Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Sedláček
O kmenných zlomcích

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 2, 188--197

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108533`

O KMENNÝCH ZLOMCÍCH

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Došlo dne 5. září 1958) DT: 511.134

Tento příspěvek navazující na nedávno uveřejněnou monografii W. SIERPIŃSKÉHO si všímá čísel, jež lze vyjádřit jako algebraický součet daného počtu kmenných zlomků.

Kmenným zlomkem nazýváme číslo $\frac{1}{n}$, kde n je přirozené číslo. Algebraickým součtem čísel $w_1, w_2, \ldots, w_s$ rozumíme číslo $w = \sum_{i=1}^{s} e_i w_i$, kde $e_i = +1$ nebo -1 pro $i = 1, 2, \ldots, s$. Budeme zde používat názvosloví, které zavedl W. SIERPIŃSKI v práci [1]. Podle něho A_s (resp. B_s) značí množinu všech těch racionálních čísel, jež je možno vyjádřit jako součet (resp. algebraický součet) s kmenných zlomků. Zřejmě $A_s \subset B_s$ pro $s = 1, 2, 3, \ldots$ a dále $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$. Označme ještě B_0 množinu mající jediný prvek, nulu. Zřejmě $B_0 \subset B_s$ pro $s = 2, 3, 4, \ldots$ Snadno nahlédneme, že pro každé $w \in B_s$ (při libovolném s) platí

$$|w| \leqq s\,. \tag{1}$$

Označme R množinu všech reálných čísel. Sierpiński ukázal, že pro každé přirozené číslo s je B_s množina řídká v R. Pro $M \subset R$ označme M' množinu všech hromadných bodů množiny M (tzv. *derivace* množiny M). Platí věta

Věta 1. *Pro každé celé nezáporné číslo s je $B'_{s+1} = B_0 \cup B_s$.*

Důkaz. Dokážeme nejprve $B'_{s+1} \supset B_0 \cup B_s$. Nula je hromadným bodem množiny B_{s+1}, neboť je limitou posloupnosti $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, přičemž platí $\frac{1}{k} \in B_{s+1}$ (pro $k = 1, 2, \ldots$). Pro libovolné $v \in B_s$ sestrojme nyní množinu čísel $v + \frac{1}{k}$ ($k = 1, 2, \ldots$), která patří do B_{s+1}. V každém okolí bodu v je tedy nekonečně mnoho prvků množiny B_{s+1}, proto $v \in B'_{s+1}$.

Dále dokážeme inklusi $B'_{s+1} \subset B_0 \cup B_s$ (pro všechna celá nezáporná čísla s). Ukážeme, že platí $B'_{s+1} - (B_0 \cup B_s) = \emptyset$. Pro $s = 0$ je to zřejmé. Dále budiž

$s > 0$; učiňme indukční předpoklad a nechť existuje prvek $w \in B'_{s+1}$, pro nějž není $w \in B_0 \cup B_s$. Obsahuje-li každé okolí bodu w prvky množiny B_s, potom $w \in B'_s$; při tom však není $w \in B_0 \cup B_{s-1}$ (to by mělo za následek $w \in B_0 \cup B_s$), takže $w \in B'_s - (B_0 \cup B_{s-1})$ a to je spor s indukčním předpokladem.

Existuje tedy interval $I = (v_1, v_2)$ neobsahující žádný prvek množiny $B_0 \cup B_s$ a takový, že $v_1 < v_2$, $w \in I$. Položme

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} \min_{i=1,2} |w - v_i| \,, \quad J = \mathop{E}_{x}(|x - w| < \varepsilon)\,.$$

Z předpokladu $w \in B'_{s+1}$ plyne, že J obsahuje nekonečně mnoho prvků množiny B_{s+1}. Pišme každé takové $z \in B_{s+1} \cap J$ ve tvaru $z = \sum_{i=1}^{s+1} \frac{e_i}{k_i}$ (kde $0 < k_1 \leqq k_2 \leqq \leqq \ldots \leqq k_{s+1}$). Potom je

$$z = y + \frac{e_{s+1}}{k_{s+1}}, \tag{2}$$

kde $y \in B_s$, $\frac{e_{s+1}}{k_{s+1}} \in B_1$. Je tedy $\frac{1}{k_{s+1}} > \varepsilon$ čili $k_{s+1} < \frac{1}{\varepsilon}$, což lze splnit jenom konečně mnoha hodnotami k_{s+1}. Musí tedy ve (2) existovat nekonečně mnoho hodnot y; pro každou z nich je

$$y = \sum_{i=1}^{s} \frac{e_i}{k_i}. \tag{3}$$

Z nekonečnosti množiny čísel y plyne, že lze najít takové y^*, jež má v zápise (3) aspoň jeden jmenovatel $k_j^* > \frac{1}{\varepsilon}$ čili $\frac{1}{k_j^*} < \varepsilon$. Platí tedy $z - \frac{e_j^*}{k_j^*} \in B_s \cap I$, což je spor. Důkaz je podán.

Všimněme si nyní, kolika způsoby je možno dané číslo $w \in B_s$ vyjádřit jako součet s kmenných zlomků. Dva rozklady

$$w = \sum_{i=1}^{s} \frac{e_i^{(j)}}{k_i^{(j)}} \quad (j = 1; 2)$$

pokládáme při tom za různé, jestliže neplatí $\frac{e_i^{(1)}}{k_i^{(1)}} = \frac{e_i^{(2)}}{k_i^{(2)}}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ (ani po event. výměně zlomků v rozkladu).

Věta 2. *Budiž dáno přirozené číslo $s \geqq 2$. Nutná a postačující podmínka k tomu, aby dané racionální číslo w bylo možno jen konečným počtem různých způsobů vyjádřit jako algebraický součet s kmenných zlomků, zní*

$$w \in B_s - B_{s-2}\,. \tag{4}$$

Důkaz. Nechť neplatí (4). V případě w non $\in B_s$ nelze najít žádný způsob takového vyjádření. Nechť $w \in B_s$ a předpokládejme, že $w \in B_{s-2}$. Lze tedy psát $w = \sum_{i=1}^{s-2} \frac{e_i}{k_i}$. Pro libovolný kmenný zlomek $\frac{1}{k}$ pak platí

$$w = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} + \sum_{i=1}^{s-2} \frac{e_i}{k_i},$$

takže hledaný počet vyjádření není konečný.

Nechť za druhé platí (4); chceme dokázat, že w je možno jenom konečným počtem způsobů vyjádřit jako algebraický součet s kmenných zlomků. Pro $s = 2$ a $s = 3$ toto tvrzení plyne z vět, které Sierpiński uvádí v [1] na str. 87 a 101.[1]) Budiž nyní $s > 3$; učiňme indukční předpoklad a uvažujme nejprve číslo $w > 0$ splňující vztah (4). Lze psát

$$w = \sum_{j=1}^{s} \frac{e_j}{y_j}, \tag{5}$$

kde $y_1, y_2, \ldots, y_s$ jsou přirozená čísla.

Protože $w > 0$, musí v (5) aspoň pro jeden index j platit $e_j = 1$. Nechť označení v (5) je tak voleno, že $e_1 = 1$, při čemž $y_1 \leqq y_i$ pro všechna i, pro něž $e_i = 1$. Je-li takových i právě r, dostaneme z (5) odhad $w \leqq \frac{r}{y_1}$ čili $y_1 \leqq \frac{r}{w}$. Číslo y_1 může tedy v (5) nabývat nejvýše konečný počet hodnot; budiž y_1^* jedna z nich. Kdyby bylo $w - \frac{1}{y_1^*} \in B_{(s-1)-2}$, bylo by $w \in B_{s-2}$ (spor). Je tedy $w - \frac{1}{y_1^*} \in B_{s-1} - B_{s-3}$. Nyní uvažujme rovnici

$$w - \frac{1}{y_1^*} = \sum_{j=2}^{s} \frac{e_j}{y_j}. \tag{6}$$

Kdyby platilo $w - \frac{1}{y_1^*} = 0$, bylo by $w \in B_1 \subset B_{s-2}$, což odporuje předpokladu. Vztah (6) můžeme proto vždy (vynásobením) převést na tvar, v němž na levé straně je kladné číslo. Podle indukčního předpokladu vyhovuje tedy rovnici (6) jen konečný počet $(s-1)$-tic čísel $y_2, y_3, \ldots, y_s$. Vidíme proto, že existuje jen konečný počet s-tic čísel splňujících vztah (5). Tento závěr platí tedy zřejmě i pro $w < 0$ splňující vztah (4). Důkaz je podán.

Množiny B_1 a B_2 mají vlastnosti celkem jednoduché. Věnujme nyní pozornost množině B_3. A. Schinzel vyslovil domněnku,[2]) že ke každému přirozenému

[1]) Citované věty znějí: I. *Každé racionální číslo různé od nuly má jen konečný počet* $\geqq 0$ *rozkladů na algebraický součet dvou kmenných zlomků.* II. *Každé kladné racionální číslo, které není kmenným zlomkem, má jen konečný počet* $\geqq 0$ *rozkladů na algebraický součet tří kmenných zlomků.*

[2]) Formulaci domněnky zde uvádíme v trochu modifikované formě (ve srovnání s [1], str. 100).

číslu m existuje přirozené číslo l_m takové, že pro všechna přirozená $n \geqq l_m$ platí $\frac{m}{n} \in B_3$. (Pro jednoznačnost volme za l_m vždy nejmenší možnou hodnotu.) Tato domněnka byla ověřena pro $m \leqq 18$. Z úvah, které uvádí W. Sierpiński, můžeme sestavit tabulku:[3])

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
l_m	1	1	1	2	2	3	3	4	3	4	5	8	6	6	5	10	8	24

Je-li uvedená domněnka správná, pak důsledkem vztahu (1) je $\lim\limits_{m\to\infty} l_m = \infty$. Ověříme zde Schinzelovu domněnku ještě pro $m = 19, 20, 21$.

Věta 3. *Pro všechna přirozená čísla $n \geqq 12$ platí $\frac{19}{n} \in B_3$. Při tom je*

$$\frac{19}{11} \in B_4 - B_3 \,. \tag{7}$$

Důkaz.[4]) Pro $n \equiv 0 \pmod{19}$ je tvrzení zřejmé. Uvažujme nyní číslo n tvaru $19k \pm r$, kde $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9$. Platí [5])

$$\frac{19}{19k \pm 1} = \frac{1}{k} \mp \frac{1}{2k(19k \pm 1)} \mp \frac{1}{2k(19k \pm 1)}\,,$$
$$\frac{19}{19k \pm 2} = \frac{1}{k} \mp \frac{1}{k(9k \pm 1)} \pm \frac{1}{(9k \pm 1)(19k \pm 2)}\,,$$
$$\frac{19}{19k \pm 3} = \frac{1}{k} \mp \frac{1}{k(6k \pm 1)} \pm \frac{1}{(6k \pm 1)(19k \pm 3)}\,,$$
$$\frac{19}{19k \pm 4} = \frac{1}{k} \mp \frac{1}{k(5k \pm 1)} \mp \frac{1}{(5k \pm 1)(19k \pm 4)}\,,$$
$$\frac{19}{19k \pm 5} = \frac{1}{k} \mp \frac{1}{k(4k \pm 1)} \mp \frac{1}{(4k \pm 1)(19k \pm 5)}\,,$$
$$\frac{19}{19k \pm 6} = \frac{1}{k} \mp \frac{1}{k(3k \pm 1)} \pm \frac{1}{(3k \pm 1)(19k \pm 6)}\,,$$
$$\frac{19}{19k \pm 9} = \frac{1}{k} \mp \frac{1}{k(2k \pm 1)} \pm \frac{1}{(2k \pm 1)(19k \pm 9)}\,.$$

Těmito vzorci je tvrzení dokázáno pro každé přirozené n z uvedených čtrnácti zbytkových tříd. Nechť $n \equiv \pm 7 \pmod{19}$. Pro $n = 12$ a 31 tvrzení platí, neboť

$$\frac{19}{12} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\,, \quad \frac{19}{31} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2\,.\,9\,.\,31}\,.$$

[3]) Důkaz pro $m = 8$ a 18 podal A. Schinzel.
[4]) Písmeno k značí v celém důkaze číslo přirozené, l je číslo celé nezáporné.
[5]) V jednotlivých vzorcích je ovšem třeba číst všude buď znaménko horní nebo všude znaménko dolní.

Každé jiné přirozené číslo $n \geqq 12$, jež je $\equiv \pm 7 \pmod{19}$, je možno psát v právě jednom ze tvarů[4]) $57k \pm 7$, $57k \pm 12$, $114l \pm 26$, $114k \pm 31$. Správnost našeho tvrzení plyne pak z těchto vzorců:

$$\frac{19}{57k \pm 7} = \frac{1}{3k} \mp \frac{1}{3k(8k \pm 1)} \pm \frac{1}{3(8k \pm 1)(57k \pm 7)},$$
$$\frac{19}{57k \pm 12} = \frac{1}{3k} \mp \frac{1}{3k(5k \pm 1)} \mp \frac{1}{3(5k \pm 1)(19k \pm 4)},$$
$$\frac{19}{114l \pm 26} = \frac{1}{2(3l \pm 1)} \pm \frac{1}{2(3l \pm 1)(9l \pm 2)} \mp \frac{1}{(9l \pm 2)(114l \pm 26)},$$
$$\frac{19}{114k \pm 31} = \frac{1}{6k} \mp \frac{1}{2k(11k \pm 3)} \pm \frac{1}{6(11k \pm 3)(114k \pm 31)}.$$

Nechť konečně $n \equiv \pm 8 \pmod{19}$. Pro $n = 27$ správnost tvrzení plyne ze vzorce

$$\frac{19}{27} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{270}.$$

Každé jiné přirozené $n \geqq 12$, které je $\equiv \pm 8 \pmod{19}$, je možno psát v právě jednom ze tvarů $57k \pm 8$, $57k \pm 27$, $114k \pm 11$, $114l \pm 46$. Lze najít vzorce

$$\frac{19}{57k \pm 8} = \frac{1}{3k} \mp \frac{1}{3k(7k \pm 1)} \pm \frac{1}{3(7k \pm 1)(57k \pm 8)},$$
$$\frac{19}{57k \pm 27} = \frac{1}{3k} \mp \frac{1}{3k(2k \pm 1)} \pm \frac{1}{3(2k \pm 1)(19k \pm 9)},$$
$$\frac{19}{114k \pm 11} = \frac{1}{6k} \mp \frac{1}{2k(31k \pm 3)} \pm \frac{1}{6(31k \pm 3)(114k \pm 11)},$$
$$\frac{19}{114l \pm 46} = \frac{1}{2(3l \pm 1)} \mp \frac{1}{2(3l \pm 1)(15l \pm 6)} \mp \frac{1}{(15l \pm 6)(114l \pm 46)}.$$

Tím je tedy dokázáno, že pro $n \geqq 12$ platí $\frac{19}{n} \in B_3$. Budeme nyní dokazovat (7). Je $\frac{19}{11} \in B_4$, neboť $\frac{19}{11} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{44}$. Dokážeme (nepřímo), že neplatí $\frac{19}{11} \in B_3$. Nechť existují celá čísla x, y, z tak, že

$$\frac{19}{11} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}. \tag{8}$$

Volme označení tak, že $x \leqq y \leqq z$. Protože na levé straně rovnice (8) je číslo > 1, musí aspoň dva z kmenných zlomků na pravé straně být kladné. Budeme tedy rozlišovat dva disjunktní případy: a) $x > 0$, b) $x < 0$, $y > 0$.

a) Pro $x \geqq 2$ bychom dostali

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqq \frac{3}{2} < \frac{19}{11}.$$

Může být tedy jen $x = 1$. Hledejme proto dále (kladná) řešení rovnice

$$\frac{8}{11} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}. \tag{9}$$

Pro $y \geqq 3$ bychom dostali

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqq \frac{2}{3} < \frac{8}{11},$$

což není možné. Rovnice (9) dovoluje odhad $\frac{8}{11} > \frac{1}{y}$ čili $y > \frac{11}{8}$. Zbývá už jen $y = 2$, avšak z (9) pak plyne $\frac{1}{z} = \frac{8}{11} - \frac{1}{2} = \frac{5}{22}$, takže i tuto možnost je nutno zamítnout.

b) V druhém případě dostáváme z rovnice (8) odhad $\frac{19}{11} < \frac{2}{y}$ čili $y < \frac{22}{19}$ čili $y = 1$. Řešíme tedy rovnici

$$\frac{8}{11} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$

s požadavkem $x < 0$, $z > 0$. Musí platit $\frac{8}{11} < \frac{1}{z}$, tedy $z < \frac{11}{8}$ čili $z = 1$. Pak ale $\frac{1}{x} = \frac{8}{11} - 1 = -\frac{2}{11}$, takže ani v případě b) nenacházíme žádné řešení. Důkaz věty 3 je tím podán.

Poznámka 1. Věta 3 neříká nic o unicitě rozkladu čísla $\frac{19}{n}$ v algebraický součet tří kmenných zlomků. Víme již, že může existovat i nekonečně mnoho takových rozkladů, takže rozklad nemusí být jednoznačný. Kromě vzorců uvedených v důkaze věty 3 nacházíme např. ještě pro $n = 19k \pm 1 > 19$ vzorec

$$\frac{19}{n} = \frac{1}{k \pm 1} \pm \frac{1}{k(k \pm 1)} \mp \frac{1}{k(19k \pm 1)},$$

pro $n = 19k \pm 2$ vzorec

$$\frac{19}{n} = \frac{1}{k} \mp \frac{1}{k(10k \pm 1)} \mp \frac{1}{(10k \pm 1)(19k \pm 2)}$$

apod. Snadno však nahlédneme, že rozklad čísla $\frac{19}{13}$ v algebraický součet tří kmenných zlomků je jednoznačný.

Poznámka 2. Všimneme-li si ještě (v souvislosti s větou 3) hodnot $n < 11$, vidíme, že pro $n \leqq 6$ vzhledem ke vztahu (1) neplatí $\frac{19}{n} \in B_3$, avšak

$$\frac{19}{9} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{9}, \quad \frac{19}{10} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{10}.$$

Věta 4. *Pro všechna přirozená čísla $n \geqq 30$ platí $\frac{20}{n} \in B_3$. Při tom je*

$$\frac{20}{29} \in B_4 - B_3\,. \tag{10}$$

Důkaz. Je-li n dělitelné čísly 2 nebo 5, plyne tvrzení z tabulky, kterou jsme uvedli před větou 3. Každé jiné přirozené číslo $n \geqq 30$ můžeme psát v právě jednom ze tvarů $20k \pm 1$, $20k \pm 3$, $20k \pm 7$, $40k \pm 9$, $80k \pm 11$, $80k \pm 29$. Správnost tvrzení pak vyplývá ze vzorců

$$\frac{20}{20k \pm 1} = \frac{1}{k} \mp \frac{1}{2k(20k \pm 1)} \mp \frac{1}{2k(20k \pm 1)},$$
$$\frac{20}{20k \pm 3} = \frac{1}{k} \mp \frac{1}{k(7k \pm 1)} \mp \frac{1}{(7k \pm 1)(20k \pm 3)},$$
$$\frac{20}{20k \pm 7} = \frac{1}{k} \mp \frac{1}{k(3k \pm 1)} \mp \frac{1}{(3k \pm 1)(20k \pm 7)},$$
$$\frac{20}{40k \pm 9} = \frac{1}{2k} \mp \frac{1}{k(9k \pm 2)} \mp \frac{1}{2(9k \pm 2)(40k \pm 9)},$$
$$\frac{20}{80k \pm 11} = \frac{1}{4k} \mp \frac{1}{k(29k \pm 4)} \pm \frac{1}{4(29k \pm 4)(80k \pm 11)},$$
$$\frac{20}{80k \pm 29} = \frac{1}{4k} \mp \frac{1}{k(11k \pm 4)} \pm \frac{1}{4(11k \pm 4)(80k \pm 29)}.$$

Abychom dokázali (10), ověříme správnost vzorce

$$\frac{20}{29} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{44} + \frac{1}{44\,.\,3\,..29}.$$

Obdobně jako v důkaze věty 3 bychom dokázali, že neplatí $\frac{20}{29} \in B_3$; důkaz je tím podán.

Věta 5. *Pro všechna přirozená čísla $n \geqq 30$ platí $\frac{21}{n} \in B_3$. Při tom je*

$$\frac{21}{29} \in B_4 - B_3\,. \tag{11}$$

Důkaz. Je-li n dělitelné čísly 3 nebo 7, plyne tvrzení z tabulky uvedené před větou 3. V ostatních případech vyplývá správnost ze vzorců[4])

$$\frac{21}{21k \pm 1} = \frac{1}{k} \mp \frac{1}{2k(21k \pm 1)} \mp \frac{1}{2k(21k \pm 1)},$$
$$\frac{21}{21k \pm 2} = \frac{1}{k} \mp \frac{1}{k(11k \pm 1)} \mp \frac{1}{(11k \pm 1)(21k \pm 2)},$$
$$\frac{21}{21k \pm 4} = \frac{1}{k} \mp \frac{1}{k(5k \pm 1)} \pm \frac{1}{(5k \pm 1)(21k \pm 4)},$$
$$\frac{21}{21k \pm 5} = \frac{1}{k} \mp \frac{1}{k(4k \pm 1)} \pm \frac{1}{(4k \pm 1)(21k \pm 5)},$$
$$\frac{21}{63k \pm 8} = \frac{1}{3k} \mp \frac{1}{3k(8k \pm 1)} \mp \frac{1}{3(8k \pm 1)(63k \pm 8)},$$
$$\frac{21}{126k \pm 13} = \frac{1}{6k} \mp \frac{1}{2k(29k \pm 3)} \pm \frac{1}{6(29k \pm 3)(126k \pm 13)},$$
$$\frac{21}{126l \pm 50} = \frac{1}{2(3l \pm 1)} \mp \frac{1}{2(3l \pm 1)(15l \pm 6)} \pm \frac{1}{2(15l \pm 6)(63l \pm 25)},$$
$$\frac{21}{126k \pm 29} = \frac{1}{6k} \mp \frac{1}{2k(13k \pm 3)} \pm \frac{1}{6(13k \pm 3)(126k \pm 29)},$$
$$\frac{21}{126l \pm 34} = \frac{1}{2(3l \pm 1)} \pm \frac{1}{2(3l \pm 1)(15l \pm 4)} \mp \frac{1}{2(15l \pm 4)(63l \pm 17)},$$
$$\frac{21}{21k \pm 10} = \frac{1}{k} \mp \frac{1}{k(2k \pm 1)} \pm \frac{1}{(2k \pm 1)(21k \pm 10)}.$$

Vztah (11) plyne z rovnice

$$\frac{21}{29} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{42} + \frac{1}{5 \,.\, 21 \,.\, 29}$$

a z úvahy obdobné, jaká byla uvedena v důkaze věty 3.

Závěrem si všimněme (při daném s) množiny $B_{s+1} - B_s$; vidíme, že $B_{s+1} - B_s$ má nekonečně mnoho prvků. Najdeme dokonce nekonečně mnoho prvků této množiny i tehdy, omezíme-li se na interval $J_s = \langle -s; +s \rangle$. Množina $A_{s+1} - B_s$ je zřejmě vlastní částí množiny $B_{s+1} - B_s$; z následující věty uvidíme, že ještě i množina $A_{s+1} - B_s$ má s intervalem J_s společnou část o nekonečně mnoha prvcích.

Věta 6. *Buďte dána přirozená čísla k, s ($k \geqq 2$, $s \geqq 1$). Položme $q = (s - 1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}$. Potom $q \in A_{s+1} - B_s$.*

Důkaz. Zřejmě $q \in A_{s+1}$. Předpokládejme dále, že existují celá čísla $x_1, x_2, \ldots, x_s$ tak, že

$$q = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{x_i}, \quad x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_s \,.$$

Pro $s = 1$ zřejmě neplatí $q \in B_s$. Budiž tedy $s \geqq 2$. Kdyby aspoň jedno z čísel x_i bylo záporné, platilo by $q < \sum_{i=2}^{s} \frac{1}{x_i} \leqq s - 1$, tedy $\frac{1}{2} + \frac{1}{2k} < 0$, což je spor. K obdobnému sporu však dojdeme i za předpokladu $x_1 > 0$, volíme-li $x_{s-1} \geqq 2$. Potom je totiž

$$q \leqq \left(\sum_{i=1}^{s-2} \frac{1}{x_i} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leqq (s - 2) + 1 = s - 1 .$$

Zbývá tedy možnost $x_1 = x_2 = \ldots = x_{s-1} = 1$. Odtud plyne $q = (s - 1) + \frac{1}{x_s}$ čili $\frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \in A_1$ (spor). Důkaz je tím podán.

LITERATURA

[1] *W. Sierpiński:* O rozkładach liczb wymiernych na ułamki proste, Warszawa 1957.

Резюме

О ДРОБЯХ С ЧИСЛИТЕЛЕМ, РАВНЫМ ЕДИНИЦЕ

ИРЖИ СЕДЛАЧЕК (Jiří Sedláček), Прага

(Поступило в редакцию 5/IX 1958 г.)

Пусть s — натуральное число. Обозначим (согласно [1]) символом B_s множество всех рациональных чисел w вида

$$w = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{x_i}, \tag{*}$$

где x_i — целые числа. Далее, пусть $B_0 = \{0\}$. Доказываются следующие теоремы:

I. *Для производной от множества B_{s+1} имеет место соотношение $B'_{s+1} = B_0 \cup B_s$.*

II. *Пусть $s \geqq 2$. Рациональное число w можно представить лишь конечным числом способов в виде (*) тогда и только тогда, если $w \in B_s - B_{s-2}$.*

Согласно одной гипотезе А. Шинзеля (которая в [1] проверена для $m \leqq 18$) для каждого натурального числа m существует такое число l_m, что для всех $n \geqq l_m$ будет $\frac{m}{n} \in B_3$. В этой статье мы показываем, что гипотеза справедлива также для $m = 19; 20; 21$.

Zusammenfassung

ÜBER DIE STAMMBRÜCHE

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Eingelangt am 5. September 1958)

Sei s eine natürliche Zahl. Mit B_s bezeichnen wir (nach [1]) die Menge aller rationalen Zahlen w der Form

$$w = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{x_1}, \tag{*}$$

wo x_i gewisse ganze Zahlen sind. Weiter sei $B_0 = \{0\}$. Folgende Sätze werden bewiesen:

I. *Für die Ableitung der Menge B_{s+1} gilt: $B'_{s+1} = B_0 \cup B_s$.*

II. *Sei $s \geqq 2$. Eine rationale Zahl w ist dann und nur dann auf nur endlich vielen Weisen in der Form (*) darstellbar, wenn $w \in B_s - B_{s-2}$.*

Nach einer Vermutung von A. Schinzel (die in [1] für $m \leqq 18$ beglaubigt wird) existiert zu jeder natürlichen Zahl m solche Zahl l_m, dass $\frac{m}{n} \in B_3$ für alle $n \geqq l_m$ gilt. In diesem Beitrag zeigen wir, dass diese Vermutung auch für $m =$ $= 19; 20; 21$ richtig ist.