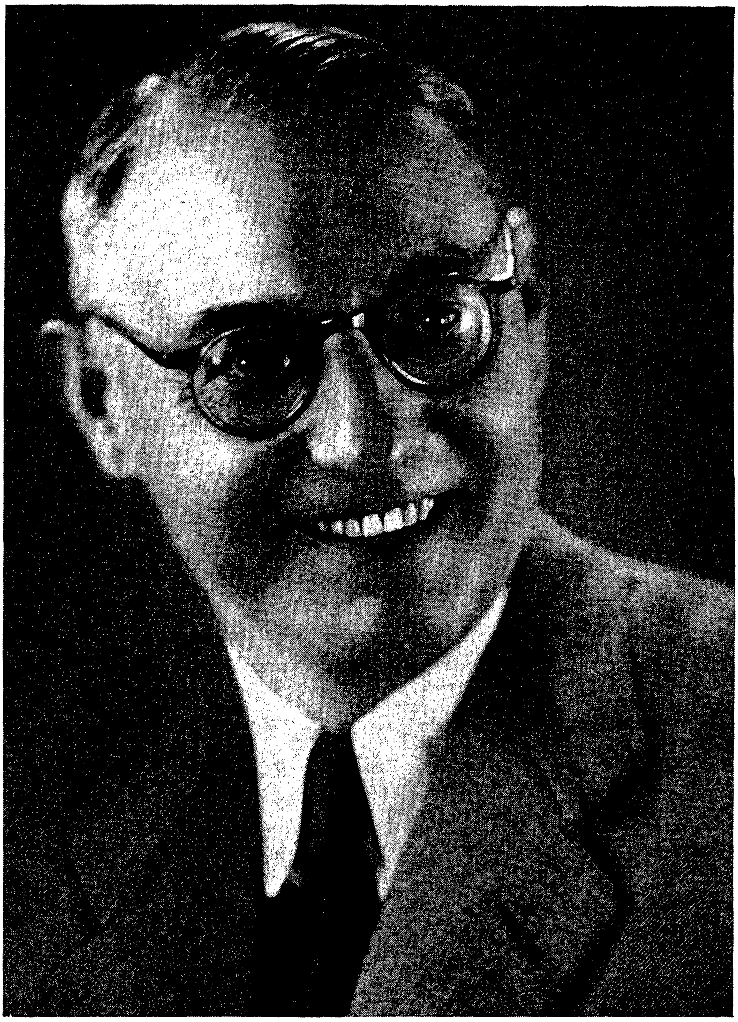
Bude proto jistě širokou matematickou veřejnost zajímat, jakými metodami práce se mu podařilo dosáhnout tak vynikajících výsledků a jaká byla jeho životní dráha, která dnes vrcholí významnými úspěchy.

Otakar Borůvka se narodil dne 10. května 1899 v Ostrohu, okr. Veselí nad Moravou, jako syn učitele. V letech 1918—1922 studoval na české vysoké škole technické v Brně a vykonal první státní zkoušku z oboru stavebního inženýrství. Současně v letech 1920—1922 byl mimořádným posluchačem přírodovědecké fakulty Masarykovy university v Brně; tam složil státní zkoušky a získal aprobaci z matematiky a z fysiky pro učitelství na tehdejších středních školách. V r. 1923 dosáhl doktorátu přírodních věd. Z učitelů na universitě měl na Borůvku největší vliv prof. M. Lerch, vynikající znalec a pěstitel klasické analysy, jenž upoutal Borůvkovu pozornost k této disciplině, jak o tom svědčí práce [1], [2], [4]*). Prof. E. Čech, který tehdy působil v Brně, usměrnil další Borůvkův vývoj k diferenciální geometrii a ke studiu Cartanova díla; aby se blíže seznámil s touto problematikou, odešel Borůvka v letech 1926—1927 a 1929—1930 do Paříže, kde studoval na Sorbonně u prof. E. Cartana. V zimním semestru studijního roku 1930—1931 studoval v Hamburku u prof. W. Blaschkeho. V r. 1928 se habilitoval ([5] a [7]).

Od r. 1920 působí O. Borůvka na vysokých školách. V r. 1920—21 byl asistentem při fysikálním ústavě české vysoké školy technické v Brně a v letech 1921—1934 asistentem matematického ústavu Masarykovy university v Brně. V r. 1928 mu byla nabídnuta profesura matematiky na universitě v Zagrebu; tu však nepřijal. Mimořádným profesorem matematiky na přírodovědecké fakultě Masarykovy university v Brně byl jmenován v r. 1934, řádným v r. 1946 s platností k 1. 5. 1940.

Během své učitelské činnosti vychoval prof. O. Borůvka řadu vědecky pracujících matematiků; skoro všichni brněnští matematikové, kteří začali vědecky pracovat po druhé světové válce, jsou jeho žáky. Připoutal je k sobě tím, že jim dovedl nalézt příležitost k samostatné práci v poměrně širokém okruhu problé-

*) Všechna čísla [...] se vztahují k části A seznamu literatury, pokud není nic jiného uvedeno.



PROF. OTAKAR BORŮVKA

člen korespondent ČSAV

mů, který zasahuje do abstraktní algebry, do teorie diferenciálních rovnic a do diferenciální geometrie. V posledních letech organisuje v Brně studium diferenciálních rovnic. Své spolupracovníky soustřeďuje v semináři pro studium diferenciálních rovnic, který vede již od r. 1946. Dnes se tento seminář koná v rámci činnosti Matematické komise ČSAV. Jeho úloha v brněnském matematickém životě je naprosto prvořadá. V tomto semináři začala řada brněnských i mimobrněnských matematiků (např. z Bratislavy a z Olomouce) svou vědeckou práci. Zde našli četné podněty i fórum, před kterým přednášeli své výsledky; především zde našli obětavého rádce a učitele, jakým prof. Borůvka je. V prvních letech byly v semináři studovány problémy existence a jednoznačnosti, metoda postupných aproximací a chování integrálů v okolí singulárního bodu. Později, a to od r. 1951, se soustředila práce tohoto semináře na lineární diferenciální rovnice 2. a vyšších řádů. Tuto práci prof. Borůvka zahájil tím, že přednesl referát o svém základním pojednání [40] a položil řadu problémů, které se týkaly pojmů, jež zde zavedl. Jeho spolupracovníci se pak snažili metody, kterými Borůvka studoval lineární diferenciální rovnici 2. řádu, přenést i na rovnice jiné. Tím připravují půdu k vytvoření teorie, která by vyčerpávajícím způsobem popsala chování integrálů lineární diferenciální rovnice n-tého řádu. O problematiku semináře projevili živý zájem i pracovníci university v Lublíně, kteří si s brněnskou universitou dojednali několik výměnných studijních cest.

Zájem o hlubší studium matematiky probouzí prof. Borůvka již ve svých posluchačích. Velmi podnětná je jeho učebnice [37], [39], která vyšla již ve dvojím vydání; nyní se připravuje rozšířené vydání německé, rumunské a české.

Velmi obětavě vypomáhal prof. Borůvka přednáškami i universitě v Bratislavě; za dlouhá léta svého působení našel i zde řadu schopných žáků.

Své bohaté zkušenosti pedagogické dává O. Borůvka ochotně k disposici jako předseda komise expertů pro matematiku při ministerstvu školství a kultury. Řadu let stál v čele Brněnské pobočky Jednoty československých matematiků a fysiků jako její předseda. O rozvoj matematického bádání pečuje prof. Borůvka také jako předseda publikační komise přírodovědecké fakulty university v Brně.

Vlastní vědecká práce prof. O. Borůvky se dá rozdělit do tří skupin: diferenciální geometrie, abstraktní algebra a analysa. Borůvkovy práce z klasické analysy vznikaly hlavně v letech 1923—1925, práce z diferenciální geometrie v letech 1924—1935, práce z algebry v letech 1936—1952 a práce z teorie diferenciálních rovnic od r. 1952 dosud.

Důležitou část vědecké činnosti prof. Borůvky tvoří jeho práce z diferenciální geometrie. Lze je rozděliti ve dvě skupiny, z nichž jedna obsahuje pojednání zabývající se otázkami projektivní diferenciální geometrie a druhá shrnuje práce z diferenciální geometrie ploch ve vícerozměrných prostorech s konstantní křivostí.

První Borůvkova geometrická práce [3] navazuje na výsledky G. FUBINIHO a E. Cartana o projektivní deformaci ploch. Na základě metody sdělené E. Čechem provedl Borůvka integraci systémů diferenciálních rovnic, jimiž jsou určeny jisté typy ploch, které lze projektivně deformovati v sebe. Až na jeden případ jsou v této práci určeny konečné rovnice ploch, při nichž grupa projektivních deformací v sebe, závislá na dvou parametrech, obsahuje podgrupu kolineací v sebe nebo při nichž všechny projektivní deformace jsou kolineacemi.

V pozoruhodných pracích [5] a [7], které vznikly z podnětu E. Čecha, jsou studovány poprvé v literatuře analytické korespondence mezi dvěma projektivními rovinami a odvozeny jejich vlastnosti invariantní vzhledem k dvojicím transformací projektivní grupy. Ke každé dvojici bodů odpovídajících si v korespondenci mezi dvěma rovinami lze přiřaditi projektivně invariantní kubickou diferenciální formu ψ, jejíž vymizení určuje tzv. charakteristické směry korespondence v uvažovaném bodě. Jejich geometrický význam je dán tím, že inflexnímu bodu křivky v jedné rovině odpovídá inflexní bod odpovídající křivky v druhé rovině tehdy a jen tehdy, když tečna křivky v uvažovaném bodě má charakteristický směr. Korespondence mezi dvěma rovinami jsou pak klasifikovány podle počtu charakteristických směrů ve čtyři druhy, a to korespondence prvního druhu se třemi charakteristickými směry, korespondence druhého druhu se dvěma charakteristickými směry, korespondence třetího druhu s jedním charakteristickým směrem a korespondence čtvrtého druhu, jejichž každý směr je charakteristický a které jsou totožné s projektivními příbuznostmi. V jednotlivých případech jsou odvozeny základní invarianty korespondence vzhledem ke grupě projektivních transformací a rozřešeny otázky jejich existence a obecnosti. Zvláštní pozornost je věnována korespondencím, jejichž charakteristické křivky jsou přímky. V případě korespondencí prvního druhu je nalezena obecná třída takových korespondencí, které mají vlastnost, že charakteristické přímky obalují v každé z obou rovin křivku třetí třídy. Nerozřešeným problémem zde zůstává otázka, zda existují další korespondence prvního druhu mající za charakteristické křivky přímky. V případě korespondencí druhého a třetího druhu jsou zjištěny všechny korespondence zmíněné vlastnosti a popsány jednoduchou geometrickou konstrukcí. Výsledky o analytických korespondencích mezi dvěma rovinami jsou stručně shrnuty v pojednání [8].

V práci [9], která navazuje na obecnou teorii korespondencí mezi dvěma rovinami, vyšetřuje Borůvka existenci a obecnost korespondencí, jejichž charakteristické křivky lze vyjádřiti rovnicí $dx^3 - dy^3 = 0$, a existenci a obecnost korespondencí, jejichž kubickou diferenciální formu ψ lze uvésti na tvar $dx^3 - dy^3$.

Další dvě práce týkající se projektivní diferenciální geometrie jednají o projektivní deformaci ploch. V práci [15] jsou mezi plochami, které připouštějí jednoparametrickou grupu projektivních transformací, určeny ty, které jsou současně v netriviální projektivní deformaci s jinými plochami.

V práci [16] si klade Borůvka za úkol vyšetření vlastností ploch, jejichž konjugovaná síť projektivní deformace je tvořena vrstvami Segre-Darbouxových křivek. V této souvislosti jest ukázáno, že požadované vlastnosti mají všechny plochy rotační a kromě toho čtyřparametrická soustava nerotačních ploch. Každá z těchto ploch je projektivně deformovatelná na jednoparametrickou soustavu rotačních ploch a každá rotační plocha je v deformaci opět s rotační plochou. Autor ukazuje, že existují takové rotační plochy, které lze projektivně deformovat na plochy, jež nejsou rotační.

Druhou a obsažnější část vědecké činnosti prof. Borůvky v geometrii tvoří jeho práce o plochách ve vícerozměrných prostorech s konstantní křivostí. K těmto úvahám přistoupil Borůvka z podnětu prof. E. Cartana v práci [10], v níž jsou studovány jisté minimální plochy čtyřrozměrného prostoru s konstantní křivostí, jimiž se v případě eukleidovského prostoru zabývali S. Kwietniewski, K. Kommerell, L. P. Eisenhart. V každém bodě plochy tvoří koncové body vektorů normální křivosti tzv. indikatrici normální křivosti. Indikatrix jest elipsa, která má v případě minimální plochy střed v příslušném bodě plochy. Ve zmíněné práci je dokázána obecnost a existence minimálních ploch, jejichž indikatrix je kružnice, a odvozena jejich zajímavá geometrická konstrukce. V této souvislosti se dochází k ploše, která je průmětem Veronesovy plochy z bodu neležícího na nadploše singulárních kuželoseček a která je mezi uvažovanými minimálními plochami neeukleidovského prostoru charakterisována tím, že poloměr indikatrice je konstantní. Tato práce byla v úplném znění uveřejněna také ve francouzském jazyce jako pojednání [11] a ve stručném výtahu jako [12].

V následující práci [14] se Borůvka zabývá minimálními plochami pětirozměrného prostoru s konstantní křivostí, jejichž indikatrix je kružnice. Zjišťuje obecnost a existenci těchto ploch a popisuje jejich charakteristické projektivní vlastnosti na základě vlastností konjugované sítě, která je na ploše tvořena minimálními křivkami. Jedním ze získaných výsledků je geometrická interpretace Guichardova problému a určena obecnost jeho řešení. V neeukleidovském prostoru existují plochy mající konstantní poloměr kružnice normální křivosti. Kromě existenčních otázek odvozuje autor jejich rovnice v konečném tvaru. Práce [13] mající týž název obsahuje stručný přehled výsledků pojednání [14].

Obsahem další práce [19] je studium křivek čtyřrozměrného eukleidovského prostoru, jejichž všechny křivosti jsou konstantní. Tyto křivky, zvané nadkružnice, mají řadu zajímavých vlastností, které jsou přirozeným zobecněním vlastností kružnice. V souvislosti s nadkružnicemi čtyřrozměrného prostoru byly zvláště studovány jisté parabolické plochy, které mají lokální vlastnost, že indikatrix normální křivosti v každém jejich bodě má vrchol v tomto bodě a konstantní poměr os. Autor vyšetřil podrobně jednotlivé typy těchto ploch a odvodil jejich jednoduchou geometrickou konstrukci. Stručný přehled dosažených výsledků byl uveřejněn v pojednání [20].

Na předcházející práci navazuje Borůvka v pojednání [22], v němž studuje plochy $2n$-rozměrného eukleidovského prostoru, jejichž indikatrix první normální křivosti má jeden vrchol v bodě plochy a konstantní poměr os a jejichž oskulační prostor řádu k ($k = 3, 4, \ldots, 2n - 2$) je v každém bodě plochy právě ($k + 2$)-rozměrný.

Ústřední postavení mezi Borůvkovými pracemi z metrické diferenciální geometrie zaujímá trojdílná práce [21], [26], [27]. V první z těchto prací je nejprve vypracována obecná teorie normální křivosti plochy v n-rozměrném prostoru s konstantní křivostí, opírající se o pojem indikatricí normální křivosti řádu k ($\geqq 1$); tyto křivky jsou množinami koncových bodů odpovídajících vektorů k-té normální křivosti všech křivek, které procházejí obecným bodem plochy v libovolném směru v jeho tečné rovině. Autor ukazuje, že tyto indikatrice jsou v každém bodě plochy racionálními uzavřenými křivkami. Podrobně si všímá případu, kdy indikatrice normální křivosti řádu k $\left(1 \leqq k \leqq \leqq m \leqq \frac{n}{2}\right)$ jsou v každém bodě plochy kružnicemi se středy v bodě plochy, a dokazuje, že plochy mající tyto vlastnosti existují v libovolném n-rozměrném prostoru s konstantní křivostí a že závisí obecně na $2(n - m - 1)$ funkcích jedné proměnné. V druhé ze zmíněných prací podává Borůvka rozšíření Frenetových vzorců pro analytické křivky r-rozměrného parabolického hermiteovského prostoru. V odvozených vzorcích se vyskytuje $r - 1$ reálných kladných analytických funkcí dvou reálných proměnných, které se nazývají skalární křivosti uvažované analytické křivky. Tyto funkce vyhovují $r - 1$ diferenciálním rovnicím, jejichž splnění je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby existovala analytická křivka, která má uvedené funkce za své skalární křivosti. Při daných skalárních křivostech vyhovujících zmíněným rovnicím je příslušná analytická křivka určena až na pohyby v uvažovaném hermiteovském prostoru. Úvahy o analytických křivkách hermiteovského parabolického prostoru jsou v úzké souvislosti se studiem ploch v $2r$-rozměrném eukleidovském prostoru, jemuž věnoval Borůvka poslední ze tří zmíněných prací. V isometrickém zobrazení r-rozměrného hermiteovského parabolického prostoru na $2r$-rozměrný reálný eukleidovský prostor jest obrazem každé analytické křivky hermiteovského prostoru charakteristická plocha (ve smyslu Levi-Civity) eukleidovského prostoru. Autor ukazuje, že plocha uvažovaného prostoru je charakteristickou plochou tehdy a jen tehdy, když všechny její indikatrice normální křivosti jsou v každém bodě plochy kružnicemi se středy v tomto bodě a odvozuje jednoduchý vztah mezi poloměry těchto kružnic a skalárními křivostmi příslušné analytické křivky. Z řady dalších pozoruhodných výsledků uveďme tvrzení, že v uvažovaném eukleidovském prostoru existuje právě jedna charakteristická plocha, která obsahuje danou reálnou analytickou křivku lineárního podprostoru dimense nejméně r a jejíž hlavní roviny protínají dva lineární, komplexně sdružené podprostory dimense $r - 1$, ležící na absolutní kvadrice prostoru. Pojednání [24] a [28] obsahují přehled předcházejících výsledků o analytických křivkách a o jejich reálném zobrazení charakteristickými plochami.

Myšlenkově na tyto práce navazuje Borůvka v pojednání [23], v němž se zabývá geometrickými vlastnostmi ploch $2r$-rozměrného projektivního prostoru, jejichž parametrické vyjádření je dáno $2r + 1$ lineárně nezávislými sférickými funkcemi prvního druhu řádu r. Tyto plochy byly předtím studovány s hlediska projektivního (G. Tzitzéica) i metrického (E. Cartan). Autor je definuje v projektivním prostoru soustavou diferenciálních rovnic, jejíž integrací dochází k rovnicím plochy v konečném tvaru. Na základě diskuse této soustavy zjišťuje, že uvažovaná plocha je množinou průsečíků dvojic oskulačních r-rozměrných prostorů sestrojených v imaginárně sdružených bodech racionální normální imaginární křivky stupně $2r$. Tato konstrukce ukazuje, že na uvažované ploše existuje konjugovaná síť křivek se stejnými invarianty, jejíž Laplaceova posloupnost se ukončí v obou směrech po r transformacích na křivce, pomocí níž je plocha vytvořena. K uvažované ploše lze přiřaditi regulární kvadriku, vzhledem k níž je uvedená křivka sdružena sama k sobě, a sestrojiti jednojednoznačné zobrazení bodů plochy na dvojice diametrálně protilehlých bodů koule. Autor studuje velmi podrobně geometrické vlastnosti tohoto zobrazení a odvozuje zajímavé projektivní vlastnosti uvažovaných ploch. V neeukleidovské metrice určené zmíněnou kvadrikou ukazuje souvislosti s úvahami E. Cartana a dokazuje, že každá uvažovaná plocha je minimální plochou, jejíž všechny indikatrice normální křivosti jsou kružnicemi s konstantními poloměry. V závěru práce ukazuje, že minimální plochy šestirozměrného neeukleidovského prostoru, jejichž všechny křivky mají tutéž konstantní normální křivost, jsou právě plochy vyjádřené sférickými funkcemi prvního druhu a třetího stupně. Přehled výsledků této práce byl uveřejněn v pojednání [17].

Do okruhu otázek, jimiž se Borůvka zabýval v předcházejících pracích, nepatří pojednání [18], v němž jsou vyšetřovány plochy, jejichž metrická normála splývá s Čechovou osou. Tento požadavek jest ekvivalentní s podmínkou, že Segreovy křivky na ploše jsou křivkami geodetickými. Autor nalezl dvouparametrickou soustavu takových ploch a ukázal, že patří do skupiny ploch W a že jejich hlavní poloměry křivosti vyhovují algebraické rovnici desátého stupně. Odvodil dále, že každá jiná plocha uvažovaných vlastností, pokud existuje, závisí nejméně na sedmi konstantách.

S výjimkou první geometrické práce užíval prof. Borůvka ve všech ostatních pojednáních Cartanovy metody pohyblivého reperu, jejímuž studiu z originálních Cartanových spisů se věnoval na popud akad. E. Čecha. Předcházející stručný přehled výsledků, kterých dosáhl, nám nedovoluje podrobně vyzvednouti dokonalé zvládnutí této metody a zběhlost v jejím použití k řešení různých problémů. Je však třeba zdůrazniti, že Borůvka byl prvním českým matematikem vůbec, který ve svých pracích užil Cartanovy metody, a že tak přispěl nemalou měrou k jejímu rozšíření u nás. Jeho zásluhy v tomto směru byly mezinárodně oceněny tím, že byl v r. 1952 zvolen v Paříži do čestného výboru, složeného z 50 předních světových matematiků; tento výbor vydal vědecké dílo E. Cartana. Na Borůvkovy práce navazuje řada matematiků domácích i zahraničních, jak o tom svědčí citáty jeho prací u jiných autorů a skutečnost, že některé jeho výsledky byly pojaty do učebnic diferenciální geometrie. Zvláště významnými a pro další vývoj geometrie důležitými jsou práce o analytických korespondencích, na jejichž základě vznikla v pozdější době celá řada prací budujících soustavně teorii korespondencí. Zmínky zasluhuje zejména geometrická škola v Bologni, jejíž problematika přímo vychází ze zmíněných Borůvkových prací. Přestože se prof. Borůvka věnoval v další své činnosti výhradně otázkám algebry a teorie diferenciálních rovnic a k vlastní tvůrčí práci v geometrii se nevrátil, neztratil zájem o současné dění v oboru diferenciální geometrie, zvláště pak v těch jejích úsecích, v nichž dříve pracoval.

Nepřihlížíme-li k drobné práci [29], pak všechny Borůvkovy algebraické práce se týkají grupoidů nebo rozkladů množin. Grupoidem rozumíme neprázdnou množinu G, v níž je k libovolné uspořádané dvojici prvků $a \in G$, $b \in G$ přiřazen jistý prvek $c \in G$; prvek c se nazývá součin prvků a, b a značí se jako ab; operace, která k prvkům a, b přiřazuje prvek ab, se nazývá násobení. O takto zavedené operaci násobení se obecně již nic nepředpokládá. Grupoidy se tedy jeví přirozeným zobecněním grup, v nichž toto násobení je podrobeno jistým zákonům. Grupoidy, v nichž násobení splňuje asociativní zákon, se nazývají asociativní grupoidy nebo pologrupy. V pracích [30], [31], [32] Borůvka studuje pologrupy (které zde nazývá multiplikativními systémy). Prvek a pologrupy nazývá prvočinitelem, když jej nelze vyjádřit jako součin dvou prvků pologrupy. Při studiu pologrup se pak omezuje na případ, kdy ke každému prvku a pologrupy existuje přirozené číslo α tak, že a lze vyjádřit jako součin nejvýše α prvků pologrupy (tzv. pologrupy bez jádra). V pologrupě bez jádra lze prvek a pak vyjádřit jako součin nejvýše α prvočinitelů. Pologrupa bez jádra se pak nazývá homogenní, když ke každému jejímu prvku a existuje přirozené číslo α tak, že při každém vyjádření prvku a ve tvaru součinu prvočinitelů je počet těchto prvočinitelů roven α. Taková homogenní pologrupa se dá vždy homomorfně zobrazit na množinu přirozených čísel, na níž je násobení definováno jako obyčejné sčítání. Přitom homomorfním zobrazením grupoidu G do grupoidu G^* rozumíme takové zobrazení, při němž obraz součinu dvou prvků z G je roven součinu obrazů těchto prvků. Borůvka dále konstruuje všechny homogenní pologrupy a vyšetřuje podrobně strukturu pologrup bez jádra. Při studiu homomorfních zobrazení pologrupy G do jiné pologrupy má základní důležitost jistý tzv. vytvořující rozklad pologrupy G.

Tyto myšlenky byly dále zobecněny a rozvedeny v práci [33], která měla býti prvním dílem rozsáhlejší práce o teorii grupoidů. Nejdůležitějším pomocným pojmem je zde pojem rozkladu v neprázdné množině M, jímž se rozumí libovolný neprázdný disjunktní systém podmnožin v M; jestliže tento systém podmnožin množinu M pokrývá, pak mluvíme o rozkladu na množině M. V této práci se Borůvkovi podařilo přenést na grupoidy hlavní výsledky své teorie pologrup vybudované v práci [31]. Další části práce o teorii grupoidů již nevyšly; plné využití pojmu rozkladu v teorii grupoidů je však obsaženo v učebnici [37]. Zde mezi všemi rozklady na grupoidu G nejvýznačnější roli hrají tzv. rozklady vytvořující; to jsou takové, že ke každé dvojici prvků $\bar{a}$, $\bar{b}$ vytvořujícího rozkladu $\overline{G}$ grupoidu G existuje další prvek $\bar{c} \in \overline{G}$ tak, že pro každé $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$ je $ab \in \bar{c}$. Klademe-li zde $\bar{a}\bar{b} = \bar{c}$, stává se rozklad $\overline{G}$ grupoidem; Borůvka jej nazývá faktoroidem. Je-li dáno homomorfní zobrazení h grupoidu G na grupoid G^*, pak toto zobrazení definuje na G jistý vytvořující rozklad; zvolíme-li $a^* \in G^*$, pak množina všech prvků $a \in G$ s vlastností $h(a) = a^*$ tvoří právě jeden prvek tohoto vytvořujícího rozkladu. Naopak je zase libovolný faktoroid na grupoidu G přiřazen uvedeným způsobem k vhodnému homomorfnímu zobrazení grupoidu G na vhodný grupoid G^*. Užitím těchto pojmů se podařilo Borůvkovi zformulovat tři věty o isomorfismu grupoidů; isomorfismem se zde rozumí prosté homomorfní zobrazení grupoidu G na grupoid G^*. Uvedeme z nich aspoň první: Je-li grupoid G^* homomorfním obrazem grupoidu G, pak existuje jistý faktoroid $\overline{G}$ na G isomorfní s G^*; je-li grupoid G^* isomorfní s jistým faktoroidem $\overline{G}$ na grupoidu G, pak je homomorfním obrazem grupoidu G. Teorie grupoidů se jeví přirozeným zobecněním teorie grup; hlavní věty teorie grupoidů přejdou v hlavní věty teorie grup, je-li násobení v grupoidu podrobeno axiomům grupy. Borůvkova učebnice [37] vyšla v druhém rozšířeném vydání [39]. Další podstatně rozšířené vydání vyjde pod názvem *Grundlagen der Gruppoid — und Gruppentheorie* v Německé demokratické republice a připravuje se také rumunské a nové české vydání.

Pojem faktoroidu, který Borůvka zavedl, se jeví přirozeným zobecněním pojmu faktorové grupy. Každá faktorová grupa na dané grupě G je vytvořena jistou podgrupou G_1 v G, která se nazývá invariantní podgrupa nebo též normální dělitel grupy G. Obráceně pak lze ke každé invariantní podgrupě grupy G přikonstruovat jistou faktorovou grupu. Faktorové grupy hrají podstatnou roli v teorii tzv. normálních řad grupy. Normální řadou grupy se rozumí řada podgrup grupy $G : G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_r = E$ takových, že podgrupa G_k je invariantní podgrupou grupy G_{k-1} pro $k = 1, 2, \ldots, r$ a E je podgrupa grupy G obsahující jen jednotku grupy G. Platí pak tzv. *Jordan-Hölder-Schreierova věta*: Každé dvě normální řady grupy G mají isomorfní zjemnění v tom slova smyslu, že do obou řad se dají zasunout další podgrupy tak, že vzniknou dvě normální řady se stejným počtem členů

$$G = F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_s = E\,, \quad G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_s = E\,;$$

přitom množina všech faktorových grup první řady tvaru F_{k-1}/F_k ($k = 1, 2, \ldots, s$) se dá prostě zobrazit na množinu všech faktorových grup druhé řady tvaru H_{k-1}/H_k ($k = 1, 2, \ldots, s$) tím způsobem, že sobě odpovídající faktorové grupy jsou isomorfní. Borůvkovi se tuto větu podařilo přenést na tzv. adjungované řetězce faktoroidů [34].

Pozornost Borůvkova se pak přesunovala na rozklady množin, které začal studovat nezávisle na teorii grupoidů. V pracích [35], [36] Borůvka podrobně studuje systém všech rozkladů v dané neprázdné množině M. V tomto systému se definuje relace uspořádání takto: pro dva rozklady $\overline{A}$, $\overline{B}$ tohoto systému klademe $\overline{A} \leqq \overline{B}$, když každý prvek $\overline{a} \in \overline{A}$ je částí nějakého prvku $\overline{b} \in \overline{B}$. Při této definici uspořádání tvoří systém všech rozkladů na množině M svaz; Borůvka zde studuje konstrukci supréma a infima dvou daných rozkladů v tomto svazu, jež nazývá nejmenším společným zákrytem a největším společným zjemněním obou rozkladů. Buďte $\overline{A}$, $\overline{B}$ dva rozklady na neprázdné množině M, $[\overline{A}, \overline{B}]$ jejich nejmenší společný zákryt. Jestliže pro libovolné dva prvky $\overline{a} \in \overline{A}$, $\overline{b} \in \overline{B}$, k nimž existuje prvek $\overline{u} \in [\overline{A}, \overline{B}]$ s vlastností $\overline{a} \subset \overline{u}$, $\overline{b} \subset \overline{u}$, platí $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, říkáme, že rozklady $\overline{A}$, $\overline{B}$ jsou doplňkové. Tento pojem je důležitý proto, že dva libovolné rozklady grupy ve třídy vytvořené invariantními podgrupami jsou doplňkové. Dále zde Borůvka studuje tzv. řady rozkladů, tj. konečné posloupnosti rozkladů na neprázdné množině M, z nichž každý je zjemněním předcházejícího. Tyto pojmy umožnily jednak velmi abstraktní pojetí věty Jordan-Hölder-Schreierovy, jednak našly aplikace v teorii klasifikací.

V práci [38] se studuje systém rozkladů v neprázdné množině M a zejména zase otázka existence a konstrukce supréma a infima daného systému rozkladů v množině M. Ke každému rozkladu v množině M se přiřazuje jistou konstrukcí rozklad v jejím kartézském čtverci; studuje se pak zejména, které pojmy se při tomto zobrazení zachovávají.

Prof. Borůvka byl jedním z prvních badatelů, kteří budovali a rozvíjeli teorii grupoidů, a tím podal nový metodický pohled na teorii grup. Rovněž patří k zakladatelům teorie rozkladů v množinách; společně s ním ji vybudovali P. Dubreil, M. L. Dubreil-Jacotinová a O. Ore. Prof. Borůvkovi také náleží zásluha, že pro teorii rozkladů našel aplikace v jiných odvětvích matematiky.

Poslední skupina prací O. Borůvky se týká analysy. Sem je především nutno zařadit práce [1], [2] a [4]. Jak už bylo řečeno, prvním učitelem O. Borůvky byl prof. Lerch, matematik světového jména. Pod vlivem Lerchových přednášek se Borůvka začal zabývat otázkami týkajícími se různých transcendentních funkcí. Výsledkem tohoto studia jsou právě práce [1], [2] a [4]. V pojednání [1], které je jeho doktorskou disertací, je vyšetřováno, jakých hodnot nabývá funkce gamma pro komplexní argument v okolí bodu $z = 0$, a výsledků je využito k nalezení komplexních kořenů rovnice $\Gamma(z) = a$. Práce obsahuje užitečné tabulky a je v ní opravena chyba nacházející se v Serret-Scheffersově učebnici *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung* (6.—7. vyd. 1921, II. d. str. 220). Jde o vzorec pro hlavní hodnotu funkce $\log \Gamma(z)$. V práci [2] Borůvka podrobně vyšetřuje známou transcendentní funkci $R(x, s)$ definovanou pro $\mathrm{R}(s) > 1$ řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^s}$. Speciální případ této funkce je Riemannova zeta funkce. Práce [4] obsahuje elementární důkaz Kummerova vzorce $\log \Gamma(x) = \log(2\pi + C)(\frac{1}{2} - x) + \frac{1}{2}\log \frac{\pi}{\sin \pi x} + + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \sin 2\pi n x$.

Než přejdeme k pracím o diferenciálních rovnicích, zmíníme se o pracích [44] a [46]. V r. 1945 prof. Borůvka založil v Brně „Seminář pro studium díla Matyáše Lercha". Jeho cílem bylo systematické studium a zhodnocení Lerchova matematického díla. V r. 1952 podjal se prof. Borůvka úkolu připravit se skupinou spolupracovníků kritické zhodnocení Lerchových prací z matematické analysy. Pojednání [44] představuje výsledek práce tohoto kolektivu. Prof. Borůvka kromě toho, že celý úkol vedl, napsal úvodní článek a článek o díle Matyáše Lercha v teorii funkce gamma. O tomto díle promluvil také v Berlíně v r. 1957 u příležitosti oslav 250. výročí narozenin L. Eulera. Přednáška vyšla tiskem (viz [46]). Prof. Borůvka zde uplatňuje své velké znalosti z teorie funkce gamma, kterých nabyl v prvních letech své vědecké práce.

Všechny zbývající Borůvkovy práce z analysy týkají se diferenciálních rovnic. Pojednání [25] nesouvisí však s ostatními; bylo napsáno podstatně dříve a v době, kdy prof. Borůvka se diferenciálními rovnicemi ještě soustavně nezabýval. Jsou v něm určeny všechny obyčejné lineární diferenciální rovnice v komplexním oboru s jednoznačnými analytickými koeficienty, jejichž grupa monodromie je hermiteovská. Ukazuje se, že tyto diferenciální rovnice jsou v úzkém vztahu s řešeními systému parciálních diferenciálních rovnic

$$\frac{\partial^2 \log |H_j|}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log |H_j|}{\partial y^2} = 4 \frac{H_{j-1} H_{j+1}}{H_j^2}$$

$$(j = 0, \ldots, n-1\,; \quad H_{-1} = 1\,, \quad H_n = 0)\,.$$

Tento problém byl už dříve řešen L. Schlesingerem pro $n = 2,3$. Avšak jeho metoda nestačila k rozřešení problému v obecném případě.

Nejvýznačnější prací prof. Borůvky z teorie diferenciálních rovnic je práce [40]. V ní vyšetřuje nulové body integrálů rovnice

$$y'' = Q(t)\, y\,. \tag{1}$$

To je problematika už od dob Sturmových velmi často studovaná. Prof. Borůvka definuje jisté funkce, které nazývá dispersemi, poněvadž popisují rozptyl nulových bodů integrálů a jejich derivací rovnice (1). Tyto funkce hrají fundamentální roli v celé další teorii. Uvedeme proto alespoň definici speciálního případu, tzv. centrálních dispersí: Nechť $n = 1, 2, \ldots$. a $y(t)$ (resp. $z(t)$) je netriviální integrál rovnice (1), který (resp. jehož první derivace) se rovná nule v čísle x. Potom $\varphi_n(x)$ $[\varphi_{-n}(x)]$ značí n-tý nulový bod řešení $y(t)$, $\psi_n(x)$ $[\psi_{-n}(x)]$ n-tý nulový bod funkce $z'(t)$, $\chi_n(x)$ $[\chi_{-n}(x)]$ n-tý nulový bod funlce $y'(t)$ a $\omega_n(x)$ $[\omega_{-n}(x)]$ n-tý nulový bod řešení $z(t)$, který následuje po číslu x [předchází číslu x]. Snadno se vidí, že na volbě integrálu $y(t)$ ($z(t)$) nezáleží, tj. že uvedené funkce jsou jednoznačně definovány. To jsou tzv. centrální disperse prvního, druhého, třetího a čtvrtého druhu. Podrobnou analysou prof. Borůvka dokazuje, že tyto disperse, jakož i obecnější třída tzv. vlastních dispersí vyhovují nelineární rovnici třetího řádu

$$-\{X, t\} + Q(X)\, X'^2 = Q(t)\,. \tag{2}$$

Přitom $\{X, t\}$ je tzv. schwarzovská derivace, a to $\{X, t\} = \frac{1}{2} \frac{X'''(t)}{X'(t)} - \frac{3}{4} \frac{X''^2(t)}{X'^2(t)}$. Dále platí, že je-li $y(t)$ integrál diferenciální rovnice (1) a $\zeta(t)$ vlastní disperse, potom $\frac{y(\zeta(t))}{\sqrt{|\zeta'(t)|}}$ je opět integrál diferenciální rovnice (1). Konečně prof. Borůvka ukázal, že nejen každá vlastní disperse je řešením rovnice (2), ale že platí i opak; kromě toho popsal konstrukci všech integrálů rovnice (2).

V úzké souvislosti s teorií dispersí, z jejíchž výsledků jsme uvedli jen ty hlavní, stojí pojednání [42] a [45], ve kterých prof. Borůvka zkoumá otázku vzájemné transformace integrálů rovnic $y'' = q(t)\, y$, $Y'' = Q(T)\, Y$. Prof. Borůvka vypracoval v [42] a [45] teorii těchto transformací. Jejím jádrem je analysa nelineární diferenciální rovnice $-\{X, t\} + Q(X)\, X'^2 = q(t)$. Význam této teorie spočívá v tom, že umožňuje transformovat rovnici obecného typu (1) na rovnici jednodušší, např. na rovnici $y'' = -y$. Jak teorie dispersí, tak i teorie transformací našla velké uplatnění nejen při vyšetřování lineárních rovnic druhého, ale i vyšších řádů. Uvádíme stručně výsledky, které nalezli členové semináře prof. Borůvky pomocí obou teorií: Nový způsob řešení okrajového problému 2. řádu, řešení některých okrajových problémů vyšších řádů, rozšíření Floquetovy teorie na diferenciální rovnice s neperiodickými koeficienty, nové výsledky o Abelově funkční rovnici $F[\varphi(t)] - F(t) = 1$, nové vlastnosti integrálů lineárních diferenciálních rovnic 3. a 4. řádu, určení všech diferenciálních rovnic (1) s ekvidistantními nulovými body integrálů, charakterisace trigonometrických funkcí splynutím třetí a čtvrté centrální disperse.

Práce [41] se týká systému lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Obyčejně se v učebnicích tento případ řeší tak, že transformací se systém převede na nový, kde místo původní matice koeficientů vystupuje Weierstrassův kanonický tvar této matice. Vedle Weierstrassovy teorie matic existuje však Weyrova teorie. Prof. Borůvka ukazuje, jak lze na řešení systému lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty aplikovat Weyrovu teorii. Tento způsob má tu výhodu, že vede k přehledným explicitním vzorcům pro integrály, vyjadřujícím algebraickou povahu problému.

V práci [43] se prof. Borůvka vrací k problematice, kterou se mnoho zabýval v prvních letech semináře i ve svých universitních přednáškách. Jde o otázku jednoznačnosti u rovnice $y' = f(x, y)$ (nebo systému, značí-li y a f vektory). Prof. Borůvka nalézá velmi obecné kriterium, které zahrnuje v sobě řadu známých kriterií jako podmínku Montelovu, Peanovu, Bompianiho a Nagumovu. Nedávno se ukázalo, že podmínka prof. Borůvky je také obecnější než známé kriterium Kamkeho uvedené v jeho knize *Differentialgleichungen reeller Funktionen.*

Problematiku zcela odlišnou od problematiky dosud uvedených prací má pojednání [6]. Jejím jádrem je řešení této úlohy: V rovině jest spojiti n daných bodů, jejichž vzdálenosti jsou vesměs různé, sítí tak, aby každé dva body byly spojeny buď přímo nebo prostřednictvím jiných a celková délka sítě byla při tom co nejmenší. Tato úloha řeší problém vyloženě praktické povahy, najít takový způsob spojení mnoha obcí elektrovodnou sítí, aby spotřeba drátu byla co nejmenší. Uvedená práce je dnes citována v literatuře polské, americké a anglické a problém sám se ukázal malou částí obsáhlé teorie nezávislostních funkcí.

Kromě těchto otázek se O. Borůvka zabývá také otázkami ideologickými. Tak např. v práci B [25] vidí souvislost mezi matematikou a realitou jednak v matematických pojmech, jednak v logickém systému, jehož matematika užívá. Všímá si zde podrobně podnětů, které jsou příčinami pokroku matematiky. Řada článků v populárních časopisech a v denním tisku dokazuje, že se prof. Borůvka stará i o popularisaci matematiky.

Je přirozené, že Borůvkova intensivní vědecká práce spočívá na důkladné znalosti světové literatury matematické. O živém Borůvkově zájmu o matematickou literaturu svědčí veliký počet (asi 200) referátů, které napsal pro *Zentralblatt für Mathematik*, *Mathematical Reviews* a *Referativnyj žurnal-matematika.*

Za tuto práci se O. Borůvkovi dostalo četných poct a vyznamenání. Tak např. v r. 1934 dostal cenu České akademie za své práce o n-rozměrné diferenciální geometrii. V r. 1948 konal na pozvání cyklus přednášek o svých výsledcích z algebry na universitách v Belgii, v r. 1955 o svých výsledcích z teorie diferenciálních rovnic v Polsku. R. 1953 byl zvolen členem korespondentem Československé akademie věd, v r. 1955 mu byl udělen titul doktora fysikálně-matematických věd.

Je vskutku pozoruhodné, že prof. Borůvka vedle své všestranné činnosti vědecké, pedagogické i výchovné dovede najít čas i příležitost k tomu, aby na své studenty a mladší spolupracovníky působil i po stránce společenské. Každoročně organisuje matematické výlety, jichž se zúčastňují matematikové z Brna, z Bratislavy i z Prahy. Tím se navazují přátelské styky mezi matematiky, které často přecházejí v styky odborné.

Bez prof. O. Borůvky si my, brněnští matematikové, neumíme zdejší matematický život vůbec představit. Přejeme proto jubilantovi, aby ještě po mnoho let mohl československé matematice prokazovat tak platné služby jako dosud.

SEZNAM PRACÍ PROFESORA OTAKARA BORŮVKY

A. Vědecké práce

1. O pomyslných kořenech rovnice $\Gamma(z) = a$. Spisy přír. fak. MU, č. *26*, 1923.
2. K teorii některých transcendent počtu integrálního. Spisy přír. fak. MU, č. *37*, 1924.
3. O jistých typech ploch, jež lze projektivně v sebe deformovati. Spisy přír. fak. MU, č. *43*, 1924.
4. Poznámka o vzorci Kummerově. Čas. pěst. mat. fys. *54*, 1925, 109—113.
5. Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs I. Spisy přír. fak. MU, č. *72*, 1926.
6. O jistém problému minimálním. Práce Moravské přírodovědecké společnosti, sv. *III*, spis 3, 1926, 37—58.
7. Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs II. Spisy přír. fak. MU, č. *85*, 1927.
8. Géométrie projective des correspondances analytiques entre deux plans. C. R. Acad. Sci. Paris *184*, 1927, str. 1518.
9. O korespondencích s charakteristickými křivkami o rovnici $dx^3 - dy^3 = 0$. Čas. pěst. mat. fys. *57*, 1928, 183—185.
10. O jistém typu minimálních ploch ve čtyřrozměrném prostoru o konstantní křivosti. Rozpravy II. tř. Čes. ak. *XXXVII*, 1928, č. 37.
11. Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante. Bulletin int. Acad. Tchèque Sci., 1928.
12. Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante. C. R. Acad. Sci. Paris *187*, 1928, str. 334.
13. Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante. C. R. Acad. Sci. Paris *187*, 1928, str. 1271.
14. Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante. Spisy přír. fak. MU, č. *106*, 1929.
15. Sur les surfaces projectivement déformables qui admettent un groupe de ∞^1 transformations projectives en elles-mêmes. C. R. Acad. Sci. Paris *189*, 1929, str. 964.
16. Sur les surfaces dont le réseau conjugué de déformation projective est formé par les lignes de Segre-Darboux. Bulletin Sci. math. *53*, 1929.
17. Sur les surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espèce. C. R. Acad. Sci. Paris *190*, 1930, str. 1336.

18. Sur les surfaces dont les lignes de Segre sont des géodésiques. Tôhoku Math. Journal *32*, 1930, 292—302.
19. Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Spisy přír. fak. MU, č. *146*, 1931.
20. Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. C. R. Acad. Sci. Paris *193*, 1931, str. 633.
21. Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante I. Spisy přír. fak. MU, č. *165*, 1932.
22. O jistých parabolických plochách v $2n$-rozměrných eukleidovských prostorech. Čas. pěst. mat. fys. *62*, 1932, 140—153.
23. Sur les surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espèce. Journal Math. pures appl. *12*, 1933, 337—383.
24. Sur une extension des formules de Frenet dans l'espace complexe et leur image réelle. C. R. Acad. Sci. Paris *197*, 1933, str. 109.
25. Über die partiellen Differentialgleichungen, denen hermitesche Formen genügen. Abh. math. Sem. Hamb. Univ. *11*, 1934, 65—72.
26. Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante II. Spisy přír. fak. MU, č. *212*, 1935.
27. Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante III. Spisy přír. fak. MU, č. *214*, 1935.
28. Sur les courbes analytiques dans les espaces hermitiens. Čas. pěst. mat. fys. *64*, 1935, 187—188.
29. Sur les matrices singulières, C. R. Acad. Sci. Paris *203*, 1936, str. 600 a 762.
30. Sur les systèmes multiplicatifs. C. R. Acad. Sci. Paris *204*, 1937, str. 1779.
31. Studies on multiplicative systems. Part I. Spisy přír. fak. MU, č. *245*, 1937.
32. Studies on multiplicative systems. Part II. Spisy přír. fak. MU, č. *265*, 1938.
33. Teorie grupoidů. Část první. Spisy přír. fak. MU, č. *275*, 1939.
34. Über Ketten von Faktoroiden. Math. Ann. *118*, 1941, 41—64.
35. O rozkladech množin. Rozpravy II. tř. Čes. ak. *LIII*, 1943, č. 23.
36. Über Zerlegungen von Mengen. Mitteilungen der Tschechischen Akad. der Wiss. *LIII*, 1943, Nr 23.
37. Úvod do teorie grup. Praha 1944, Královská česká společnost nauk.
38. Theorie rozkladů v množině. Část I. Spisy přír. fak. MU, č. 278, 1946.
39. Úvod do theorie grup. Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952.
40. О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка. Чехословацкий математический журнал *3* (*78*), 1953, 199—251.
41. Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty. Čas. pěst. mat. *79*, 1954, 151—155.
42. Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre. Annali di Matematica pura ed applicata, S. IV, T. *XLI*, 1956, 325—342.
43. Über eine Verallgemeinerung der Eindeutigkeitssätze für Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Acta Fac. rerum naturalium Univ. Comenianae, T. I., Fasc. IV—VI, Mathematica, 1956, 155—167.
44. Dílo Matyáše Lercha v oboru matematické analysy.
Dílo Matyáše Lercha v theorii funkce gamma. Práce Brněnské základny Československé akademie věd, *XXIX*, 1957, 417—419; 455—501; 539—540.
45. Théorie analytique et constructive des transformations différentielles linéaires du second ordre. Bulletin Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R. P. R. *1* (*49*), 1957, 125—130.

46. Mathias Lerch als Fortsetzer der Klassiker in der Theorie der Gammafunktion. Euler-Festschrift, Berlin 1959, 81—89.

B. Ostatní publikace

1. Příspěvek k otázce ekonomické stavby elektrovodných sítí. Elektrotechnický obzor *15*, 1926.
2. M. Lerch, Eliptické funkce. Čas. pěst. mat. fys. *56*, 1927, 205.
3. O jistém typu minimálních ploch ve čtyřrozměrném prostoru. Věstník VI. sjezdu čsl. přírodozpytců, lékařů a inženýrů v Praze 1928; III. díl, 1 (str. 15).
4. Přednášky prof. B. Hostinského v Paříži. Čas. pěst. mat. fys. *59*, 1930, str. 231.
5. E. Cartan, Leçons sur la géométrie projective complexe. Čas. pěst. mat. fys. *61*, 1932, 201—203.
6. Matematické práce ve Spisech, vydávaných přírodovědeckou fakultou Masarykovy university. Naše věda *XIII*, 1932, 176—177.
7. „Kruh". Naše věda *XIV*, 1933, str. 38.
8. O euklidovské geometrii. Věda a život *II*, 1935, 64—70.
9. O analytické geometrii. Věda a život *II*, 1936, 170—177.
10. O neeuklidovské geometrii. Věda a život *II*, 1936, 244—250.
11. Nová česká kniha o diferenciální geometrii. Lidové noviny 27. XII. 1937, str. 6.
12. V. Hlavatý, Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet. Naše věda *XIX*, 1938, 207—210.
13. V. Volterra — B. Hostinský, Opérations infinitésimales linéaires. Applications aux équations différentielles et fonctionnelles. Čas. pěst. mat. fys. *68*, 1939, str. D 31.
14. V. Volterra et B. Hostinský, Opérations infinitésimales linéaires. Applications différentielles et fonctionnelles. Paris, Gauthier-Villars 1938. 8° p. VII—239. Il Bolletino di Matematica *XXXV*, 1939, str. XVIII—XXI.
15. O klasických problémech matematických. Věda a život *VI*, 1939, 98—101.
16. Matematika a matematikové, Věda a život *VI*, 1939, 490—492.
17. O čtyřrozměrném prostoru. Věda a život *VIII*, 1941, 142—146.
18. Prof. dr. Ladislav Seifert šedesátníkem. Lidové noviny 18. IV. 1943, str. 4.
19. Jubileum vynikajícího českého matematika. Lidové noviny 29. VI. 1943, str. 4.
20. Profesor dr. Karel Čupr šedesátníkem. Lidové noviny 27. XII. 1943, str. 2.
21. Jubileum českého matematika. Lidové noviny 27. I. 1944, str. 3.
22. Vladimír Ryšavý, Vektory a tensory. Naše věda *XXIV*, 1946, str. 100.
23. Matice (skripta). První vydání 1947, druhé vydání 1948.
24. Karel Dusl. Naše věda *XXVII*, 1950, str. 117.
25. Úkoly a cesty matematiky. Práce Moravskoslezské akademie věd přírodních, sv. *XXIV*, 1952, spis 12.
26. Učebnice matematiky pro gymnasia s hlediska potřeb vysokých škol. Matematika ve škole *III*, 1953, 200—203.
27. Prof. dr. Karel Čupr sedmdesátníkem. Literární noviny 9. I. 1954.
28. Matyáš Lerch a jeho dílo. Čas. pěst. mat. *79*, 1954, 169—170.
29. O tvůrčí činnosti v matematice. Sborník I. ideologicko-methodologické konference přír. fak. univ. v Brně, konané ve dnech 17. a 18. února 1955. St. pedagogické nakladatelství, Praha, 1955, 29—34.
30. O klasických matematických problémech. Věda a život, 1957, 10—12.
31. Šedesátiny profesora Karla Koutského. Čas. pěst. mat. *82*, 1957, 493—497.
32. Návštěva prof. A. Bieleckého v ČSR. Čas. pěst. mat. *82*, 1957, 501—502.
33. Několik pohledů na moderní matematiku z hlediska vědecké práce v matematice u nás. Pokroky matematiky, fysiky a astronomie, *III*, 1958, 507—515.