Libuše Marková

Konstrukce kanonického reperu sítě na ploše v ekviafinním trojrozměrném prostoru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 2, 133--144

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108517`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

KONSTRUKCE KANONICKÉHO REPERU SÍTĚ NA PLOŠE V EKVIAFINNÍM TROJROZMĚRNÉM PROSTORU

LIBUŠE MARKOVÁ, Olomouc

(Došlo dne 30. října 1969)

Všechny úvahy tohoto článku patří do lokální diferenciální geometrie, patří do ní proto i užívané pojmy. O všech uvažovaných funkcích předpokládáme, že mají potřebný počet spojitých parciálních derivací. Pokud se užívá existenční věty o soustavách vnějších diferenciálních rovnic v involuci nebo je-li potřebné připustit užívání komplexních funkcí, předpokládáme funkce analytické.

Na libovolné nerozvinutelné ploše P v trojrozměrném ekviafinním prostoru A^3 uvažujme libovolnou síť S, která se skládá z vrstev $\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2$; $S = \{\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2\}$. Předpokládejme, že síť neobsahuje žádnou asymptotickou křivku plochy a ani se nedotýká asymptotik v uvažovaném bodě.

Reper prostoru A^3 je tvořen bodem M (jeho polohový vektor označíme $\boldsymbol{m}$) a třemi lineárně nezávislými vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, pro něž platí podmínka $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$. Obecný pohyblivý reper závisí na 11 parametrech (tj. tři souřadnice bodu M a 8 souřadnic vektorů reperu) a jeho relativní komponenty

$$\mathrm{d}\boldsymbol{m} = \omega^i \mathbf{e}_i\,, \quad \mathrm{d}\mathbf{e}_i = \omega_i^k \mathbf{e}_k\,, \tag{1}$$

splňují rovnice struktury ekviafinního prostoru

$$\mathrm{d}\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i\,, \quad \mathrm{d}\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k\,, \quad \omega_i^i = 0\,. \tag{2}$$

Vrchol M reperu R geometricky ztotožníme s bodem $\bar{P}(t_1, t_2)$ plochy P. Pak reper závisí na dvou hlavních parametrech t_1, t_2 a osmi parametrech vedlejších.

Tento reper specialisujeme nyní tak, aby vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ležely v tečné rovině plochy P, takže platí

$$\omega^3 = 0 \tag{3}$$

a ω^1, ω^2 jsou nezávislé hlavní formy. Vnější derivací (3) a užitím Cartanova lemmatu obdržíme

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2\,, \quad \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2\,. \tag{4}$$

Připojíme reper R k síti S. Říkáme, že reper R je připojen k sítí S, jestliže $(M, \mathbf{e}_i)$ je tečna křivky C_i (C_i je křivka vrstvy $\mathscr{V}_i$ jdoucí uvažovaným bodem M plochy P). Vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ jsou tedy pevné a musí platit

$$\delta\mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{e}_1\,, \quad \delta\mathbf{e}_2 \parallel \mathbf{e}_2\,,$$

což dává

$$\delta\mathbf{e}_1 = \pi_1^1\mathbf{e}_1 + \pi_1^2\mathbf{e}_2 + \pi_1^3\mathbf{e}_3 \parallel \mathbf{e}_1\,, \tag{5}$$
$$\delta\mathbf{e}_2 = \pi_2^1\mathbf{e}_1 + \pi_2^2\mathbf{e}_2 + \pi_2^3\mathbf{e}_3 \parallel \mathbf{e}_2\,.$$

Jelikož formy $\pi_1^3 = \pi_2^3 = 0$, je $\pi_1^2 = \pi_2^1 = 0$ a formy ω_2^1 a ω_1^2 jsou hlavní formy, což zapíšeme ve tvaru

$$\omega_1^2 = \lambda\omega^1 + \mu\omega^2\,, \quad \omega_2^1 = \nu\omega^1 + \varrho\omega^2\,. \tag{6}$$

Získaný reper závisí na čtyřech vedlejších parameterech. Vrstvy $\mathscr{V}_1$, resp. $\mathscr{V}_2$ sítě S mají rovnice $\omega^2 = 0$, resp. $\omega^1 = 0$ a síť je dána rovnicí $\omega^1\omega^2 = 0$.

Prodloužením rovnic (4), (6) a podle (2) dostaneme

$$\begin{aligned}
\Delta a &= \mathrm{d}a + a(-3\omega_1^1 - \omega_2^2) - 2b\omega_1^2 &&= m\omega^1 + n\omega^2\,,\\
\Delta b &= \mathrm{d}b + 2b(-\omega_1^1 - \omega_2^2) - a\omega_2^1 - c\omega_1^2 &&= n\omega^1 + p\omega^2\,,\\
\Delta c &= \mathrm{d}c + c(-\omega_1^1 - 3\omega_2^2) - 2b\omega_2^1 &&= p\omega^1 + q\omega^2\,,\\
\Delta\lambda &= \mathrm{d}\lambda + \lambda(\omega_2^2 - 2\omega_1^1) + a\omega_3^2 - \mu\omega_1^2 &&= e\omega^1 + f\omega^2\,,\\
\Delta\mu &= \mathrm{d}\mu + b\omega_3^2 - \mu\omega_1^1 - \lambda\omega_2^1 &&= f\omega^1 + g\omega^2\,,\\
\Delta\nu &= \mathrm{d}\nu + b\omega_3^1 - \nu\omega_2^2 - \varrho\omega_1^2 &&= h\omega^1 + k\omega^2\,,\\
\Delta\varrho &= \mathrm{d}\varrho + \varrho(\omega_1^1 - 2\omega_2^2) + e\omega_3^1 - \nu\omega_2^1 &&= k\omega^1 + l\omega^2\,.
\end{aligned} \tag{7}$$

Variace funkcí $a, b, c, \lambda, \mu, \nu, \varrho$ při změně vedlejších parametrů jsou dány

$$\begin{aligned}
\delta a &= a(3\pi_1^1 + \pi_2^2)\,, & \delta\lambda &= \lambda(2\pi_1^1 - \pi_2^2) - a\pi_3^2\,,\\
\delta b &= 2b(\pi_1^1 + \pi_2^2)\,, & \delta\mu &= \mu\pi_1^1 - b\pi_3^2\,,\\
\delta c &= c(\pi_1^1 + 3\pi_2^2)\,, & \delta\nu &= \nu\pi_2^2 - b\pi_3^1\,,\\
& & \delta\varrho &= \varrho(2\pi_2^2 - \pi_1^1) - c\pi_3^1\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

První tři rovnice (8) ukazují, že rovnice $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ jsou invariantní. Z rovnic struktury také dostaneme, že

$$\delta\omega^1 = -\pi_1^1\omega^1\,, \quad \delta\omega^2 = -\pi_2^2\omega^2\,. \tag{9}$$

Rovnice (8_{1-3}) a (9) lze přepsat do tvaru

$$\begin{aligned}
\delta \ln a &= 3\pi_1^1 + \pi_2^2\,, & \delta \ln \omega^1 &= -\pi_1^1\,,\\
\delta \ln b &= 2(\pi_1^1 + \pi_2^2)\,, & \delta \ln \omega^2 &= -\pi_2^2\,.\\
\delta \ln c &= \pi_1^1 + 3\pi_2^2\,.
\end{aligned}$$

Z těchto vztahů lze určit jeden invariant druhého řádu za předpokladu, že $a \neq 0$ a $c \neq 0$

$$I = \frac{b^2}{ac}. \tag{10}$$

Tento invariant nazveme *základním invariantem sítě S*. Dále dostaneme tři infinitezimální invarianty druhého řádu

$$\varphi_1 = \frac{b\omega^2}{a\omega^1}, \quad \varphi_2 = \frac{b\omega^1}{c\omega^2}, \quad \varphi_3 = b(\omega^1\omega^2)^2. \tag{11}$$

Určeme jejich geometrické významy.

Z podmínky $(d^2\boldsymbol{m}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0$ obdržíme rovnici asymptotických křivek. Je

$$a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2 = 0. \tag{12}$$

Označíme w dvojpoměr asymptotických a parametrických křivek. Pak platí

$$w + \frac{1}{w} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{4b^2}{ac} - 2 = 4I - 2,$$

kde x_1, x_2 jsou kořeny rovnice $ax^2 + 2bx + c = 0$. Z (12) plyne, je-li $I = 0$, jde o konjugovanou síť, je-li $I =$ konst., je také $w =$ konst. a síť se nazývá sítí konstantního dvojpoměru.

Dá se ukázat, že ke směru $\omega^1 = 0$ je konjugovaný směr $b\omega^1 + c\omega^2 = 0$ a ke směru $\omega^2 = 0$ je konjugovaný směr $b\omega^2 + a\omega^1 = 0$. Příslušné tečné vektory těchto směrů jsou dány $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, $\mathbf{e}'_2 = (c, -b)$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}'_1 = (-b, a)$. Označme $\mathbf{e} = \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2$; pak platí

$$DV(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}, \mathbf{e}'_1) = -\frac{b\omega^2}{a\omega^1} = -\varphi_1,$$

$$DV(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}) = -\frac{b\omega^1}{c\omega^2} = -\varphi_2.$$

Mějme dále vektory $\boldsymbol{r}_1 = \omega^1\mathbf{e}_1$, $\boldsymbol{r}_2 = \omega^2\mathbf{e}_2$, $\boldsymbol{r}_3 = \omega^1\mathbf{e}'_1$. Obsahy rovnoběžníků, které jsou vytvořeny dvojicí vektorů $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$, resp. $\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_2$ jsou dány pomocí determinantů Δ_1, resp. Δ_2, kde

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \omega^1 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -b\omega^1 & a\omega^1 \\ 0 & \omega^2 \end{vmatrix}.$$

Pak platí

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = -\varphi_3.$$

K parametrické síti lze konstruovat celou řadu význačných sítí, které jsou spjaty jak s parametrickou sítí, tak se sítí asymptotických křivek na ploše. Je to především asociovaná konjugovaná síť k síti S, jejíž tečny harmonicky oddělují parametrické a asymptotické tečny. Je dána rovnicí

$$\begin{vmatrix} a\omega^1 + b\omega^2 & b\omega^1 + c\omega^2 \\ \omega^2 & \omega^1 \end{vmatrix} = a(\omega^1)^2 - c(\omega^2)^2 = 0 . \tag{13}$$

Dále síť, která harmonicky odděluje parametrickou síť a asociovanou konjugovanou síť. Její rovnice je

$$\begin{vmatrix} a\omega^1 & -c\omega^2 \\ \omega^2 & \omega^1 \end{vmatrix} = a(\omega^1)^2 + c(\omega^2)^2 = 0 .$$

Asociovanou konjugovanou síť užíváme při fixaci reperu v další části této práce, proto zde uvádíme její definici.

LOKÁLNÍ ROZVOJE

Stanovíme lokální rozvoj rovnice plochy P až do členů třetího řádu. Poněvadž se plocha P dotýká v bodě M roviny $(M, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, její rozvoj hledáme ve tvaru

$$z = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 x^2 + 2\alpha_2 xy + \alpha_3 y^2) + \tfrac{1}{6}(\beta_1 x^3 + 3\beta_2 x^2 y + 3\beta_3 xy^2 + \beta_4 y^3) + \dots \tag{14}$$

Nechť $\bar{P}(x, y, z)$ je bodem plochy P. Pak lze psát

$$\bar{P} = M + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 .$$

Pak lze odvodit, že v případě, kdy $\bar{P}$ je fixním bodem prostoru, tj. platí pro něj $\mathrm{d}\bar{P} = 0$, jeho lokální souřadnice jsou řešením Pfaffova systému

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x + \omega^1 + x\omega_1^1 + y\omega_2^1 + z\omega_3^1 &= 0 , \\ \mathrm{d}y + \omega^2 + x\omega_1^2 + y\omega_2^2 + z\omega_3^2 &= 0 , \\ \mathrm{d}z + \omega^3 + x\omega_1^3 + y\omega_2^3 + z\omega_3^3 &= 0 , \end{aligned} \tag{15}$$

který dostaneme srovnáním koeficientů u lineárně nezávislých vektorů a navíc splňují rovnici (14).

Diferencováním rovnice (14) dostaneme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z = {} & (\alpha_1 x + \alpha_2 y)\,\mathrm{d}x + (\alpha_2 x + \alpha_3 y)\,\mathrm{d}y + \tfrac{1}{2}(\mathrm{d}\alpha_1 x^2 + 2\mathrm{d}\alpha_2 xy + \mathrm{d}\alpha_3 y^2) + \\ & + \tfrac{1}{2}(\beta_1 x^2 + 2\beta_2 xy + \beta_3 y^2)\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}(\beta_2 x^2 + 2\beta_3 xy + \beta_4 y^2)\,\mathrm{d}y + \dots \end{aligned} \tag{16}$$

Dosadíme z (15) a (14) do (16) a srovnáme členy při jednotlivých mocninách x, y a získáme relace

$$(17)\qquad \begin{aligned} x: &\quad -\omega_1^3 = -\alpha_1\omega^1 - \alpha_2\omega^2\,, \\ y: &\quad -\omega_2^3 = -\alpha_2\omega^1 - \alpha_3\omega^2\,, \end{aligned}$$

$$(18)\qquad \begin{aligned} x^2: &\quad -\tfrac{1}{2}\alpha_1\omega_3^3 = -\alpha_1\omega_1^1 - \alpha_2\omega_1^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\alpha_1 - \tfrac{1}{2}\beta_1\omega^1 - \tfrac{1}{2}\beta_2\omega^2\,, \\ xy: &\quad -\ \alpha_2\omega_3^3 = -\alpha_1\omega_2^1 - \alpha_2\omega_1^1 - \alpha_2\omega_2^2 - \alpha_3\omega_1^2 + \mathrm{d}\alpha_2 - \beta_2\omega^1 - \beta_3\omega^2\,, \\ y^2: &\quad -\tfrac{1}{2}\alpha_3\omega_3^3 = -\alpha_2\omega_2^1 - \alpha_3\omega_2^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\alpha_3 - \tfrac{1}{2}\beta_3\omega^1 - \tfrac{1}{2}\beta_4\omega^2\,. \end{aligned}$$

Porovnáním (17) a (4) dostaneme $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$, $\alpha_3 = c$. Porovnáním (18) a (7) získáme $\beta_1 = m$, $\beta_2 = n$, $\beta_3 = p$, $\beta_4 = g$. Hledaný lokální rozvoj má tedy tvar

$$(19)\qquad z = \tfrac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \tfrac{1}{6}(mx^3 + 3mx^2y + 3pxy^2 + qy^3) + \ldots$$

Křivka $\omega^2 = 0$ se v bodě M dotýká přímky $(M, \mathbf{e}_1)$, její lokální rozvoj hledáme tedy ve tvaru

$$(20)\qquad \begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2}\alpha_2x^2 + \tfrac{1}{6}\alpha_3x^3 + \ldots\,, \\ z &= \tfrac{1}{2}\beta_2x^2 + \tfrac{1}{6}\beta_3x^3 + \ldots \end{aligned}$$

Diferencujeme (20) a dostaneme

$$(21)\qquad \begin{aligned} \mathrm{d}y &= \alpha_2x\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\alpha_2x^2 + \tfrac{1}{2}\alpha_3x^2\,\mathrm{d}x + \ldots\,, \\ \mathrm{d}z &= \beta_2x\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\beta_2x^2 + \tfrac{1}{2}\beta_3x^2\,\mathrm{d}x + \ldots \end{aligned}$$

Dosadíme-li (15) při $\omega^2 = 0$, získáme vztahy

$$(22)\qquad \begin{aligned} x: &\quad -\omega_1^2 = -\alpha_2\omega^1\,, \\ x^2: &\quad -\tfrac{1}{2}\alpha_2\omega_2^2 - \tfrac{1}{2}\beta_2\omega_3^2 = -\alpha_2\omega_1^1 + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\alpha_2 - \tfrac{1}{2}\alpha_3\omega^1 \\ x: &\quad -\omega_1^3 = -\beta_2\omega^1\,, \\ x^2: &\quad -\tfrac{1}{2}\alpha_2\omega_2^3 - \tfrac{1}{2}\beta_2\omega_3^3 = -\beta_2\omega_1^1 + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\beta_2 - \tfrac{1}{2}\beta_3\omega^1 \end{aligned}$$

Z $(22_{1,3})$ plyne $\alpha_2 = \lambda$, $\beta_2 = a$, z $(22_{2,4})$ $\alpha_3 = e + \mu\lambda$, $\beta_3 = m + 3\lambda b$ a rozvoj křivky $\omega^2 = 0$ je tvaru

$$(23)\qquad \begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2}\lambda x^2 + \tfrac{1}{6}(e + \mu\lambda)\,x^3 + \ldots\,, \\ z &= \tfrac{1}{2}ax^2 + \tfrac{1}{6}(m + 3\lambda b)\,x^3 + \ldots\,; \end{aligned}$$

analogicky bychom hledali rozvoj křivky $\omega^1 = 0$. Je dán

$$(24)\qquad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\varrho y^2 + \tfrac{1}{6}(l + \varrho v)\,y^3 + \ldots\,, \\ z &= \tfrac{1}{2}cy^2 + \tfrac{1}{6}(q + 3\varrho b)\,y^3 + \ldots \end{aligned}$$

V tomto reperu již můžeme najít rovnici svazku Darbouxových kvadrik. Hledáme nejprve rovnici oskulačních kvadrik (mají s plochou dotyk druhého řádu) ve tvaru

$$(\boldsymbol{r} * \boldsymbol{r}) + 2(N\boldsymbol{r}) + a_{00} = 0\,,$$

kde $(*)$ znamená kvasiskalární součin vektorů (viz [2]), pro který je $(\mathbf{e}_i * \mathbf{e}_k) = a_{ik} = a_{ki}$ a operátor $(N\boldsymbol{r})$ stejně jako kvasiskalární součin má vlastnost linearity a je zde položeno $(N\mathbf{e}_i) = a_{i0}$. Pro dotyk prvního řádu platí

$$(\boldsymbol{r} * \mathrm{d}\boldsymbol{r}) + (N\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}) = 0\,, \quad \text{což dává} \quad a_{10} = a_{20} = 0\,. \tag{25}$$

Pro dotyk druhého řádu platí (25) a další podmínka

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{r} * \mathrm{d}\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{r} * \mathrm{d}^2\boldsymbol{r}) + (N\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}) = 0\,. \tag{26}$$

Dosadíme-li z derivačních vzorců reperu a srovnáme-li koeficienty, dostaneme

$$\begin{aligned} (\omega^1)^2 &: \quad a_{11} + a\,.\,a_{30} = 0\,,\\ \omega^1\omega^2 &: \quad a_{12} + b\,.\,a_{30} = 0\,,\\ (\omega^2)^2 &: \quad a_{22} + c\,.\,a_{30} = 0 \end{aligned}$$

a rovnice svazku je pak dána

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + a_{33}z^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz - 2z = 0\,. \tag{27}$$

Z těchto kvadrik lze vydělit rovnici svazku Darbouxových kvadrik, za předpokladu, že $ac - b^2 \neq 0$ (plocha je nerozvinutelná) ve tvaru

$$\begin{aligned} &ax^2 + 2bxy + cy^2 + \frac{cm - 2bn + ap}{2(ac - b^2)}\,xz + \\ &+ \frac{cn - 2bp + aq}{2(ac - b^2)}\,yz - 2z + a_{33}z^2 = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

(Srovnej (1)!).

DALŠÍ SPECIALISACE REPERU

Uvažujme parametrické křivky $\omega^2 = 0$, resp. $\omega^1 = 0$. Jejich oskulační roviny jsou určeny vektory

$$\begin{aligned} \mathrm{d}m &= \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2\,,\\ \mathrm{d}^2 m &= e_1(\mathrm{d}(\omega^1) + \omega_1^1\omega^1 + \omega_2^1\omega^2) + e_2(\mathrm{d}(\omega^2) + \omega_1^2\omega^1 + \\ &\quad + \omega_2^2\omega^2) + e_3(\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3) \end{aligned}$$

pro $\omega^2 = 0$, resp. pro $\omega^1 = 0$. Zde $\mathrm{d}(\omega)$ značí obyčejný diferenciál formy ω.

Přejdeme-li k lokálním rozvojům těchto křivek, pak v lokální soustavě souřadnic jejich oskulační roviny mají rovnice

$$\begin{aligned} cx - \varrho z &= 0 \quad \text{pro} \quad \omega^1 = 0\,, \\ ay - \lambda z &= 0 \quad \text{pro} \quad \omega^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Průsečnice těchto oskulačních rovin má směrový vektor

$$\mathbf{e} = (a\varrho, c\lambda, ac)\,.$$

Specialisaci reperu pak provedeme tak, aby $\mathbf{e} \parallel \mathbf{e}_3$. K tomu je nutno volit $\varrho = 0$, $\lambda = 0$ a položíme navíc $a = c = 1$. Tím jsme skončili specialisaci reperu a získali kanonický reper pro plochy s danou sítí S. Pro tento reper lze psát

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{m} &= \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2\,, \\ \mathrm{d}\mathbf{e}_1 &= (A\omega^1 + B\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + \mu\omega^2\mathbf{e}_2 + (\omega^1 + b\omega^2)\,\mathbf{e}_3\,, \\ \mathrm{d}\mathbf{e}_2 &= \nu\omega^1\mathbf{e}_1 + (C\omega^1 + D\omega^2)\,\mathbf{e}_2 + (b\omega^1 + \omega^2)\,\mathbf{e}_3\,, \\ \mathrm{d}\mathbf{e}_3 &= (E\omega^1 + F\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + (G\omega^1 + L\omega^2)\,\mathbf{e}_2 - [(A + C)\,\omega^1 + (B + D)\,\omega^2]\,\mathbf{e}_3\,, \end{aligned} \tag{29}$$

kde

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{8}(\ \ 2b\nu - 3m + p)\,, & E &= k + \nu^2\,, \\ B &= \tfrac{1}{8}(-6b\mu - 3m + q)\,, & F &= l\,, \\ C &= \tfrac{1}{8}(-6b\nu - 3p + m)\,, & G &= e\,, \\ D &= \tfrac{1}{8}(\ \ 2b\mu - 3q + n)\,, & L &= f + \mu^2\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Z rovnic struktury plyne

$$D\omega^1 = (B - \nu)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,, \quad D\omega^2 = (\mu - D)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,. \tag{31}$$

Pro soustavu (29) je vnější soustava

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A \wedge \omega^1 + \mathrm{d}B \wedge \omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^2(A\nu + BD + F - AB - B\mu - \nu\mu - Eb)\,, \\ \mathrm{d}C \wedge \omega^1 + \mathrm{d}D \wedge \omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^2(\mu\nu + D^2 + C\nu + bL - CB - D\mu - G)\,, \\ \mathrm{d}E \wedge \omega^1 + \mathrm{d}F \wedge \omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^2(-2AF + E\nu + FD + ED + \\ &\quad + BE - L\nu - F\mu - CF)\,, \\ \mathrm{d}G \wedge \omega^1 + \mathrm{d}L \wedge \omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^2(-2CL + 2DG + LD - L\mu - AL + G\nu + E\mu)\,, \\ \mathrm{d}\mu \wedge \omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^2(A\mu + C\mu + D\mu + L - \mu^2 - Gb)\,, \\ \mathrm{d}b \wedge \omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^2(2Ab + Cb + Db - 3B - 2b\mu - D + \nu)\,, \\ \mathrm{d}\nu \wedge \omega^1 &= \omega^1 \wedge \omega^2(\nu^2 + bF - \nu D - E)\,, \\ \mathrm{d}b \wedge \omega^1 &= \omega^1 \wedge \omega^2(-2bE - 2bD + 2b\nu + 2C + A + D - \mu)\,. \end{aligned}$$

Podle Bachvalovy věty [2] je soustava v involuci a řešení závisí na třech funkcích dvou argumentů ($s_1 = 4$, $s_2 = 3$).

OSY SÍTĚ

Mějme kongruenci $P = M + t\mathbf{e}_1$ a hledejme její ohniska. Je-li F_1 ohnisko, pak z podmínky $d\mathbf{F}_1 \parallel \mathbf{e}_1$ dostaneme

$$\omega^2 + x\omega_1^2 = 0\,, \quad x\omega_1^3 = 0\,,$$

z čehož plyne jedno řešení $x = 0$, což je bod M a druhé řešení z podmínky $1 + x\mu = = 0$. Pak

(33)
$$F_1 = M - \frac{1}{\mu}\mathbf{e}_1\,.$$

Analogicky pro kongruenci $P = M + t\mathbf{e}_2$ je jedním ohniskem bod M a druhé je dáno

(34)
$$F_2 = M - \frac{1}{\nu}\mathbf{e}_2\,.$$

Přímka $P = M + t\mathbf{e}_3$ se nazývá *první osa sítě* S a přímka určená body F_1, F_2 se nazývá *druhá osa sítě* S. Současně je i určen geometrický význam invariantů μ, ν.

TORSÁLNÍ SÍŤ

Mějme kongruenci $P = M + t\mathbf{e}_3$. Rozvinutelné plochy této kongruence a ohniska určíme z rovnic

$$\omega^1 + t\omega_3^1 = 0\,, \quad \omega^2 + t\omega_3^2 = 0\,.$$

Vyloučíme-li t z obou rovnic, dostaneme rovnici

$$e(\omega^1)^2 + (f - k + \mu^2 - \nu^2)\,\omega^1\omega^2 - l(\omega^2)^2 = 0\,,$$

která na ploše určuje síť křivek, nazývanou *torsální* sítí. Pro ohniska pak obdržíme kvadratickou rovnici

$$t^2(kf + k\mu^2 + f\nu^2 + \nu^2\mu^2 - el) + t(k + f + \nu^2 + \mu^2) + 1 = 0\,.$$

Tyto rovnice v koeficientech pohyblivého reperu vyjdou složitější než v projektivním případě. Je vidět, že ohnisko kongruence první osy sítě neleží nikdy na ploše P. Vlastnosti torsální sítě jsou pak závislé na vlastnostech příslušných koeficientů uvedených rovnic.

ZÁKLADNÍ SVAZEK KVADRIK SÍTĚ

Základní kvadrikou sítě nazýváme tu, která obsahuje dvě blízké tečny k jedné vrstvě parametrických křivek sítě S v bodech druhé vrstvy sítě.

Tečna ke křivce jedné vrstvy je dána $R = M + \alpha \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2$, k ní blízká v bodě křivky druhé vrstvy je

$$R' = (M + \mathrm{d}M) + \lambda(\mathbf{e}_i + \mathrm{d}\mathbf{e}_i)\,. \tag{35}$$

Rovnici kvadriky hledejme ve tvaru

$$(R * R) + 2(NR) + a_{00} = 0\,.$$

Pak musí být splněny následující podmínky

$$(R * R) + 2(NR) + a_{00} = 0\,, \tag{36}$$

$$(R * R) + (N\,\mathrm{d}R) = 0\,. \tag{37}$$

Dosadíme-li z (35) do (36) a (37) a srovnáme-li koeficienty u mocnin λ, dostaneme z (36)

$$\begin{aligned} \lambda^0:&\quad (M * M) + 2(NM) + a_{00} = 0\,,\\ \lambda^1&\quad (M * \mathbf{e}_i) + (N\mathbf{e}_i) = 0\,,\\ \lambda^2:&\quad (\mathbf{e}_i * \mathbf{e}_i) = 0 \end{aligned} \tag{38}$$

a z (37)

$$\begin{aligned} \lambda^0:&\quad \omega^i(N\mathbf{e}_i) = 0\,,\\ \lambda^1:&\quad (\mathbf{e}_i * \mathbf{e}_3)\,\omega_i^3 = 0\,, \end{aligned}$$

$$\lambda^2:\quad (\mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_2)\,\omega^i + (N\mathbf{e}_3)\,\omega_k^3 = 0\,,\quad \text{pro}\quad i, k = 1, 2\,,\quad i \neq k\,. \tag{39}$$

(38) dává $a_{00} = a_{20} = a_{22} = a_{10} = a_{11} = 0$ a z (39) dostáváme $a_{23} = a_{13} = 0$, $a_{12} = -ba_{30}$.

Rovnici základního svazku kvadrik lze napsat ve tvaru

$$z - bxy + \frac{a_{33}}{2} z^2 = 0\,. \tag{40}$$

Dá se ukázat, že průnik tohoto svazku a plochy P má tečny určené rovnicí

$$x^2 + y^2 = 0\,. \tag{41}$$

Síť, která odděluje harmonicky parametrickou a asociovanou konjugovanou síť, je dána

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = 0\,. \tag{42}$$

Srovnáme-li (42) a (41), vidíme, že tečny pronikové křivky hlavní kvadriky základního svazku sítě harmonicky oddělují parametrické tečny a tečny asociované konjugované sítě.

Je dána soustava rovin $(R - M, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 0$. Hledejme její obálku při pohybu $\omega^1 = 0$. Pak charakteristika této obálky je dána rovnicemi

$$(43) \qquad \begin{aligned} (R - M, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) &= 0 , \\ \mathrm{d}(R - M, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) &= 0 \quad \text{při} \quad \omega^1 = 0 . \end{aligned}$$

Řešením rovnic (43) dostaneme, že libovolný bod charakteristiky je dán

$$R = M - \frac{1}{\mu}\mathbf{e}_1 + x_3\left(\mathbf{e}_3 - \frac{f + \mu^2}{\mu}\mathbf{e}_1\right),$$

což lze podle (33) zapsat pomocí

$$R = F_1 + x_3\left(\mathbf{e}_3 - \frac{f + \mu^2}{\mu}\mathbf{e}_1\right).$$

Tím jsme odvodili, že charakteristika rovin $(R - M, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 0$ při pohybu $\omega^1 = 0$ prochází ohniskem F_1 kongruence $P = M + t\mathbf{e}_1$ a je směru $(-(f + \mu^2)/\mu, 0, 1)$. Tím jsem současně určili geometrický význam invariantu f.

Analogicky platí: charakteristika rovin $(R - M, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$ při pohybu $\omega^2 = 0$ je přímka jdoucí ohniskem F_2 kongruence $P = M + te_2$ a má směr $(0, -(k + \nu^2)/\nu, 1)$. Toto určuje význam invariantu k.

Uvažujme na ploše vrstvu $\omega^2 = 0$. Najdeme vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{m}$, $\mathrm{d}^2\boldsymbol{m}$, $\mathrm{d}^3\boldsymbol{m}$ za předpokladu, že $\omega^2 = 0$. Pak je

$$\mathrm{d}\boldsymbol{m} = \omega^1\mathbf{e}_1 , \quad \mathrm{d}^2\boldsymbol{m} = (\omega^1)^2\mathbf{e}_3 \,(\mathrm{mod}\, \mathbf{e}_1) , \quad \mathrm{d}^3m = e(\omega^1)^3 \,(\mathrm{mod}\, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) .$$

Potom $(\mathrm{d}\boldsymbol{m}, \mathrm{d}^2\boldsymbol{m}, \mathrm{d}^3\boldsymbol{m})_{\omega^2=0} = -e(\omega^1)^6$.

Je-li tento determinant roven nule, je uvažovaná vrstva vrstvou rovinných křivek. Tedy $e = 0$ znamená, že $\omega^2 = 0$ je vrstva rovinných křivek. Analogicky $l = 0$ znamená, že vrstva $\omega^1 = 0$ je vrstvou rovinnou.

Z rovnice pro torzální síť vidíme, že podmínka $e = 0$, resp. $l = 0$ znamená, že jedna vrstva torsální sítě je současně vrstvou parametrickou.

Vraťme se k rozvoji křivky $\omega^2 = 0$. Pro její polohový vektor při naší specialisaci platí

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}(x) , \quad \text{kde} \quad x = x , \quad y = \tfrac{1}{6}ex^3 + \ldots , \quad z = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}mx^3 + \ldots$$

Pak lze najít, že $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \boldsymbol{m}''') = \boldsymbol{m}$, kde $\boldsymbol{m}''' = (\mathrm{d}^3\boldsymbol{m}/\mathrm{d}x^3)_{x=0}$. Jelikož smíšený součin je při ekviafinních transformacích invariantní, vidíme, že m je rovno objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \boldsymbol{m}'''$.

Analogicky, uvažujeme-li o rozvoji (24) křivky $\omega^1 = 0$, lze říci, že q je číselně rovno objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \boldsymbol{m}'''$, kde $\boldsymbol{m}''' = (\mathrm{d}^3\boldsymbol{m}/\mathrm{d}y^3)_{y=0}$.

GEOMETRICKÁ CHARAKTERISTIKA REPERU

Jak bylo patrno z konstrukce, vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ jsou ve směru tečen ke křivkám uvažované, ale libovolné sítě. Jejich výběr je určen tak, aby průsečná křivka svazku základních kvadrik s plochou měla tečny určené rovnicí (41). Vektor $\mathbf{e}_3$ určuje směr průsečnice oskulačních rovin parametrických křivek. Vezmeme rovnici svazku základních kvadrik ve tvaru

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{10}x + \\ + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0 .$$

Označíme

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{30} \\ a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{00} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Při afinních transformacích platí

$$\Delta'_4 = \Delta_4(\Delta)^2 , \quad \Delta'_3 = \Delta_3(\Delta)^2 ,$$

kde Δ je determinant příslušné afinní transformace. Tento determinant při ekviafinních transformacích je roven jedné. Příslušné determinanty jsou pak při dané transformaci invariantní. Ze svazku kvadrik (40) lze pak vydělit tu, pro kterou platí $\Delta_3 = \Delta_4$. To nastane v případě, že v rovnici (40) je $a_{33} = -1$. Střed této kvadriky je pak dán $S = (0, 0, 1)$. Tím je určen geometrický význam normy $\mathbf{e}_3$. Navíc platí $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$.

Literatura

[1] *I. Kolář:* Užití Cartanových metod ke studiu obecní sítě křivek na ploše v trojrozměrném prostoru. Rozpravy čes. ak. věd 1967, ročník 77, sešit 5.

[2] *P. H. Щербаков:* Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии, Томск 1960.

[3] *C. P. Фиников:* Метод внешних форм Картана, Москва-Ленинград 1948.

Adresa autorky: Olomouc, Leninova 26 (Přírodovědecká fakulta University Palackého).

Summary

CONSTRUCTION OF THE CANONICAL MOVING FRAME OF A NET ON A SURFACE IN THE UNIMODULAR THREEDIMENSIONAL SPACE

LIBUŠE MARKOVÁ, Olomouc

This text provides directions for the construction of a canonical moving frame of a surface in unimodular threedimensional space. The construction is based on joining the moving frame to the given net on the surface just in its development stage. Geometrically is this moving frame characterized as follows: Vectors $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ lie in the tangential direction to the curves in the net considered. Their choice must be done so that the tangents of the intersecting curve of the basic bundle with the surface at the given point are determined by the equation

$$x^2 + y^2 = 0 .$$

The bundle itself is given by the equation

$$z - bxy + \frac{a_{33}}{2} z^2 = 0 .$$

Let us denote determinants Δ_4 or Δ_3 by

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{30} \\ a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{00} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

where $a_{ik} = a_{ki}$ are the coefficients of the equation of the bundle. After excluding from the bundle that quadric for which $\Delta_4 = \Delta_3$ its centre possesses in the local basis the coordinates $S = (0, 0, 1)$, which gives the choice of the vector $\mathbf{e}_3$. Then for vectors of the canonical moving frame there holds $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$.