Časopis pro pěstování matematiky

Pavel Bartoš; Jan Vyšín

Lineární soustavy přímých podobností v rovině

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 2, 129--139

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108539`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 84 * PRAHA, 15. V. 1959 * ČÍSLO 2

LINEÁRNÍ SOUSTAVY PŘÍMÝCH PODOBNOSTÍ V ROVINĚ

PAVEL BARTOŠ, Zlaté Moravce a JAN VYŠÍN, Praha

(Došlo dne 3. dubna 1957) DT: 513.72

V tomto článku se studují jisté množiny přímých podobných zobrazení v rovině, které se nazývají lineární soustavy podobností.

Lineární soustavy podobností budeme definovat takto:

Definice 1. V eukleidovské rovině budiž dáno n navzájem různých bodů $B_1, B_2, \ldots, B_n$ a n přímek $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ($n \geqq 1$). *Lineární soustavou* (přímých podobností) nazveme množinu Σ_n všech takových přímých podobností, z nichž každá převádí body $B_1, B_2, \ldots, B_n$ v body, které leží po řadě na přímkách $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Bod $B_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ se nazývá *bodem baze* soustavy Σ_n, přímka p_ν je k němu *příslušná nositelka* soustavy Σ_n. Číslo n je tzv. *řád soustavy*.

Je výhodné počítat mezi podobnosti i tzv. singulární podobnosti. *Singulární podobnost* je zobrazení, které přiřaďuje všem bodům eukleidovské roviny týž bod roviny, zvaný *pól zobrazení*. K singulární podobnosti ovšem neexistuje podobnost inversní. Podobnosti v běžném slova smyslu (které jsou vzájemně jednoznačná zobrazení) budeme nazývat *regulární podobnosti*.

Početní vyjádření přímé podobnosti v komplexní souřadnici z je dáno funkcí

$$z' = az + b\,,$$

kde a, b jsou komplexní konstanty, z souřadnice vzoru, z' souřadnice obrazu. Pro $a \neq 0$ dostaneme podobnost regulární, pro $a = 0$ podobnost singulární s pólem $[b]$.[1])

Východiskem našeho výkladu budou soustavy 2. řádu. Uvedeme pro ně nejprve dvě pomocné věty:

Věta 1. *Budiž Σ_2 soustava 2. řádu s bazí B_1, B_2 a nositelkami p_1, p_2, budiž dále $\mathbf{P}_0$ regulární přímá podobnost. Pak množina $\mathbf{P}_0\Sigma_2$*[2]) *je soustava 2. řádu Σ_2' s bazí B_1', B_2' a nositelkami p_1, p_2; přitom je $B_1' = \mathbf{P}_0^{-1}(B_1)$, $B_2' = \mathbf{P}_0^{-1}(B_2)$.*[3])

[1]) Pro formální zjednodušení užíváme jedné komplexní souřadnice místo obvyklých dvou kartézských souřadnic. Symbol $[z]$ značí bod roviny o komplexní souřadnici z.

[2]) Symbol $\mathbf{P}_0\Sigma_2$ značí (jako běžně v teorii grup) množinu všech podobností, které vzniknou složením podobnosti $\mathbf{P}_0$ se všemi zobrazeními ze Σ_2.

[3]) Symbol $\mathbf{P}_0^{-1}(B_1)$ značí obraz bodu B_1 v podobnosti $\mathbf{P}_0^{-1}$.

Důkaz. Je-li $\mathbf{P} \in \Sigma_2$, je $\mathbf{P}_0\mathbf{P} \in \Sigma_2' = \mathbf{P}_0\Sigma_2$; je-li $\mathbf{P}' \in \Sigma_1'$, je $\mathbf{P}_0^{-1}\mathbf{P}' \in \mathbf{P}_0^{-1}\Sigma_2' = \Sigma_2$.

Definice 2. Náleží-li každý bod baze lineární soustavy Σ_n příslušné nositelce, nazveme soustavu Σ_n *zvláštní lineární soustavou.*

Věta 2. *Budiž Σ_2 soustava 2. řádu s bazí B_1, B_2 a nositelkami p_1, p_2. Buďte B_1', B_2' dva různé body, které leží po řadě na přímkách p_1, p_2. Pak existuje (aspoň jedna) regulární přímá podobnost $\mathbf{P}_0$ tak, že soustava $\mathbf{P}_0\Sigma_2$ je zvláštní.*

Důkaz. Přímou podobnost $\mathbf{P}_0$ určíme dvojicemi $B_1' \to B_1$, $B_2' \to B_2$.

Prvním naším úkolem bude získat analytické vyjádření zvláštních lineárních soustav 2. řádu a z něho odvodit některé jejich vlastnosti.

Věta 3. *Budiž Σ_2 zvláštní lineární soustava, jejíž baze jsou body $B_1 = [0]$, $B_2 = [1 + ki]$ a příslušné nositelky rovnoběžné přímky p_1, p_2 o rovnicích $z - \bar{z} = 0$, $z - \bar{z} = 2ki$ (k reálné).[4] Analytické vyjádření soustavy Σ_2 je pak dáno rovnicí*

$$z' = \frac{u + ki}{1 + ki} z + v \,, \tag{1}$$

kde parametry u, v probíhají navzájem nezávisle všecka reálná čísla.

Důkaz. Budiž $z' = az + b$ libovolná podobnost ze Σ_2. Podle předpokladu platí

$$b - \bar{b} = 0 \,, \quad a(1 + ki) + b - \bar{a}(1 - ki) - \bar{b} = 2ki \,. \tag{2}$$

Z rovností (2) vyplývá, že $b = v$ je číslo reálné a že imaginární část čísla $a(1 + ki)$ je k, tj.

$$a = \frac{u + ki}{1 + ki} \,,$$

kde u je vhodné číslo reálné.

Obráceně je zřejmé, že rovnice (1) vyjadřuje pro každou dvojici reálných čísel u, v podobnost ze soustavy Σ_2.

Poznámka. Rovnice (1) vyjadřuje nejobecnější zvláštní soustavu s rovnoběžnými nositelkami. Pro $k = 0$ obě nositelky splynou, body baze jsou pak [0], [1], což jsou dva libovolné body osy reálných čísel při vhodné volbě jednotkové úsečky.

Nyní budeme zkoumat obrazy daného bodu Z ve všech podobnostech soustavy Σ_2. Tak dostaneme jistou množinu, kterou označíme $\Sigma_2(Z)$. Snadno ukážeme, že množina $\Sigma_2(Z)$ je buď celá rovina nebo přímka. Zavedeme definicí tyto názvy:

Definice 3. Budiž Σ_2 lineární soustava 2. řádu. Bod Z, pro nějž je množina $\Sigma_2(Z)$ celá rovina, nazveme *regulárním bodem* (vzhledem k soustavě Σ_2); bod Z, pro nějž je množina $\Sigma_2(Z)$ přímka nebo její část, nazveme *singulárním bodem* (vzhledem k soustavě Σ_2).

[4]) Rovnici přímky v komplexní souřadnici píšeme zpravidla ve tvaru $\lambda(\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \beta) = 0$, kde α, λ jsou komplexní čísla různá od nuly, β je číslo reálné.

Je zřejmé, že každý bod baze soustavy je bodem singulárním.

Věta 4. *Zvláštní lineární soustava 2. řádu s rovnoběžnými nositelkami má nekonečně mnoho singulárních bodů, které vyplní přímku s spojující body baze; každý bod ležící mimo přímku s je regulární. Množina $\Sigma_2(Z)$ příslušná singulárnímu bodu Z je přímka rovnoběžná s nositelkami soustavy a procházející bodem Z.*

Důkaz. Rovnici (1) přepíšeme do tvaru

$$z' = \frac{z}{1 + ki}\, u + v + \frac{kiz}{1 + ki}\,. \tag{3}$$

Množina $\Sigma_2(Z)$ není celá rovina tehdy a jen tehdy, platí-li pro souřadnici z bodu Z vztah

$$\begin{vmatrix} \dfrac{z}{1 + ki} & \dfrac{\bar{z}}{1 - ki} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,, \tag{4}$$

neboli

$$(k + i)\, z + (k - i)\, \bar{z} = 0\,. \tag{5}$$

Singulární body vyplní tedy přímku o rovnici (5). Množina $\Sigma_2(Z)$ je pro každý singulární bod $Z = [z]$ přímka o parametrickém vyjádření (3). Tato přímka je vzhledem ke vztahu (4) rovnoběžná s reálnou osou, tj. s nositelkou $p_1(p_2)$ a obsahuje bod Z; neboť pro $u = 1$, $v = 0$ vychází z rovnice (3) $z' = z$.

Věta 5. *Budiž Σ_2 zvláštní lineární soustava s rovnoběžnými nositelkami p_1, p_2. Buďte dále B'_1, B'_2 dva její různé singulární body, Σ'_2 zvláštní soustava, jejíž bazí jsou body B'_1, B'_2 a jejíž nositelky jsou přímky p'_1, p'_2 rovnoběžné s p_1 a procházející po řadě body B'_1, B'_2. Pak soustavy Σ_2, Σ'_2 jsou totožné.*

Důkaz. Podle věty 4 každá podobnost ze Σ_2 náleží do Σ'_2 a každá podobnost ze Σ'_2 do Σ_2.

Věta 6. *Zvláštní lineární soustava Σ_2 s rovnoběžnými splývajícími nositelkami obsahuje nekonečně mnoho singulárních podobností; jejich póly vyplní nositelku. Zvláštní lineární soustava Σ_2, jejíž nositelky jsou různé rovnoběžky, neobsahuje žádnou singulární podobnost.*

Důkaz. Z rovnice (1) dostaneme singulární podobnost tehdy a jen tehdy, je-li

$$\frac{u + ki}{1 + ki} = 0\,,$$

tj. $u = -ki$. Číslo $-ki$ je reálné jen pro $k = 0$; pak dostaneme pro $u = 0$ a libovolné reálné v singulární podobnost jejíž pól je bod $[v]$.

Věta 7. *Budiž Σ_2 zvláštní lineární soustava, jejíž baze jsou body* $[1]$, $[z_0]$

a jejíž nositelky jsou různoběžné přímky p_1, p_2 o rovnicích $z - \bar{z} = 0$, $\alpha_1 z + \bar{\alpha}_1 \bar{z} = 0$. Analytické vyjádření soustavy Σ_2 je pak dáno rovnicí

$$z' = \left[-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\right) \frac{u}{z_0 - 1} + \frac{vi}{\alpha_1(z_0 - 1)} \right] (z - 1) + u\,, \tag{6}$$

kde parametry u, v probíhají navzájem nezávisle všecka reálná čísla.

Důkaz. Z předpokladů věty 7 vyplývají tyto podmínky:

$$z_0 \neq 1\,, \quad \alpha_1 + \bar{\alpha}_1 \neq 0\,, \quad (\text{a tudíž } \alpha_1 \neq 0)\,, \tag{7a}$$

a dále vztah

$$\alpha_1 z_0 + \bar{\alpha}_1 \bar{z}_0 = 0\,. \tag{7b}$$

Budiž $z' = az + b$ rovnice libovolné podobnosti ze Σ_2. Pak platí vztahy

$$a + b - \bar{a} - \bar{b} = 0\,, \qquad \alpha_1(az_0 + b) + \bar{\alpha}_1(\bar{a}\bar{z}_0 + \bar{b}) = 0\,. \tag{8}$$

Z první rovnosti (8) vyplývá, že číslo $a + b = u$ je reálné. Z druhé rovnosti (8) plyne, že komplexní číslo $\alpha_1 a(z_0 - 1)$ má reálnou část $-\frac{1}{2}(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)\, u$; je tedy

$$\alpha_1 a(z_0 - 1) = -\tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)\, u + vi\,,$$

neboli vzhledem k (7a)

$$a = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\right) \frac{u}{z_0 - 1} + \frac{vi}{\alpha_1(z_0 - 1)}\,,$$

a dále $b = u - a$. Odtud dostaneme rovnici (6).

Obráceně je zřejmé z rovnice (6), že obrazy bodu [1] leží na přímce $z - \bar{z} = 0$, obrazy bodu $[z_0]$ na přímce $\alpha_1 z + \bar{\alpha}_1 \bar{z} = 0$.

Poznámka. Rovnice (6) vyjadřuje libovolnou zvláštní soustavu s různoběžnými nositelkami, neboť vhodnou volbou jednotkové úsečky lze vždy dosáhnout toho, že jeden bod baze má souřadnici [1], je-li průsečík obou nositelek zvolen za počátek souřadnic.

Věta 7. *Zvláštní lineární soustava 2. řádu s různoběžnými nositelkami má nekonečně mnoho singulárních bodů, které vyplní kružnici s, procházející body B_1, B_2 a průsečíkem obou nositelek; každý bod ležící mimo kružnici s je regulární. Množina $\Sigma_2(Z)$ příslušná singulárnímu bodu Z je přímka procházející průsečíkem nositelek a bodem Z. Množina $\Sigma_2(Z)$ příslušná průsečíku obou nositelek je tečna kružnice s v tomto bodě.*

Důkaz. Rovnici (6) přepíšeme do tvaru

$$z' = \left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\right) \frac{z - 1}{z_0 - 1} \right] u + \frac{i}{\alpha_1} \frac{z - 1}{z_0 - 1}\, v\,. \tag{9}$$

Množina $\Sigma_2(Z)$ není celá rovina tehdy a jen tehdy, platí-li pro souřadnici z bodu Z vztah

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\right)\frac{z-1}{z_0-1} & 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha_1}{\bar{\alpha}_1}\right)\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}_0-1} \\ \frac{i}{\alpha_1}\frac{z-1}{z_0-1} & -\frac{i}{\bar{\alpha}_1}\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}_0-1} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{10}$$

Použijeme-li podmínek (7a), (7b), můžeme upravit vztah (10) na ekvivalentní tvar

$$(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)\, z\bar{z} - (\alpha_1 + \bar{\alpha}_1\bar{z}_0)\, z - (\bar{\alpha}_1 + \alpha_1 z_0)\, \bar{z} = 0\,. \tag{11}$$

Rovnice (11) vyjadřuje kružnici s, která prochází počátkem (průsečíkem obou nositelek).

Množina $\Sigma_2(Z)$ pro libovolný bod Z kružnice s je přímka o rovnici (9); tato přímka prochází zřejmě počátkem, tj. průsečíkem obou nositelek.

Budiž $Z = [z]$ libovolný bod kružnice s různý od bodu [1]. Na přímce (9), totožné s přímkou $\Sigma_2(Z)$, leží bod $[z]$, který dostaneme pro $u = 0$, $v = -\dfrac{i\alpha_1 z(z_0 - 1)}{z - 1}$; skutečně toto číslo v je reálné, jak zjistíme, vypočteme-li rozdíl $\bar{v} - v$ a použijeme vztahů (7b), (11).

Přímka $\Sigma_2(Z)$ pro bod $Z = [0]$ má podle (9) parametrické vyjádření $z = -\dfrac{i}{\alpha_1}\dfrac{t}{z_0 - 1}$. Její společné body s kružnicí s mají parametry, které jsou řešením rovnice

$$(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)\, t^2 + i[(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1\bar{z}_0)\,\bar{\alpha}_1(\bar{z}_0 - 1) - (\bar{\alpha}_1 + \alpha_1 z_0)\,\alpha_1(z_0 - 1)]\, t = 0\,. \tag{12}$$

S použitím vztahu (7b) snadno dokážeme, že koeficient při t v rovnici (12) je roven nule. Proto má rovnice (12) jediný kořen $t = 0$ a přímka $\Sigma_2(Z)$ je tečnou kružnice s v bodě [0].

Věta 8. *Budiž Σ_2 zvláštní lineární soustava s různoběžnými nositelkami p_1, p_2 s průsečíkem Q. Buďte dále B_1', B_2' dva její různé singulární body, Σ_2' zvláštní soustava, jejíž bazí jsou body B_1', B_2' a jejíž nositelky jsou přímky QB_1', QB_2'.*[5]) *Pak jsou soustavy Σ_2, Σ_2' totožné.*

Věta 8 plyne z věty 7 podobně jako věta 5 z věty 4.

Věta 9. *Zvláštní lineární soustava Σ_2 s různoběžnými přímkami obsahuje jedinou singulární podobnost; její pól je průsečík obou nositelek.*

[5]) Je-li např. $B_1' \equiv Q$, nahradíme přímku QB_1' tečnou kružnice singulárních bodů v bodě B_1'.

Důkaz. Podobnost (6) ze soustavy Σ_2 je singulární tehdy a jen tehdy, je-li

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\right)\frac{u}{z_0-1}+\frac{vi}{\alpha_1(z_0-1)}=0\,,$$

neboli $(\alpha_1+\bar{\alpha}_1)\,u=2vi$, což nastane jedině pro $u=v=0$.

Poznámka. Je možné, že jeden z bodů baze splyne s průsečíkem obou nositelek. Pak je příslušná nositelka tečnou kružnice singulárních bodů, jak vyplývá z rovnice (11), dosadíme-li tam $z_0=0$.

Pomocí vět 1, 2 lze převést vlastnosti zvláštních soustav 2. řádu na libovolné soustavy. Libovolnou soustavu 2. řádu lze psát ve tvaru

$$\Sigma_2=\mathbf{P}_0\Sigma_2'\,, \tag{13}$$

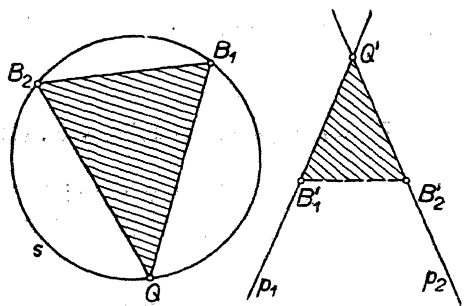
kde $\mathbf{P}_0$ je regulární podobnost, Σ_2' je zvláštní soustava s týmiž nositelkami jako Σ_2. Je zřejmé, že pro množinu obrazů libovolného bodu Z platí

$$\Sigma_2(Z)=\Sigma_2'(\mathbf{P}_0(Z))\,. \tag{14}$$

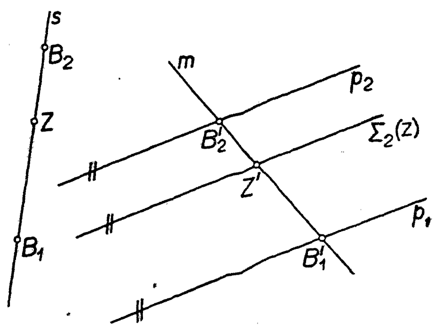
Ze vztahu (14) vyplývá věta 11:

Věta 11. *Budiž Σ_2 libovolná soustava 2. řádu, $\mathbf{P}_0$ regulární přímá podobnost, Σ_2' zvláštní lineární soustava tak, že platí $\Sigma_2=\mathbf{P}_0\Sigma_2'$. Pak bod Z je regulárním (singulárním) bodem soustavy Σ_2 tehdy a jen tehdy, je-li bod $\mathbf{P}_0(Z)$ regulárním (singulárním) bodem soustavy Σ_2'.*

Z věty 11 vyplývá, že množina $\mathbf{S}$ singulárních bodů soustavy Σ_2 je obrazem množiny $\mathbf{S}'$ singulárních bodů soustavy Σ_2' v podobnosti $\mathbf{P}_0^{-1}$.



Obr. 1.



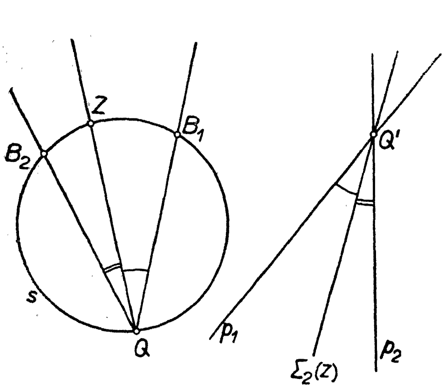
Obr. 2.

Dále je ze vztahu (13) patrno, že podobnost $\mathbf{P}=\mathbf{P}_0\mathbf{P}'$ ze soustavy Σ_2 je singulární tehdy a jen tehdy, je-li singulární podobnost $\mathbf{P}'$ ze soustavy Σ_2'; póly singulárních podobností obou soustav Σ_2, Σ_2' jsou zřejmě tytéž. Můžeme tedy vyslovit následující větu:

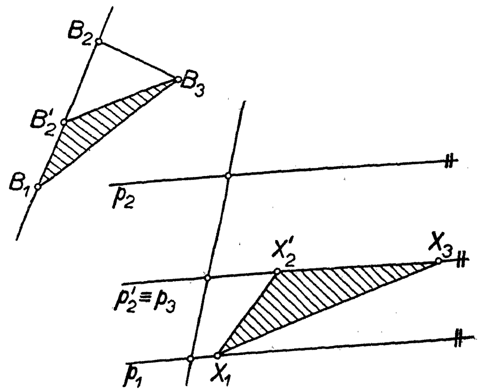
Věta 12. *Singulární body soustavy Σ_2 s bazí B_1, B_2 a rovnoběžnými nositelkami p_1, p_2 vyplní přímku B_1B_2. Singulární body soustavy Σ_2 s bazí B_1, B_2 a různoběžnými nositelkami p_1, p_2 vyplní kružnici, která prochází body B_1, B_2.*

Kružnici singulárních bodů v posledním případě sestrojíme takto (obr. 1): Označíme Q' průsečík obou nositelek p_1, p_2, sestrojíme na přímkách p_1, p_2 po řadě body $B'_1 \not\equiv Q'$, $B'_2 \not\equiv Q'$ třeba tak, aby platilo $B'_1Q' = B'_2Q'$. Dále sestrojíme trojúhelník B_1B_2Q přímo podobný trojúhelníku $B'_1B'_2Q'$. Kružnice s opsaná trojúhelníku B_1B_2Q je kružnice singulárních bodů dané soustavy Σ_2. Označíme-li Σ'_2 zvláštní soustavu s bazí B'_1, B'_2 a nositelkami p_1, p_2, je podobnost $\mathbf{P}_0$ ze vztahu (13) přímá podobnost, určená dvojicemi $B_1 \to B'_1$, $B_2 \to B'_2$.

Je třeba se ještě zmínit o konstrukci přímky $\Sigma_2(Z)$, je-li Z singulární bod soustavy Σ_2. Obr. 2 ukazuje tuto konstrukci pro soustavu Σ_2 s dvěma různými rovnoběžnými nositelkami p_1, p_2.[6]) Vedeme přímku m různoběžnou s přímkami p_1, p_2 a označíme průsečíky $B'_1 \equiv p_1 \,.\, m$, $B'_2 \equiv p_2 \,.\, m$. Na přímce m sestrojíme bod Z' tak, aby pro dělicí poměry platilo $(B_1B_2Z) = (B'_1B'_2Z')$; bodem Z' pak vedeme přímku $\Sigma_2(Z) \parallel p_1$.



Obr. 3.



Obr. 4.

Obr. 3 ukazuje konstrukci přímky $\Sigma_2(Z)$ pro singulární bod soustavy Z s dvěma různoběžnými nositelkami p_1, p_2. Na kružnici s singulárních bodů zvolíme libovolný bod Q (třeba na oblouku doplňkovém k oblouku $\widehat{B_1ZB_2}$) a ve svazku $Q'(Q' \equiv p_1 \,.\, p_2)$ sestrojíme přímku $\Sigma_2(Z)$ tak, aby trojice přímek QB_1, QZ, QB_2; p_1, $\Sigma_2(Z)$, p_2 byly přímo shodné.

Čtenář si snadno odůvodní obě konstrukce.

V dané soustavě Σ_2 lze změnit jistým způsobem bazi i nositelky, aniž se tím změní sama soustava. Platí totiž věta 13, která je rozšířením vět 5 a 9.

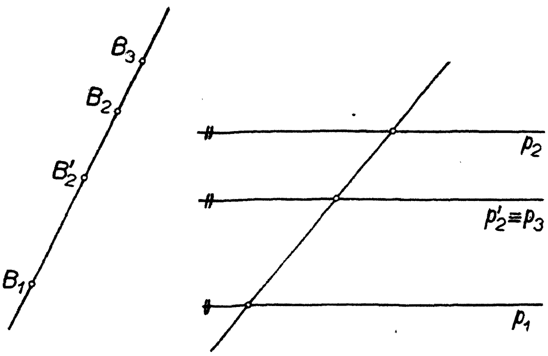
Věta 13. *Buďte C_1, C_2 dva různé singulární body soustavy Σ_2. Pak soustava Σ'_2 s bazí C_1, C_2 a nositelkami $\Sigma_2(C_1)$, $\Sigma_2(C_2)$ je totožná se soustavou Σ_2.*

Věta 13 vyplývá přímo z vět 5 a 9.

[6]) Je-li $p_1 \equiv p_2$, je $\Sigma_2(Z) \equiv p_1$ pro každý singulární bod Z.

Změnu baze a nositelek soustavy podle věty 13 budeme stručně nazývat *transformací baze soustavy*.

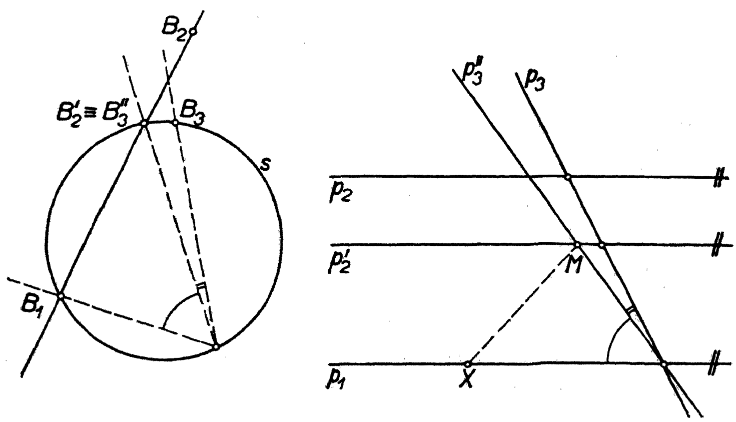
Nyní použijeme transformace baze soustavy Σ_2 ke studiu soustav vyšších řádů. Vyšetřování nebudeme provádět systematicky, ukážeme postup jen na několika příkladech, vztahujících se zejména k soustavám třetího řádu.



Obr. 5.

Příklad 1. Je dána soustava Σ_3, jejíž baze jsou tři nekolineární body B_1, B_2, B_3 a jejíž nositelky jsou tři různé rovnoběžky p_1, p_2, p_3. Máme určit všecky podobnosti soustavy Σ_3.

Řešení. Soustava Σ_3 je zřejmě průnik soustavy Σ_2^1 s bazí B_1, B_2 a nositelkami p_1, p_2 a soustavy Σ_2^2 s bazí B_1, B_3 a nositelkami p_1, p_3. Transformujeme bazi soustavy Σ_2^1 v bazi B_1, B_2' a nositelky p_1, $p_2' \equiv p_3$. To je možné, protože $p_1 \parallel p_2 \parallel p_3$; konstrukci ukazuje obr. 4. Dostaneme trojici nekolineárních bodů B_1, B_2', B_3; sestrojíme trojúhelník $X_1X_2'X_3$ přímo podobný trojúhelníku $B_1B_2'B_3$ tak, aby jeho vrchol X_1 ležel na přímce p_1 a vrcholy X_2', X_3 na přímce $p_2' \equiv p_3$. Označíme-li $\mathbf{P}_0$ regulární přímou podobnost, určenou dvojicemi $B_2' \to X_2$, $B_3 \to X_3$ a Γ grupu všech translací ve směru přímky p_1, je zřejmě $\Sigma_3 = \mathbf{P}_0\Gamma$.

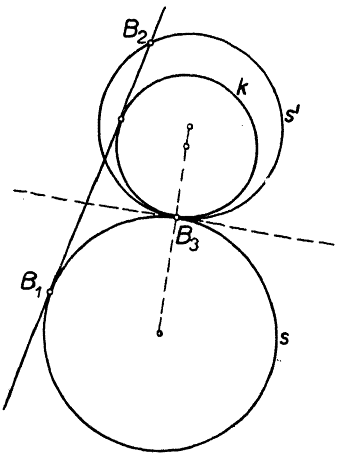


Obr. 6.

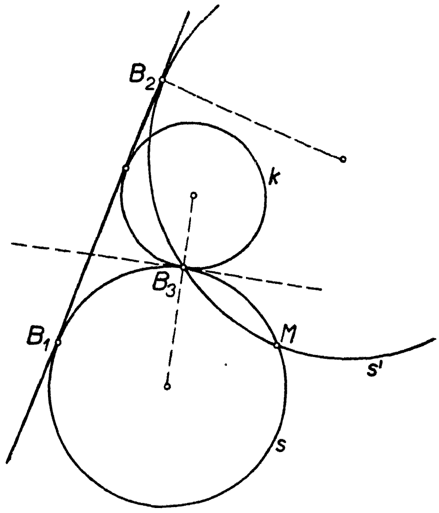
Příklad 2. Je dána soustava Σ_3, jejíž baze jsou tři různé kolineární body B_1, B_2, B_3 a jejíž nositelky jsou tři různé rovnoběžky p_1, p_2, p_3. Máme určit všecky podobnosti soustavy Σ_3.

Řešení. Postupujeme jako při řešení příkladu 1; dostaneme soustavu Σ_2^1 s bazí B_1, B_2' a nositelkami p_1, $p_2' \equiv p_3$, dále soustavu Σ_2^2 s bazí B_1, B_3 a nositelkami p_1, p_3. Průnikem obou soustav Σ_2^1, Σ_2^2 je soustava Σ_3. Je-li $B_2' \equiv B_3$ je zřejmě $\Sigma_3 = \Sigma_2^1 = \Sigma_2^2$; je-li $B_2' \not\equiv B_3$ (jako na obr. 5), je množina Σ_3 prázdná.

Příklad 3. Je dána soustava Σ_3, jejíž baze jsou tři nekolineární body B_1, B_2, B_3 a jejíž nositelky jsou dvě různé rovnoběžky p_1, p_2 a přímka p_3, která je obě protíná. Máme určit všecky podobnosti soustavy Σ_3.



Obr. 7a.



Obr. 7b.

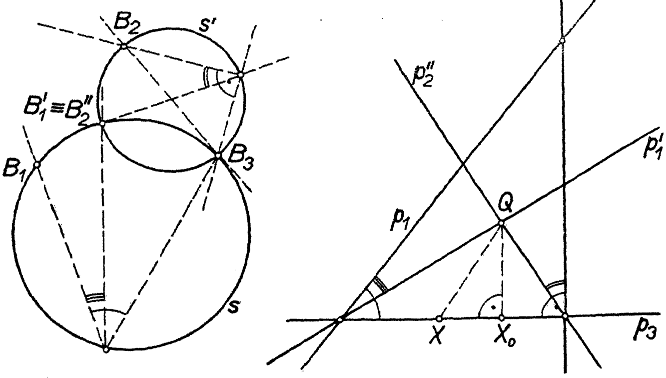
Řešení (obr. 6). Soustava Σ_3 je průnikem soustavy Σ_2^1 s bazí B_1, B_2 a nositelkami p_1, p_2 a soustavy Σ_2^2 s bazí B_1, B_3 a nositelkami p_1, p_3.

a) Nechť kružnice s singulárních bodů soustavy Σ_2^2 protíná přímku B_1B_2 v bodě $B_2' \not\equiv B_1$, jak je naznačeno na obr. 6. Transformujeme baze soustav Σ_2^1, Σ_2^2 ve dvojice B_1, B_2' a B_1, $B_3'' \equiv B_2'$; příslušné nositelky p_2', p_3'' jsou zřejmě různoběžné a protínají se v bodě M ležícím mimo přímku p_1. Soustava Σ_3 je pak množina všech přímých podobností, které převádějí bod $B_2' \equiv B_3''$ v bod přímky p_2' i v bod přímky p_3'', tj. v průsečík M; bod B_1 převádějí tyto podobnosti v libovolný bod X přímky p_1.

b) Jestliže se kružnice s dotýká přímky B_1B_2 v bodě B_1, postupujeme takto: Existuje právě jedna kružnice k, která se dotýká přímky B_1B_2 a kružnice s v bodě B_3. Nechť B_2 není bod dotyku kružnice k s přímkou B_1B_2. Označme Σ_2^3 soustavu s bazí B_2, B_3 a nositelkami p_2, p_3, s' kružnici jejích singulárních bodů. Jestliže kružnice s' protíná přímku B_1B_2 (obr. 7a), nastane pro soustavy Σ_2^1, Σ_2^3 případ z odstavce a). Jestliže se kružnice s' dotýká přímky B_1B_2 v bodě B_2, pak protíná s' kružnici s mimo B_3 v dalším bodě M (obr. 7b). Baze soustav Σ_2^2, Σ_2^3 transformujeme v dvojice B_1, M; B_2, M a dále postupujeme jako v odstavci a).

c) V odstavci b) se předpokládalo, že bod B_2 není bodem dotyku kružnice k s přímkou B_1B_2. Je-li tomu tak, transformujeme bazi B_1, B_2 soustavy Σ_2^1 v bazi B_1, $B_2' \not\equiv B_2$; tím je tento případ převeden na případ z odstavce b).

Příklad 4. Je dána soustava Σ_3, jejíž baze jsou tři nekolineární body B_1, B_2, B_3 a jejíž nositelky jsou tři nekolineární přímky. Máme určit množinu $\Sigma_3(Z)$ pro libovolný bod Z roviny.[7]



Obr. 8.

Řešení. Označme s, s' kružnice singulárních bodů soustav Σ_2' (s bazí B_1, B_3, nositelkami p_1, p_3) a soustavy Σ_2^2 (s bazí B_2, B_3, nositelkami p_2, p_3); předpokládejme, že se kružnice s, s' protínají mimo bod B_3 ještě v bodě $B_1' \equiv B_2''$ (obr. 8; této situace lze vždy dosáhnout vhodnou transformací baze).

Nyní transformujeme baze soustav Σ_2^1, Σ_2^2 ve dvojice B_3, B_1'; B_3, $B_2'' \equiv B_1'$; příslušné nositelky p_1', p_2'' se protnou v bodě Q ležícím mimo přímku p_3.[8]) Soustava Σ_3 je obdobně jako v příkladě 3a) množina všech přímých podobností, které jsou určeny dvojicemi $B_1' \to Q$, $B_3 \to X$; přitom X probíhá přímku p_3.

Zvolme bod Q za počátek soustavy souřadnic; nechť má přímka p_3 rovnici $z - \bar{z} = 2ki$, kde k je reálné kladné číslo. Libovolná podobnost soustavy Σ_3 je $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$; přitom $\mathbf{P}_0$ je přímá podobnost určená dvojicemi $B_1' \to Q$, $B_3 \to X_0$, kde X_0 je pata kolmice spuštěné z bodu Q na přímku p_3, $\mathbf{P}$ je přímá podobnost určená dvojicemi $Q \to Q$, $X_0 \to X$. Snadno odvodíme, že podobnost $\mathbf{P}$ má početní vyjádření

$$z' = (1 + ui)\, z\,, \tag{15}$$

kde u probíhá všecka reálná čísla. Je-li $z \neq 0$, vyjadřuje rovnice (15) přímku kolmou k přímce QZ; je-li $z = 0$, vyjadřuje (15) jediný bod Q.[9])

Máme tedy výsledek: Množina $\Sigma_3(Z)$ je buď bod nebo přímka.

Příklad 5. Naznačíme postup řešení této známé úlohy: Máme sestrojit čtverec, jehož vrcholy leží na čtyřech daných přímkách.

[7]) Symbol $\Sigma_3(Z)$ má obdobný význam jako symbol $\Sigma_2(Z)$; viz str. 130.
[8]) Na obr. 8 je $p_2 \perp p_3$, neboť body B_2, B_3 jsou krajní body průměru kružnice s'.
[9]) Tento výsledek lze odvodit také snadno synteticky.

Řešení. Sestrojíme libovolný čtverec $B_1B_2B_3B_4$ a vytvoříme soustavu Σ_3 s bazí B_1, B_2, B_3 a nositelkami p_1, p_2, p_3. Množina $\Sigma_3(B_4)$ je podle příkladu 4 buď bod R nebo přímka r. Jestliže bod R neleží na přímce p_4 nebo přímky r, p_4 jsou bez společného bodu, je úloha neřešitelná. Leží-li bod R na přímce p_4 nebo mají-li přímky r, p_4 aspoň jeden společný bod, má úloha řešení. Úloha může mít nekonečně mnoho řešení, např. splynou-li přímky p_4, r.

Příklad 5 uvedl ukázky soustav Σ_4. Je vidět, že soustava Σ_4 může být prázdná, může obsahovat jedinou podobnost, nebo může splynout s některou soustavou nižšího řádu. Obdobný výsledek platí pro soustavu Σ_n libovolného řádu.

Резюме

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ПРЯМЫХ ПОДОБИЙ В ПЛОСКОСТИ

ПАВЕЛ БАРТОШ (Pavel Bartoš), Златэ Моравце и ЯН ВЫШИН (Jan Vyšín), Прага

(Поступило в редакцию 3/IV 1957 г.)

В статье исследуются т. наз. линейные системы подобий; линейной системой подобий порядка n называется множество всех прямых подобных отображений в плоскости, которые переводят n данных различных точек в точки, лежащие по очереди на n данных прямых.

В статье выводятся основные свойства систем порядка 2, в частности доказывается возможность изменения определяющих точек и прямых системы; далее показано, как можно системы порядка 2 использовать при изучении систем высших порядков.

Résumé

SYSTÈMES LINÉAIRES DE SIMILITUDES DIRECTES DANS LE PLAN

PAVEL BARTOŠ, Zlaté Moravce et JAN VYŠÍN, Praha

(Reçu le 3 avril 1957)

Dans cet article, on étudie les systèmes linéaires de similitudes; par un système linéaire d'ordre n on entend l'ensemble de toutes les similitudes directes du plan qui font correspondre à n points donnés n autres points situés, dans un certain ordre, sur n droites données.

On déduit les propriétés fondamentales des systèmes du second ordre; en démontrant, en particulier, la possibilité de changer les points et les droites déterminant le système, et l'on montre une application des systèmes du second ordre à l'étude des systèmes d'ordre supérieur.