1. Je-li $n = m + 1$, pak označme S singulární bod kolineace $\varkappa$ a N nadrovinu, která je úplným vzorem nevlastního útvaru nadroviny A v kolineaci $\varkappa$. Rozklad kolineace $\varkappa$ ve shodnost a projekci existuje právě tehdy, když kolineace $\varkappa$ převádí aspoň jednu nadrovinu $R \parallel N$ v nadrovinu podobnou.

Tuto podmínku lze vyjádřit konstruktivně užitím podobných simplexů anebo užitím ortogonální polarity.

Pro $n = 3$ provedl toto první konstruktivní vyjádření E. A. Mčedlišvili (1949), kdežto druhé E. Kruppa (1923), avšak závisle na souřadnicovém systému.

2. Je-li $n > m + 1$, pak označme S $(n - m - 1)$-rovinu singulárních bodů a N úplný vzor nevlastního útvaru m-roviny A v kolineaci $\varkappa$; dále volme kteroukoliv nadrovinu $R \parallel N$ a položme $\tilde{S} = R \cap S$. Rozklad dané kolineace $\varkappa$ ve shodnost a projekci existuje právě tehdy, jestliže v R lze nalézt m-rovinu B tak, že kolineace převádí B v m-rovinu podobnou.

Tuto podmínku lze převést na jinou, konstruktivně výhodnější, použijeme-li m-rovinu B' kolmou v R k $\tilde{S}$. Podrobná formulace této podmínky vyžaduje však řady dalších pojmů a přesahuje rámec stručného résumé. Speciálně pro $n \geqq 2m$ lze kolineaci $\varkappa$ vždy rozložit ve shodnost a projekci. Výsledky ad 2 zdají se být nové.

Václav Havel, Brno

O GEOMETRICKÉM VÝZNAMU NEASOCIATIVNÍCH TĚLES

(Referát V. Havla o přednášce konané v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 6. října 1958 v Brně)

Kvasitěleso je algebraická struktura[1]) s binárním sečítáním a násobením, přičemž aditivní systém[2]) je abelovskou grupou, multiplikativní systém[2]) je kvasigrupou s jednotkou, platí identity $a0 = 0$, $a(b + c) = ab + ac$ a rovnice $ax = bx + c$ je při $a \neq b$ jednoznačně řešitelná. V distributivním kvasitělese platí navíc identita $(b + c)\,a = = ba + ca$.

Geometrický význam distributivních kvasitěles s asociativním násobením, tj. komutativních a nekomutativních těles, je od dob Hilbertových dobře znám: Souřadnicemi z takovýchto těles lze opatřit právě ty geometrie, v nichž platí Desarguesova věta; při dimensi větší než 2 je předpoklad o Desarguesově větě nadbytečný.

Větu o geometrickém významu distributivních kvasitěles objevil v r. 1945 H. F. Gingenrich a uveřejnil ji bez důkazu ve výtahu své disertační práce.[3]) Důkaz uveřejnili v r. 1954 1954 H. Lenz,[4]) v r. 1955 G. Pickert[5]) a v r. 1957 R. Lingenberg.[6])

V tomto referátu je podán n o v ý d ů k a z Gingenrichovy věty, jímž má být problém osvětlen z dalšího hlediska.

Nejprve budiž upozorněno na některé pojmy, jichž bude v dalším užito.

Projektivní rovina je bodová množina s význačnými podmnožinami, tzv. přímkami, přičemž dva různé body jsou obsaženy vždy v jediné přímce, dvě různé přímky mají vždy jediný společný bod a existují čtyři body, z nichž žádné tři nejsou obsaženy v téže přímce.

Vybereme-li v projektivní rovině pevnou přímku, tzv. nevlastní přímku, jejíž všecky body prohlásíme opět za nevlastní, dostáváme se k afinní rovině.

V afinní rovině zvolme vlastní body O, E a nevlastní body U, V tak, aby žádné tři z nich neležely na téže přímce. Body O, E, U, V tvoří tzv. souřadnicový reper, přímky OU, OV jsou souřadnicovými osami x, y. Souřadnicový obor $\mathfrak{S}$ je potom množina vlastních bodů přímky OE.[7]) Bod O prohlásíme za nulu, bod E za jednotku. Každému vlastnímu bodu A přísluší x-ová souřadnice $VA \cap OE$ a y-ová souřadnice $UA \cap OE$. Naopak, uspořádanému páru prvků a, b z $\mathfrak{S}$ přísluší vlastní bod $Ub \cap Va$. Vlastní body identifikujeme s uspořádanými dvojicemi jejich souřadnic. Je-li $k \in \mathfrak{S}$, pak přímce $p = 0\ (1, k)$ přiřadíme „směrnici" k. Tutéž „směrnici" přiřadíme i všem přímkám rovnoběžným[8]) s přímkou p. Rovnoběžkám s osou y žádnou směrnici nepřiřazujeme.

Ternární operaci T nad $\mathfrak{S}$ definujeme takto: Rovnice $\eta = T(k, \xi, q)$ je ekvivalentní s tím, že bod (ξ, η) leží na přímce, která má směrnici k a prochází bodem $(0, q)$. Souřadnicový obor $\mathfrak{S}$ spolu s ternární operací T nazývá se ternárním tělesem. Binární sčítání a násobení nad $\mathfrak{S}$ je pak odvozeno z rovnic: $T(1, x, q) = x + q$, $T(k, x, 0) = kx$.

Zákonem rozložitelnosti rozumíme identickou rovnici $T(k, x, q) = kx + q$. V roce 1943 dokázal M. Hall, že ne každé ternární těleso splňuje zákon rozložitelnosti.[9])

Desarguesova věta zní v Pickertově formulaci takto: *Nechť $A_i, B_i, C_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i$ jsou proměnné body a přímky, přičemž*

$$C, A_i, B_i \in \gamma_i\,; \quad C_{ij}, A_i, C_j \in \alpha_{ij}\,; \quad C_{ij}, B_i, B_j \in \beta_{ij}\,;$$
$$C \neq A_i \neq B_i \neq C\,, \quad \gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \gamma_3 \neq \gamma_1\,, \quad \alpha_{12} \neq \alpha_{13}\,, \quad \beta_{12} \neq \beta_{13}\,; \quad C_{12}, C_{13} \in \gamma\,.$$

Potom $C_{23} \in \gamma$.

Dodatky. Bod C nazveme středem, přímku γ osou obou bodových trojic A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3. Je-li $C \in \gamma$, jde o malou Desarguesovu větu. Je-li osa γ nevlastní, jde o afinní Desarguesovu větu. Afinní rovina, v níž platí malá Desarguesova věta, nazývá se translační rovinou.

V r. 1943 odvodil M. Hall tuto větu:[9]) Každý souřadnicový obor translační roviny je kvasitělesem. Existuje-li souřadnicový obor afinní roviny, který je kvasitělesem,[10]) pak rovina je translační.

Hlavní teorém tohoto referátu pak zní:

V translační rovině platí malá Desarguesova věta pro pevný nevlastní střed nezávisle na poloze osy právě tehdy, když existuje souřadnicový obor, který je distributivním kvasitělesem.

Jak bylo již poznamenáno v úvodu, uvádí tento teorém jako prvý Gingenrich, Lenz a Lingenberg a dokazují jej užitím vhodných translací,[11]) Pickert užitím duality.[12]) V referátu byl pak podán nový důkaz teorému.

Bylo sestrojeno mnoho příkladů distributivních kvasitěles s neasociativním násobením (L. E. Dickson, A. A. Albert, R. H. Bruck), avšak většinou tato tělesa splňovala některou multiplikativní identitu, např. komutativní zákon $ab = ba$ nebo levý alternativní zákon $a \,.\, (ab) = a^2 \,.\, b$.

Obtížný problém vypracovat teorii volných distributivních kvasitěles rozřešil v nedávné době. L. A. Skornjakov.[13]) Jak se dá očekávat, umožní Skornjakovovy výsledky další propracování teorie nedesarguesovských rovin.[14])

Poznámky. [1]) N. Bourbaki, Algèbre, kap. II, str. 42. [2]) Aditivní systém je tvořen všemi prvky struktury, kdežto multiplikativní systém obsahuje všecky prvky struktury vyjma nuly. [3]) H. F. Gingenrich, Generalized fields and Desargues configurations, Abstr. of a Thesis, Urbana, *Ill*, 1945. [4]) Jahresbericht der deutsch. Math.-Ver. *57* (1954), str. 23. [5]) G. Pickert, Projektive Ebenen, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955. [6]) Math. Zeitschr. *67* (1957), str. 350—351, věta 40, str. 101. [7]) Symbol AB značí přímku, na níž leží body $A \neq B$. [8]) Dvě vlastní přímky pokládáme za rovnoběžné, mají-li společný nevlastní bod. [9]) Trans. Am. Math. Soc. *54* (1943), str. 229—277. [10]) Mlčky zde předpokládáme též platnost zákona rozložitelnosti. [11]) Translace je perspektivní kolineace s nevlastním středem i osou; viz Pickert, Projektive Ebenen, str. 66. [12]) Je zde míněna dualita mezi dvěma projektivními rovinami ve smyslu Pickertově; viz jeho Projektive Ebenen, str. 39—42. [13]) Podle sdělení o práci moskevského algebraického semináře. [14]) Poznámka o Skornjakovových výsledcích byla pořízena až po proslovení referátu.

Václav Havel, Brno