Ivan Netuka

Schwarzovy-Christoffelovy integrály

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 2, 164--182

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108513

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

SCHWARZOVY-CHRISTOFFELOVY INTEGRÁLY

IVAN NETUKA, Praha

(Došlo dne 11. prosince 1969)

1. Úvod. Buď Δ_0 mnohoúhelník a F_0 konformní zobrazení jednotkového kruhu na vnitřek Δ_0. Označme $\mathscr{E}_0 = \mathscr{E}(0, F_0)$. Element $\mathscr{E}_0$ určuje jistou analytickou funkci; označíme ji $\mathscr{F}$. Práce je věnována vyšetřování vlastností této funkce. Je také mj. dokázáno, že F_0 lze vyjádřit známým Schwarzovým-Christoffelovým integrálem. Je tedy $\mathscr{F}$ analytická funkce vytvořená Schwarzovým-Christoffelovým integrálem.

Některé výsledky této práce jsou více či méně intuitivně jasné. V řadě starších učebnic se setkáme s podobnými úvahami (např. [2]), avšak autoři často odkazují čtenáře na geometrický názor a podrobné důkazy většinou chybí. Snahou článku je podat přesnější a ucelenější výklad o vlastnostech funkce $\mathscr{F}$.

Terminologie a běžná označení se shodují s [1].

2. Označení a definice. Symbolem $\mathbf{E}$ (resp. $\mathbf{S}$) budeme označovat otevřenou (resp. uzavřenou) Gaussovu rovinu. Pro $M \subset \mathbf{S}$, $\varepsilon > 0$ znamená $\mathscr{H}(M)$ hranici množiny M, $U(M, \varepsilon)$ značí ε-okolí M. Pro $M = \{z\}$ píšeme pouze $U(z, \varepsilon)$. Pro $z \in \mathbf{S}$, $\varepsilon > 0$ označíme $P(z, \varepsilon) = U(z, \varepsilon) - \{z\}$ (prstencové okolí bodu z). Pokud nechceme vyznačit poloměr okolí, píšeme jen $U(z)$, $P(z)$. Zejména označíme $K_1 = U(0, 1)$ (jednotkový kruh), $K_2 = U(\infty, 1)$, $T = \mathbf{S} - (K_1 \cup K_2)$ (jednotková kružnice).

Termínu mnohoúhelník (n-úhelník) v $\mathbf{E}$ užíváme v obvyklém smyslu. Je zřejmé, co rozumíme vrcholem, stranou, mírou vnitřního úhlu a vnitřkem mnohoúhelníka. Poznamenejme, že vnitřek mnohoúhelníka je omezená Jordanova oblast.

Zobecněnou kružnicí zde kromě kružnice v obvyklém smyslu rozumíme také přímku (k níž počítáme bod ∞). Je znám pojem symetrie vzhledem k zobecněné kružnici p, je zřejmé, co rozumíme množinou symetrickou vzhledem k p, dále je zřejmé, co znamená, že M a M' jsou symetrické vzhledem k p. Buď D mnohoúhelník, s jeho strana. Je-li D' mnohoúhelník symetrický vzhledem k přímce p obsahující úsečku s, D' nazveme mnohoúhelníkem symetrickým k D vzhledem k s. Někdy říkáme, že D a D' jsou symetrické vzhledem k s. Řekneme, že D a D' jsou symetrické, jestliže existuje strana s mnohoúhelníka D taková, že D a D' jsou symetrické vzhledem k s. Přímku, která s obsahuje, nazýváme pak osou symetrie D a D'.

Dále zavedeme toto označení. Buďte n, k přirozená čísla, $i_1, \ldots, i_k$ celá čísla taková, že $0 \leqq i_j \leqq n$ $(j = 1, \ldots, k)$. Buď $p = \{i_1, \ldots, i_k\}$ posloupnost. Říkáme, že posloupnost $\{i_1, \ldots, i_{q-1}, i_{q+1}, \ldots, i_k\}$ vznikla z posloupnosti p vynecháním členu i_q. Je-li $i_j = 0$ pro všechna j, položme $p' = \{0\}$. Jinak nechť p' znamená posloupnost, jež vznikla z p vynecháním členů rovných nule. Řekneme, že se posloupnosti p, $q = \{j_1, \ldots, j_l\}$ rovnají (píšeme $p = q$), je-li $k = l$ a $i_r = j_r$ pro $r = 1, \ldots, k$. Posloupnost p nazveme skupinou, jestliže $p = p'$ a $i_j \neq j_{+1}$ pro $j = 1, \ldots, k - 1$. Množinu všech skupin označíme $\mathcal{S}$. Skupinu obsahující jeden člen nazveme sudou, je-li tento člen roven nule. Ostatní skupiny obsahující jeden člen nazveme lichými skupinami. Je-li k sudé, řekneme, že skupina $\{i_1, \ldots, i_k\}$ je sudá; je-li k liché, $k > 1$, pak tuto skupinu nazveme lichou skupinou. Buď $p = \{i_1, \ldots, i_k\}$ posloupnost. Buď $k_0 = 0$ a buďte $m \geqq 0$ celé, $k_1, \ldots, k_{m+1}$ přirozená čísla taková, že $k_1 < \ldots < k_{m+1} = k$ a že pro $k_l + 1 < j \leqq k_{l+1}$ je $i_j = i_{k_l+1}$ $(l = 0, \ldots, m)$. Pro $r = 1, \ldots, m + 1$ položme $q_r = 0$, pokud $k_r - k_{r-1}$ je sudé, $q_r = i_{k_r}$, pokud $k_r - k_{r-1}$ je liché. Posloupnost $\{q_1, \ldots, q_{m+1}\}$ označíme $\bar{p}$. Je-li $p = \{i_1, \ldots, i_k\}$ posloupnost, definujeme pro $s = 0, 1, \ldots$ posloupnosti p_s takto: $p_0 = p$; je-li definováno p_s pro $s \geqq 0$, položme $p_{s+1} = \bar{p}_s'$. Zřejmě existuje $t \geqq 0$ celé tak, že $p_t = p_{t+1}$. Potom položíme $[i_1, \ldots i_k] = p_t$. Snadno nahlédneme, že $[i_1, \ldots, i_k]$ je skupina.

V dalším bude Δ_0 znamenat libovolný, pro naše úvahy pevně zvolený, mnohoúhelník. Buďte $A_1, \ldots, A_n$ jeho vrcholy, $s_1, \ldots, s_n$ jeho strany, $\alpha_i \pi$ nechť je míra vnitřního úhlu Δ_0 při vrcholu A_i. Pro všechna $i = 1, \ldots, n$ je $0 < \alpha_i < 2$; předpokládejme, že $\alpha_i \neq 1$ pro všechna i. Položme $A_{n+1} = A_1$, $A_0 = A_n$, s_i nechť znamená stranu $A_i A_{i+1}$; dále klademe $s_{n+1} = s_1$, $s_0 = s_n$. Protože vnitřek Δ_0 (značíme $\operatorname{Int} \Delta_0$) je omezená Jordanova oblast, má smysl mluvit o přirozeném uspořádání trojice bodů z hranice této oblasti. Pro určitost budeme předpokládat, že označení je zvoleno tak, že trojice bodů $\{A_{i-1}, A_i, A_{i+1}\}$ (pro $i = 1, \ldots, n$) je přirozeně uspořádána vzhledem k $\operatorname{Int} \Delta_0$. (Definice viz [1].)

Pro skupinu $\{i_1, \ldots, i_k\}$ budeme definovat mnohoúhelník $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ následujícím způsobem. Mnohoúhelník Δ_0 je definován. Pro $i_1 = 1, \ldots, n$ buď Δ_{i_1} mnohoúhelník symetrický k Δ_0 vzhledem k s_{i_1}. Vrchol (resp. stranu) Δ_{i_1}, který je symetrický k A_j (resp. s_j) vzhledem k ose symetrie Δ_{i_1} a Δ_0 nazveme vrcholem (resp. stranou) typu j $(j = 1, \ldots, n)$. Předpokládejme, že $k \geqq 1$ a že máme definován pro každou skupinu $\{i_1, \ldots, i_k\}$ mnohoúhelník $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$, typ jeho strany a vrcholu. Buď i_{k+1} takové, že $\{i_1, \ldots, i_{k+1}\}$ je skupina. Potom buď $\Delta_{i_1 \ldots i_{k+1}}$ mnohoúhelník symetrický k $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ vzhledem k straně typu i_{k+1} mnohoúhelníka $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$. Vrchol (resp. stranu) $\Delta_{i_1 \ldots i_{k+1}}$, který je symetrický s vrcholem (resp. se stranou) typu j mnohoúhelníka $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ vzhledem k ose symetrie mnohoúhelníků $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ a $\Delta_{i_1 \ldots i_{k+1}}$, nazveme vrcholem (resp. stranou) typu j $(j = 1, \ldots, n)$. Takto jsme přiřadili každé skupině právě jeden mnohoúhelník v $\mathbf{E}$. Poznamenejme, že toto přiřazení není obecně prosté.

Systém všech mnohoúhelníků $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$, kde $\{i_1, \ldots, i_k\} \in \mathcal{S}$, nazveme pokrytím příslušným k Δ_0 a označíme $\mathcal{P}$. Buď P množina všech bodů, které patří do některého mnohoúhelníka z $\mathcal{P}$.

Snadno zjistíme, že míra vnitřního úhlu mnohoúhelníka $\Delta_{i_1 \dots i_k}$ při vrcholu typu j je $\alpha_j \pi$. Strana typu j $(j = 1, \dots, n - 1)$ obsahuje vrcholy typu $j, j + 1$, strana typu n vrcholy typu $n, 1$. Dále je zřejmé, že mnohoúhelníky $\Delta_{i_1 \dots i_k}$ a $\Delta_{[i_1 \dots i_k, j-1]}$ a rovněž mnohoúhelníky $\Delta_{i_1 \dots i_k}$ a $\Delta_{[i_1 \dots i_k, j]}$ $(j = 2, \dots, n)$ mají společný vrchol typu j. Analogické tvrzení platí pro vrchol typu 1.

Budeme definovat, co rozumíme hvězdicí mnohoúhelníků. Buď $\{i_1, \dots, i_k\} \in \mathscr{S}$ a $1 < i \leqq n$. Množinu všech mnohoúhelníků $\Delta_{[i_1 \dots i_{k+r}]}$, kde r je přirozené číslo a i_{k+l} se rovná buď $i - 1$ nebo i (resp. n nebo 1) $(l = 1, \dots, r)$, nazveme hvězdicí mnohoúhelníků typu i (resp. 1) určenou mnohoúhelníkem $\Delta_{i_1 \dots i_k}$ a označíme $\mathscr{R}_i(\Delta_{i_1 \dots i_k})$ (resp. $\mathscr{R}_1(\Delta_{i_1 \dots i_k})$). Ten vrchol $\Delta_{i_1 \dots i_k}$, který je typu i, nazveme středem této hvězdice, vnitřní úhel $\Delta_{i_1 \dots i_k}$ při tomto vrcholu úhlem této hvězdice. Snadno zjistíme, že je-li $\Delta_{j_1 \dots j_l} \in \mathscr{R}_i(\Delta_{i_1 \dots i_k})$, je $\Delta_{i_1 \dots i_k} \in \mathscr{R}_i(\Delta_{j_1 \dots j_l})$ a tedy definice hvězdice nezávisí na bližším určení mnohoúhelníka, který ji určuje. Budeme proto místo $\mathscr{R}_i(\Delta_{i_1 \dots i_k})$ psát pouze $\mathscr{R}_i$. Z výše napsaného plyne, že definice středu a úhlu hvězdice nezávisí na tom, kterým mnohoúhelníkem z $\mathscr{R}_i$ je $\mathscr{R}_i$ určena a že míra úhlu hvězdice typu i je $\alpha_i \pi$.

Označme $\mathscr{R}$ množinu všech hvězdic. Na této množině definujeme relaci ϱ takto: řekneme, že $\mathscr{R}_i^1 \, \varrho \, \mathscr{R}_j^2$ tehdy a jen tehdy, je-li $i = j$ a existuje $\Delta \in \mathscr{R}_i^1 \cap \mathscr{R}_j^2$. Snadno dokážeme, že relace ϱ je rovnost. Místo $\mathscr{R}_i^1 \, \varrho \, \mathscr{R}_j^2$ budeme psát $\mathscr{R}_i^1 = \mathscr{R}_j^2$.

Jestliže existuje q přirozené tak, že hvězdice $\mathscr{R}_i$ obsahuje právě q různých mnohoúhelníků $\Delta_{i_1 \dots i_k}$, kde $\{i_1, \dots, i_k\}$ je sudá skupina, řekneme, že $\mathscr{R}_i$ je q-značná. Jestliže takové q neexistuje, říkáme, že $\mathscr{R}_i$ je ∞-značná.

O pokrytí $\mathscr{P}$ řekneme, že je skoro disjunktní, jestliže platí:

$$\Delta \in \mathscr{P} \,, \quad \Delta' \in \mathscr{P} \,, \quad \operatorname{Int} \Delta \cap \operatorname{Int} \Delta' \neq \emptyset \Rightarrow \Delta = \Delta' \,.$$

$\mathscr{P}$ nazveme sudým skoro disjunktním pokrytím, je-li $\mathscr{P}$ skoro disjunktní pokrytí, přičemž počet různých mnohoúhelníků každé hvězdice je sudé číslo.

Konečně definujeme reálnou funkci τ proměnné x takto: je-li x racionální, pak existuje právě jedna dvojice nesoudělných celých čísel p, q tak, že $q > 0$ a $x = p/q$; pro takové x položme $\tau(x) = q$; pro x iracionální buď $\tau(x) = \infty$.

3. Lemma. *Buď D mnohoúhelník, s jeho strana. Buď D' mnohoúhelník symetrický k D vzhledem k s a buď t strana mnohoúhelníka D'. Označme D'' mnohoúhelník symetrický k D' vzhledem k t. Potom existuje lineární zobrazení φ_0 takové, že*

$$\varphi_0(D) = D'' \,.$$

Buď $\{i_1, \dots, i_k\}$ sudá skupina. Potom existuje lineární zobrazení φ takové, že

$$\varphi(\Delta_0) = \Delta_{i_1 \dots i_k} \,,$$

přičemž $\varphi(A_i)$ je vrchol typu i mnohoúhelníka $\Delta_{i_1 \dots i_k}$.

Důkaz. Buď p_1 (resp. p_2) přímka obsahující s (resp. t). Víme, že existuje lineární zobrazení φ_1 takové, že $\varphi_1(p_1)$ je reálná osa. Označme $\varphi_1(p_2) = p_3$. Potom je p_3

přímka a existuje lineární zobrazení φ_2 takové, že $\varphi_2(p_3)$ je reálná osa. Položme $\varphi_3(z) = \varphi_2(\varphi_1(z))$, $\varphi_0 = (\varphi_1)_{-1} * (\varphi_2)_{-1} * \varphi_3$. Snadno zjistíme, že φ_3 je lineární zobrazení a φ_0 je hledané zobrazení.

Pomocí φ_0 sestrojíme indukcí podle k zobrazení φ. Z konstrukce φ_0 plyne snadno tvrzení o typu vrcholu.

4. Poznámka. Ponechme označení minulého lemmatu. Nechť strany s,t obsahují jediný společný bod A. (Je tedy A společným vrcholem mnohoúhelníků D a D''). Nechť $\varphi_0(z) = cz + b$. Potom snadno zjistíme, že $c = \exp(\varepsilon \,.\, 2\pi i\alpha)$, kde $\varepsilon = 1$ nebo $\varepsilon = -1$ a $\alpha\pi$ je míra vnitřního úhlu mnohoúhelníka D při vrcholu A. Odtud plyne: Je-li $\mathcal{R}_i$ hvězdice, A její střed a r délka nejkratší strany Δ_0, R množina všech bodů patřících do některého mnohoúhelníka z $\mathcal{R}_i$, potom $U(A, r) \subset R$.

5. Věta. *Buď $\alpha_i \pi$ míra úhlu hvězdice $\mathcal{R}_i$ typu i. Pak je $\mathcal{R}_i$ $\tau(\alpha_i)$-značná.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že střed hvězdice splývá s počátkem. Buď $\Delta \in \mathcal{R}_i$ mnohoúhelník se sudou skupinou. Pro m celé položíme

$$\varphi_m(z) = (\exp(2\pi i m\alpha_i))\, z \,.$$

Z poznámky 4 snadno plyne, že když $\Delta^1 \in \mathcal{R}_i$ je mnohoúhelník se sudou skupinou, existuje celé m tak, že $\Delta^1 = \varphi_m(\Delta)$. Odtud, z definice značnosti hvězdice a definice φ_m a definice $\tau(\alpha_i)$ již důkaz snadno dokončíme.

6. Lemma. *Existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U(\Delta, \varepsilon) \subset P$ pro každé $\Delta \in \mathcal{P}$.*

Důkaz. Zvolme $\Delta \in \mathcal{P}$. Označme t_i stranu Δ typu i, Δ^i mnohoúhelník symetrický k Δ vzhledem k t_i, K^i buď kruh, jehož střed je vrchol Δ typu i a jehož poloměr je menší než polovina nejkratší strany Δ. Zřejmě existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $i = 1, \ldots, n$ je $U(t_i, \varepsilon) \subset \Delta \cup \Delta^i \cup K^i \cup K^{i+1}$. (Klademe ovšem $K^{n+1} = K^1$.) Tvrdíme, že pro toto ε je $U(\Delta, \varepsilon) \subset P$. Je-li $z \in U(\Delta, \varepsilon) \cap \Delta$, je zřejmě $z \in P$. Buď tedy $z \in U(\Delta, \varepsilon) - \Delta$ a nechť nejprve pro nějaké i je $z \in K^i$. Pak ovšem podle poznámky 4 patří z do některého mnohoúhelníka hvězdice typu i, určené mnohoúhelníkem Δ, tedy opět $z \in P$. Je-li $z \in U(\Delta, \varepsilon) - (\Delta \cup \bigcup_{i=1}^{n} K^i)$, existuje $x \in \Delta$ takový, že $\varrho(z, \Delta) = \varrho(z, x)$ (ϱ je kartézská metrika v $\mathbf{E}$). Pro některé j je zřejmě $x \in t_j$. Potom je $\varrho(z, t_j) < \varepsilon$ a tedy vzhledem k volbě ε je $z \in \Delta^j \subset P$. Z toho, jak jsme sestrojili číslo ε, snadno plyne, že pro každé $\Delta \in \mathcal{P}$ je $U(\Delta, \varepsilon) \subset P$.

7. Lemma. *Platí tato tvrzení:*

1. $\mathbf{E} = P$.
2. *Existuje nekonečně mnoho různých mnohoúhelníků z $\mathcal{P}$ se sudou skupinou.*
3. *Existuje nekonečně mnoho různých hvězdic typu i $(1 \leqq i \leqq n)$.*

Důkaz. 1. Stačí ukázat, že $\mathscr{H}(P) \cap \mathbf{E} = \emptyset$. Předpokládejme, že tomu tak není a buď $z \in \mathscr{H}(P) \cap \mathbf{E}$. Buď ε číslo z lemmatu 6. Potom $P \cap U(z, \varepsilon/2) \neq \emptyset$ a tedy existuje $\Delta \in \mathscr{P}$ tak, že $\Delta \cap U(z, \varepsilon/2) \neq \emptyset$. Podle lemmatu 6 je $U(z, \varepsilon/2) \subset U(\Delta, \varepsilon) \subset P$, což není možné, neboť je $z \in \mathscr{H}(P)$.

Předpokládáme-li, že neplatí 2, snadno odvodíme spor s 1. Totéž pro tvrzení 3.

8. Věta. *Pokrytí $\mathscr{P}$ je sudé skoro disjunktní tehdy a jen tehdy, je-li Δ_0 buď obdélník nebo rovnostranný trojúhelník, nebo pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník, nebo pravoúhlý trojúhelník, jehož jeden úhel má míru $\pi/3$.*

Důkaz. Nechť $\mathscr{P}$ je sudé skoro disjunktní pokrytí. Buď $\mathscr{R}_i$ hvězdice typu i. Protože $\mathscr{R}_i$ obsahuje sudý počet různých mnohoúhelníků, pro vhodné přirozené číslo x_i je $2x_i\alpha_i\pi = 2\pi$. Protože $\alpha_i\pi = x_i^{-1}\pi$ je míra vnitřního úhlu mnohoúhelníka, platí, jak víme z elementární geometrie,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} = n - 2\,. \tag{1}$$

Protože $\alpha_i \neq 1$, je $x_i \geqq 2$. Elementárně dokážeme toto: Pro $n > 4$ neexistují $x_i \geqq 2$ přirozená, která vyhovují (1). Pro $n = 4$ vyhovuje jediná čtveřice $(2, 2, 2, 2)$. Pro $n = 3$ vyhovují pouze trojice $(3, 3, 3)$, $(2, 4, 4)$, $(2, 3, 6)$ (a jejich permutace). Protože je $\alpha_i = x_i^{-1}$, plyne odtud, že Δ_0 je některý z mnohoúhelníků uvedených v tvrzení věty.

Je známo, že pokrytí příslušná těmto mnohoúhelníkům jsou skoro disjunktní a snadno se přesvědčíme, že jsou to sudá skoro disjunktní pokrytí.

9. Označení. Buď Δ libovolný mnohoúhelník. Jeho vrcholy označme $A^1, \ldots, A^n$ a položme $A^{n+1} = A^1$. Nechť pro $i = 1, \ldots, n$ je A^iA^{i+1} strana Δ. Protože Int Δ je Jordanova oblast, existuje homeomorfní zobrazení $\tilde{f}$ kruhu $\bar{K}_1$ na Δ, které zobrazuje konformně K_1 na Int Δ. Označme $a^i = \tilde{f}_{-1}(A^i)$, $(a^i, a^{i+1}) = \tilde{f}_{-1}(A^i\ A^{i+1}) - \{a^i, a^{i+1}\}$, $\Omega^i = K_1 \cup K_2 \cup (a^i, a^{i+1})$. Zřejmě $a^i \in T$ $(i = 1, \ldots, n)$, $a^{n+1} = a^1$ a Ω^i je oblast.

Funkci g_1 z následujícího lemmatu budeme nazývat pokračováním f přes (a^i, a^{i+1}). Analogicky definujeme pokračování přes (a^i, a^{i+1}) pro funkci f v K_2.

10. Lemma. *Buď $1 \leqq i \leqq n$. Potom existuje funkce g holomorfní v Ω^i taková, že $g \mid K_1 = f$. Označme $g_1 = g \mid K_2$. Potom je g_1 konformní zobrazení K_2 na vnitřek mnohoúhelníka Δ' symetrického k Δ vzhledem ke straně A^iA^{i+1}. Funkce g nabývá své hodnoty v každém bodě $z \in \Omega^i$ jednonásobně. Speciálně: je-li $z \in \Omega^i \cap \mathbf{E}$, je $g'(z) \neq 0$.*

Důkaz. Množina Ω^i je zřejmě symetrická vzhledem ke kružnici T. V [6] je dokázán tzv. Schwarzův princip zrcadlení pro zobecněné kružnice. Z této věty plyne snadno existence funkce g. Funkce g_1 je zřejmě prostá v K_2 a tedy je g_1 konformní zobrazení K_2 na množinu symetrickou k Int Δ vzhledem k ose symetrie Δ a Δ', tedy na Int Δ'; to vyplývá z citované věty.

Dokažme, že g nabývá své hodnoty jednonásobně v každém bodě $z \in \Omega^i$.

Je-li $z \in K_1 \cup K_2$, pak je tvrzení správné, neboť $g \mid K_1$ a $g \mid K_2$ jsou konformní zobrazení. Buď $z_0 \in (a^i, a^{i+1})$. Předpokládejme, že pro toto z_0 není tvrzení správné. Potom existuje $p \geqq 2$ přirozené tak, že g nabývá své hodnoty $g(z_0) = w_0$ p-násobně. Podle známé věty existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že pro každé $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ existuje $\delta > 0$ tak, že ke každému $w \in P(w_0, \delta)$ existuje právě p různých bodů $z_j \in U(z_0, \varepsilon)$ tak, že $g(z_j) = w$. Zvolme $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ takové, aby $U(z_0, \varepsilon) \subset \Omega^i$. Zřejmě existuje $w \in P(w_0, \delta)$ takové, že $w \in \mathring{\Delta} - \Delta'$. Pro toto w existují $z_j \in U(z_0, \varepsilon)$ $(j = 1, \ldots, p)$ takové, že $g(z_1) = w$, a protože $g(U(z_0, \varepsilon) \cap K_2) \subset \Delta'$, je $z_j \in U(z_0, \varepsilon) \cap K_1$ a tedy není g prostá v K_1, což je spor.

Funkce g tedy nabývá své hodnoty jednonásobně v každém bodě z Ω^i. Odtud a ze známé věty plyne tvrzení o derivaci.

11. Označení. Nechť Δ_0 znamená mnohoúhelník z 2. Nechť $\tilde{F}_0$ je jisté, pro další úvahy pevně zvolené, homeomorfní zobrazení $\overline{K}_1$ na Δ_0, které konformně zobrazuje K_1 na Int Δ_0. Označíme $F_0 = \tilde{F}_0 \mid K_1$, $(\tilde{F}_0)_{-1}(A_i) = a_i$, $(a_i, a_{i+1}) = (\tilde{F}_0)_{-1} \,.\, (A_i A_{i+1}) - \{a_i, a_{i+1}\}$ $(i = 0, \ldots, n)$. Zřejmě jsou a_i různé body z T $(i = 1, \ldots, n)$ a je $a_0 = a_n$, $a_{n+1} = a_1$; ze známých vět plyne, že trojice bodů $\{a_{i-1}, a_i, a_{i+1}\}$ je (pro $i = 1, \ldots, n$) přirozeně uspořádána vzhledem ke K_1. Dále označíme $\Omega_i = K_1 \cup K_2 \cup (a_i, a_{i+1})$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\Omega = \mathbf{S} - \{a_1, \ldots, a_n\}$. Pro $z \in \Omega$ buď $\sigma(z)$ takové reálné číslo, že $U(z, \sigma(z))$ je maximální kruh o středu z ležící v Ω.

Buď $\{i_1, \ldots, i_k\}$ skupina. Budeme nyní definovat funkce $F_{i_1 \ldots i_k}$. Funkce F_0 je definována; buď F_i pokračování F_0 přes (a_i, a_{i+1}) $(i = 1, \ldots, n)$. Podle 10 je F_i konformní zobrazení K_2 na vnitřek mnohoúhelníka symetrického k Δ_0 vzhledem k s_i, tedy na Int Δ_i.

Buď $\{i_1, \ldots, i_k\}$ sudá (resp. lichá) skupina. Nechť je definována funkce $F_{i_1 \ldots i_k}$ a nechť $F_{i_1 \ldots i_k}$ je konformní zobrazení K_1 (resp. K_2) na vnitřek $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$. Buď i_{k+1} číslo takové, že $\{i_1, \ldots, i_{k+1}\}$ je skupina. Potom buď $F_{i_1 \ldots i_{k+1}}$ pokračování $F_{i_1 \ldots i_k}$ přes $(a_{i_{k+1}}, a_{i_{k+1}+1})$. Funkce $F_{i_1 \ldots i_{k+1}}$ je tedy definována v K_2 (resp. v K_1).

Označme $\tilde{F}_{i_1 \ldots i_k}$ homeomorfní rozšíření $F_{i_1 \ldots i_k}$ na uzávěr definičního oboru.

Buď $1 \leqq i \leqq n$, $\{i_1, \ldots, i_k\} \in \mathscr{S}$. V Ω_i definujeme funkci $F^i_{i_1 \ldots i_k}$ takto: je-li $\{i_1, \ldots, i_k\}$ sudá (resp. lichá) skupina, položme

$$F^i_{i_1 \ldots i_k} = \begin{cases} \tilde{F}_{i_1 \ldots i_k} & \text{v} \quad K_1 \cup (a_i, a_{i+1}) \, (\text{resp. v } K_2 \cup (a_i, a_{i+1})) \\ F_{[i_1 \ldots i_k,\, i]} & \text{v} \quad K_2 \, (\text{resp. v } K_1) \end{cases}$$

12. Poznámka. Z našich definic a z lemmatu 10 plyne okamžitě toto tvrzení: Buď $\{i_1, \ldots, i_k\}$ sudá (resp. lichá) skupina. Potom je $\tilde{F}_{i_1 \ldots i_k}$ homeomorfní zobrazení $\overline{K}_1$ (resp. $\overline{K}_2$) na $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$, které konformně zobrazuje K_1 (resp. K_2) na Int $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$. Z lemmatu 10 plyne, že funkce $F^i_{i_1 \ldots i_k}$ je holomorfní v Ω_i a má všude v $\Omega_i \cap \mathbf{E}$ derivaci různou od nuly a v ∞ nabývá své hodnoty jednonásobně.

Dále indukcí snadno dokážeme, že $\tilde{F}_{i_1 \ldots i_k}(a_i)$ je vrchol $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ typu i $(i = 1, \ldots, n)$.

13. Lemma. *Nechť f je konformní zobrazení K_1 (resp. K_2) na vnitřek mnohoúhelníka Δ, buď $\tilde{f}$ homeomorfní rozšíření f na $\bar{K}_1$ (resp. $\bar{K}_2$). Buď A vrchol Δ, $\alpha\pi$ buď míra vnitřního úhlu Δ při tomto vrcholu $(0 < \alpha < 2,\ \alpha \neq 1)$ a buď $a = \tilde{f}_{-1}(A)$. Buď $\varepsilon > 0$.*

Neexistuje funkce g meromorfní v $U(a, \varepsilon)$ taková, že $f = g$ v $U(a, \varepsilon) \cap K_1$ (resp. $U(a, \varepsilon) \cap K_2$).

Důkaz. Pro $\beta \in \langle 0, 2\pi)$, $w \in \mathbf{E}$ označme

$$R_\beta = \{z \in \mathbf{E};\ z = r \exp(\mathrm{i}\beta),\ r \geqq 0\}, \quad R_\beta(w) = \{z' \in \mathbf{E};\ z' = z + w,\ z \in R_\beta\}.$$

Zvolme $\delta > 0$ tak, aby v $P(A, \delta)$ neležely žádné vrcholy Δ. Zřejmě existuje otevřený interval $J \subset \langle 0, 2\pi)$ takový, že pro $\beta \in J$ je $R_\beta(A) \cap P(A, \delta) \cap \Delta = \emptyset$.

Tvrzení dokážeme nejprve pro K_1. Označme $G_1 = \operatorname{Int} \Delta \cap P(A, \delta)$, $G_2 = f_{-1}(G_1)$. Množina G_2 je oblast a její hranice obsahuje oblouk C kružnice T, uvnitř kterého leží bod a. Pro $z \in G_2$ položíme $\hat{f}(z) = \tilde{f}(z) - A$.

Nechť $\operatorname{Log}_\beta z = \lg |z| + \mathrm{i} \operatorname{Arg}_\beta z$, kde $\operatorname{Arg}_\beta z$ je ta hodnota argumentu z, která leží v $(\beta - 2\pi, \beta\rangle$. (Pak je Log_β jednoznačnou větví logaritmu v $\mathbf{E} - R_\beta$). Na množině G_2 vyšetřujeme funkci

$$h_\beta = \exp * (\alpha^{-1} \operatorname{Log}_\beta) * \hat{f}, \quad \beta \in J. \tag{2}$$

Z teorie konformního zobrazení víme, že h_β zobrazí G_2 konformně na půlkruh M. Označme $\tilde{h}_\beta$ spojité rozšíření h_β na C. Zřejmě je $\tilde{h}_\beta(C)$ obsažena v průměru půlkruhu M a $\tilde{h}_\beta(a) = 0$. Podle Schwarzova principu zrcadlení pro zobecněné kružnice existuje funkce g_β holomorfní v jistém okolí $U_1(a)$, pro niž $g_\beta = \tilde{h}_\beta$ na $(G_2 \cup C) \cap$ $\cap\ U_1(a)$. Je tedy $g_\beta(a) = 0$. Analogicky jako v lemmatu 10 dokážeme, že $g'_\beta(a) \neq 0$. Je však zřejmé, že pro $\beta, \beta' \in J$ je $h_\beta = h_{\beta'}$ na G_2 a tedy podle věty o jednoznačnosti je také $g_\beta = g_{\beta'}$ v $U_1(a)$. Zejména tedy hodnota $g'_\beta(a) = \gamma$ nezávisí na volbě $\beta \in J$. Zvolme nyní $\beta \in J$ tak, aby $\gamma \notin R_\beta$. Pro toto β pišme místo h_β, g_β pouze h, g. Protože $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$, existuje funkce Φ_1 holomorfní v $U_1(a)$ taková, že $\Phi_1(a) \neq 0$ a $g(z) = (z - a) . \Phi_1(z)$ pro $z \in U_1(a)$. Dále je $\Phi_1(a) = g'(a)$ a tedy $\Phi_1(a) \notin R_\beta$.

Jestliže $M \cap R_\beta = \emptyset$, položme $M_1 = M$. Jinak nechť M_1 je jedna ze dvou komponent množiny $M - R_\beta$. Množina M_1 je oblast. Je tedy také $G_3 = h_{-1}(M_1)$ oblast, je $a \in \mathscr{H}(G_3)$ a na G_3 je definována funkce $\exp * \alpha \operatorname{Log}_\beta * h = \exp * \alpha \operatorname{Log}_\beta * \exp *$ $* \alpha^{-1} \operatorname{Log}_\beta * \hat{f}$. Poslední rovnost plyne z (2). Pro každé $z \in G_3$ existuje celé číslo $k(z)$ takové, že

$$\exp(\alpha \operatorname{Log}_\beta (\exp(\alpha^{-1} \operatorname{Log}_\beta \hat{f}(z)))) = \hat{f}(z) \exp(2\pi\mathrm{i}\alpha\, k(z)).$$

Protože na G_3 je $\hat{f}(z) \neq 0$ a G_3 je souvislá, existuje $d_1 \in \mathbf{E}$ tak, že pro $z \in G_3$ je $\exp(2\pi\mathrm{i}\alpha\, k(z)) = d_1 (\neq 0)$. Pro $z \in G_3$ tedy platí

$$\hat{f}(z) = d_1^{-1} \exp(\alpha \operatorname{Log}_\beta h(z))$$

a tedy na otevřené (a zřejmě neprázdné) množině $G_3 \cap U_1(a)$ je

$$f(z) = A + d_1^{-1} \exp(\alpha \operatorname{Log}_\beta [(z - a)\, \Phi_1(z)]). \tag{3}$$

Upravme pravou stranu posledního výrazu. Zřejmě existuje komponenta G_4 množiny $G_3 \cap U_1(a) - R_\beta(a)$ taková, že $a \in \bar{G}_4$. Protože $\Phi_1(a) \notin R_\beta$, existuje okolí $U_2(a) \subset U_1(a)$ tak, že funkce $\exp * (\alpha \operatorname{Log}_\beta) * \Phi_1$ je holomorfní v $U_2(a)$. Podobně jako nahoře zjistíme, že existuje $d_2 \in \mathbf{E} - \{0\}$ tak, že pro $z \in G_4 \cap U_2(a) \neq \emptyset$ je

$$(4) \qquad \exp(\alpha \operatorname{Log}_\beta[(z-a)\,\Phi_1(z)]) = \\ = d_2 \exp(\alpha \operatorname{Log}_\beta (z-a)) \exp(\alpha \operatorname{Log}_\beta \Phi_1(z)) .$$

Pro $z \in U_2(a)$ položme

$$(5) \qquad \Phi_2(z) = d_1^{-1} d_2 \exp(\alpha \operatorname{Log}_\beta \Phi_1(z)) ,$$

dále označme $G_5 = G_4 \cap U_2(a)$. G_5 je otevřená neprázdná množina, $a \in \bar{G}_5$ a pro $z \in G_5$ podle (3), (4), (5) platí

$$(6) \qquad f(z) = A + \Phi_2(z) \exp(\alpha \operatorname{Log}_\beta (z-a)) .$$

Protože α není celé, nelze funkci $\exp(\alpha \operatorname{Log}_\beta (z-a))$ meromorfně rozšířit na žádné okolí bodu a. Odtud snadno naše tvrzení plyne.

Buď nyní f funkce v K_2. Buď B vrchol Δ takový, že AB je strana Δ, buď $b = \tilde{f}_{-1}(B)$ a buď konečně f_1 pokračování f přes (a, b). Potom je f_1 funkce v K_1 a splňuje předpoklady právě dokázaného tvrzení. Nyní na f_1 aplikujeme první část důkazu.

Lemma je dokázáno.

14. Poznámka. Nechť f je funkce v K_1 z lemmatu 13. Ze vzorce (6) výpočtem zjistíme, že existuje funkce Φ holomorfní v jistém $U(a)$ taková, že pro $z \in K_1 \cap U(a)$ je

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{\alpha - 1}{z - a} + \Phi(z) .$$

15. Označení. Buď $z_0 \in \Omega$. Buď $1 \leqq i \leqq n$ a $\{i_1, \ldots, i_k\}$ taková skupina, že je definována $F^i_{i_1 \ldots i_k}(z_0)$. (Je tedy $z_0 \in \Omega_i$.) Protože Ω_i je otevřená, existuje okolí $U(z_0)$, v němž je funkce $F^i_{i_1 \ldots i_k}$ definovaná, a podle poznámky 12 holomorfní. Je tedy $(z_0, F^i_{i_1 \ldots i_k})$ analytická dvojice. Element určený touto dvojicí označíme

$$(7) \qquad \mathscr{E}(z_0, F^i_{i_1 \ldots i_k}) ,$$

střed elementu $\mathscr{E}$ označíme $s(\mathscr{E})$, jeho hodnotu $h(\mathscr{E})$. Zavedeme tuto úmluvu: jestliže budeme mluvit o elementu tvaru (7), nebudeme zdůrazňovat, že předpokládáme $z_0 \in \Omega$ a že je definováno $F^i_{i_1 \ldots i_k}(z_0)$.

Je-li φ křivka, budeme označovat p.b. φ (resp. k.b. φ) počáteční (resp. koncový) bod φ. Symbol $\langle \varphi \rangle$ znamená geometrický obraz φ.

Konečně označíme $\mathscr{F}$ (podrobněji $\mathscr{F}(\Delta_0, F_0)$) množinu všech elementů tvaru (7).

16. Lemma. *Je-li $\mathscr{E}_1 \in \mathscr{F}$, $\mathscr{E}_2 \in \mathscr{F}$, je $\mathscr{E}_1$ pokračováním $\mathscr{E}_2$ v Ω.*

Důkaz. Označme $\mathscr{E}_0 = \mathscr{E}(z_0, F_0)$, $z_0 \in K_1$. Zřejmě stačí dokázat, že každý element $\mathscr{E} = \mathscr{E}(z, F^i_{i_1 \ldots i_k}) \in \mathscr{F}$ je pokračováním $\mathscr{E}_0$ v Ω. Toto tvrzení dokážeme indukcí podle k.

Buď $1 \leqq i \leqq n$. Buď nejprve $1 \leqq i_1 \leqq n$, $z \in \Omega_i$. Máme ukázat, že $\mathscr{E} = \mathscr{E}(z, F^i_{i_1})$ je pokračováním $\mathscr{E}_0$ v Ω. To ovšem vyplývá z toho, že $F^i_{i_1} \mid K_2 = F_{i_1} = F_0^{i_1} \mid K_2$ a $F_0^{i_1} \mid K_1 = F_0$. Nechť pro jisté $r \geqq 1$ platí: pro každou skupinu $\{i_1, \ldots, i_r\}$, každé i a každé $z' \in \Omega_i$ je $\mathscr{E}' = \mathscr{E}(z', F^i_{i_1 \ldots i_r})$ pokračováním $\mathscr{E}_0$ v Ω. Buď $\{j_1, \ldots, j_{r+1}\}$ libovolná skupina, $1 \leqq j \leqq n$, $\mathscr{E}'' = \mathscr{E}(z'', F^j_{j_1 \ldots j_{r+1}})$. Buď nejprve $\{j_1, \ldots, j_{r+1}\}$ sudá skupina. Potom $F^j_{j_1 \ldots j_{r+1}} \mid K_1 = F_{j_1 \ldots j_{r+1}} = F^{j_{r+1}}_{j_1 \ldots j_r} \mid K_1$. Odtud a z indukčního předpokladu plyne, že $\mathscr{E}''$ je pokračováním $\mathscr{E}_0$. Je-li $\{j_1, \ldots, j_{r+1}\}$ lichá skupina, je $F^j_{j_1 \ldots j_{r+1}} \mid K_2 = F_{j_1 \ldots j_{r+1}} = F^{j_{r+1}}_{j_1 \ldots j_r} \mid K_2$ a tvrzení je tedy opět správné.

17. Lemma. *Každý $\mathscr{E} \in \mathscr{F}$ má pokračování podél každé křivky φ v Ω, pro niž $s(\mathscr{E}) =$ p.b. φ, přičemž příslušný řetěz elementů podél φ se skládá jen z elementů tvaru* (7).

Důkaz. Protože žádný z bodů $a_1, \ldots, a_n$ neleží na $\langle\varphi\rangle$, existuje pro každé t z intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, na němž je φ definována, interval $J(t)$ otevřený v $\langle\alpha, \beta\rangle$ a obsahující bod t tak, že $\varphi(J(t)) \subset U(\varphi(t), \sigma(\varphi(t)))$. Protože $\langle\alpha, \beta\rangle$ je kompaktní, existují body $\alpha = T_0 < \ldots < T_r = \beta$ tak, že pro každé $j = 1, \ldots, r$ je $\langle T_{j-1}, T_j\rangle$ obsažen v některém intervalu $J(t_j)$. Označíme-li $\mathscr{K}_j = U(\varphi(t_j), \sigma(\varphi(t_j)))$, bude tedy $\varphi(\langle T_{j-1}, T_j\rangle) \subset \subset \mathscr{K}_j$. Kruhy $\mathscr{K}_1, \ldots, \mathscr{K}_r$ tvoří řetěz. Nyní budeme definovat v $\mathscr{K}_j$ funkci G_j.

Nechť $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\varphi(\alpha), F^i_{i_1 \ldots i_k})$. Zřejmě existuje j takové, že $\mathscr{K}_1 \subset \Omega_j$. Protože $\varphi(\alpha) \in \in \mathscr{K}_1$, je $\varphi(\alpha) \in \Omega_j$ a tedy zřejmě existuje skupina $\{j_1, \ldots, j_l\}$ tak, že $F^i_{i_1 \ldots i_k} = F^j_{j_1 \ldots j_l}$ v jistém $U(\varphi(\alpha))$. Funkce $F^j_{j_1 \ldots j_l}$ je ovšem definována v Ω_j, tedy zejména v bodě $\varphi(t_1)$. Potom buď G_1 kanonická funkce elementu $\mathscr{E}(\varphi(t_1), F^j_{j_1 \ldots j_r})$. Předpokládejme, že jsou definovány funkce $G_1, \ldots, G_{m-1}$, přičemž G_j je kanonická funkce elementu o středu $\varphi(t_j)$ $(j = 1, \ldots, m-1)$; definujme G_m. Buď $z \in \mathscr{K}_{m-1} \cap \mathscr{K}_m$ a j takové, že $\mathscr{K}_m \subset \Omega_j$. Protože $z \in \mathscr{K}_m$, je $z \in \Omega_j$ a zřejmě existuje skupina $\{j_1, \ldots, j_l\}$ tak, že $G_{m-1} = F^j_{j_1 \ldots j_l}$ v jistém $U(z)$. Je ovšem $\varphi(t_m) \in \Omega_j$ a tedy je definováno $F^j_{j_1 \ldots j_l}(\varphi(t_m))$. Pak buď G_m kanonická funkce elementu $\mathscr{E}(\varphi(t_m), F^j_{j_1 \ldots j_l})$. Potom je $\{G_1, \ldots, G_r\}$ řetěz meromorfních funkcí a systém elementů $\mathscr{E}^t = \mathscr{E}(\varphi(t), G_j)$ pro $t \in \langle T_{j-1}, T_j\rangle$, $j = 1, \ldots, r$, tvoří řetěz podél φ. Je zřejmé, že každý element tohoto řetězu má tvar (7).

18. Lemma. *Žádný element $\mathscr{E} \in \mathscr{F}$ nemá pokračování podél křivky φ, pro niž* p.b. $\varphi = s(\mathscr{E})$ *a $a_j \in \langle\varphi\rangle$ pro některé $j = 1, \ldots, n$.*

Důkaz. Nechť φ je definována na $\langle\alpha, \beta\rangle$. Předpokládejme, že existuje řetěz elementů podél φ, jehož prvním elementem je $\mathscr{E}$, přičemž pro některé j je $a_j \in \langle\varphi\rangle$. Buď t_0 nejmenší číslo, pro něž je $\varphi(t_0)$ rovno některému a_j. Označme Φ_0 kanonickou funkci elementu $\mathscr{E}^{t_0}$, $\mathscr{K}_0$ kruh tohoto elementu. Zvolme $t_1 \in \langle\alpha, t_0)$ tak, aby element (pišme ho v kanonickém tvaru) $\mathscr{E}^{t_1} = \mathscr{E}(\varphi(t_1), \Phi_1)$ byl přímým pokračováním $\mathscr{E}^{t_0}$. Protože $\varphi \mid \langle\alpha, t_1\rangle$ je křivka v Ω, je podle lemmatu 17 řetěz podél této křivky tvořen elementy tvaru (7). Buď $\mathscr{K}_1$ kruh elementu $\mathscr{E}^{t_1}$. Zřejmě alespoň jedna z množin $M_1 = K_1 \cap \mathscr{K}_0 \cap \mathscr{K}_1$, $M_2 = K_2 \cap \mathscr{K}_0 \cap \mathscr{K}_1$ je neprázdná. Nechť je to například M_1. Zřejmě je $\Phi_1 = F_{i_1 \dots i_k}$ pro jistou skupinu a dále je v M_1

$$\Phi_0 = F_{i_1 \dots i_k} . \tag{8}$$

Podle poznámky 12 je $F_{i_1 \dots i_k}$ konformní zobrazení K_1 na Int $\Delta_{i_1 \dots i_k}$, přičemž $\tilde{F}_{i_1 \dots i_k}(\varphi(t_0))$ je vrchol mnohoúhelníka $\Delta_{i_1 \dots i_k}$. Z (8) a z lemmatu 13 dostáváme spor. Obdobně postupujeme v případě, že $M_2 \neq \emptyset$.

19. Označení. Je-li $\mathscr{F}^*$ analytická funkce, označíme $\mathbf{D}(\mathscr{F}^*)$ (resp. $\mathbf{H}(\mathscr{F}^*)$) definiční obor $\mathscr{F}^*$ (resp. obor hodnot $\mathscr{F}^*$). Dále označíme W množinu všech vrcholů mnohoúhelníků z pokrytí $\mathscr{P}$, které nejsou obsaženy ve vnitřku žádného mnohoúhelníka z $\mathscr{P}$ ani uvnitř žádné strany žádného mnohoúhelníka z $\mathscr{P}$.

20. Věta. *$\mathscr{F}$ je analytická funkce v $\mathbf{S}$. Všechny elementy funkce $\mathscr{F}$ jsou holomorfní a prosté. $\mathscr{F}$ je neomezeně pokračovatelná v Ω. Je $\mathbf{D}(\mathscr{F}) = \Omega$ a $\mathbf{H}(\mathscr{F}) = \mathbf{E} - W$.*

Důkaz. Z lemmatu 16 a 17 plyne, že $\mathscr{F}$ je analytická funkce. Z definice $\mathscr{F}$ a poznámky 12 plyne druhé tvrzení. Z lemmatu 17 plyne, že $\mathscr{F}$ je neomezeně pokračovatelná v Ω, z lemmatu 18 plyne, že $\mathbf{D}(\mathscr{F}) = \Omega$. Z poznámky 12 a z prvního tvrzení lemmatu 7 je vidět, že $\mathbf{H}(\mathscr{F}) = \mathbf{E} - W$.

21. Poznámka. Protože $\mathscr{E}(0, F_0) \in \mathscr{F}$, je $\mathscr{F}$ analytická funkce určená konformním zobrazením jednotkového kruhu na vnitřek mnohoúhelníka. Protože je $\mathscr{F}$ neomezeně pokračovatelná v K_1, má podle věty o monodromii v K_1 pouze jednoznačné větve. Je tedy, jinými slovy, $\mathscr{F}$ analytická funkce, jejíž jednou větví v K_1 je konformní zobrazení K_1 na vnitřek mnohoúhelníka Δ_0.

22. Lemma. *Buďte $\{i_1, \dots, i_k\}$, $\{j_1, \dots, j_l\}$ sudé skupiny; buď $z \in K_1$. Buď $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}(z, F_{i_1 \dots i_k})$, $\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}(z, F_{j_1 \dots j_l})$. K tomu, aby $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2$, je nutné a stačí, aby $\Delta_{i_1 \dots i_k} = \Delta_{j_1 \dots j_l}$ a splývající vrcholy byly téhož typu.*

Důkaz. Že podmínka je nutná, plyne z poznámky 12. Nechť je podmínka splněna. Podle poznámky 12 jsou $F_{i_1 \dots i_k}$ a $F_{j_1 \dots j_l}$ konformní zobrazení na tentýž mnohoúhelník. Označme $A^i = \tilde{F}_{i_1 \dots i_k}(a_i)$ $(i = 1, \dots, n)$. Z poznámky 12 a předpokladu o typu vrcholu plyne, že také $\tilde{F}_{j_1 \dots j_l}(a_i) = A^i$. Protože $n \geqq 3$ a trojice $\{a_1, a_2, a_3\}$ je přirozeně uspořádána vzhledem ke K_1 a $F_{i_1 \dots i_k}$ je konformní zobrazení, je trojice $\{A^1, A^2, A^3\}$ přirozeně uspořádána vzhledem k Int $\Delta_{i_1 \dots i_k}$. Podle známé věty existuje právě jedno homeomorfní zobrazení Φ kruhu $\bar{K}_1$ na $\Delta_{i_1 \dots i_k}$, konformní na K_1 takové, že $\Phi(a_i) = A^i$ $(i = 1, 2, 3)$. Je tedy nutně $F_{i_1 \dots i_k} = F_{j_1 \dots j_l}$ na K_1, tedy $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2$, což jsme měli dokázat.

23. Věta. *$\mathscr{F}$ je přesně ∞-značná.*

Důkaz. Podle věty 20 je $\mathscr{F}$ neomezeně pokračovatelná v Ω, tedy je v Ω buď přesně p-značná pro nějaké přirozené p, nebo přesně ∞-značná. Stačí tedy ukázat, že nějaký bod z Ω je středem nekonečně mnoha různých elementů. Zvolme $z_0 \in K_1$. Všechny elementy $\mathscr{F}$ o středu z_0 jsou tvaru $\mathscr{E}(z_0, F_{i_1 \dots i_k})$, kde $\{i_1, \dots, i_k\}$ je sudá skupina. Kdyby existoval pouze konečný počet různých elementů $\mathscr{F}$ o středu z_0, existovalo by podle lemmatu 22 pouze konečně mnoho různých mnohoúhelníků se sudou skupinou. To by ovšem byl spor s druhým tvrzením v lemmatu 7.

24. Poznámka. Protože $\mathscr{F}$ je neomezeně pokračovatelná v Ω, nemá $\mathscr{F}$ v Ω žádné singulární body. Z lemmatu 18 plyne, že $a_1, \dots, a_n$ jsou (isolovanými) singulárními body $\mathscr{F}$.

Zvolme jisté i a vyšetřujme $\mathscr{F}$ v prstencovém okolí $P(a_i)$ bodu a_i takovém, že v něm je $\mathscr{F}$ neomezeně pokračovatelná. Je známo, že klasifikace singulárních bodů nezávisí na bližší volbě tohoto okolí.

Buď $\mathscr{F}_1$ větev $\mathscr{F}$ v $P(a_i)$ určená elementem $\mathscr{E}(z_0, F_{i_1 \dots i_k})$. Jak víme, pokračování podél uzavřené křivky v $P(a_i)$ závisí pouze na indexu bodu a_i vzhledem k této křivce. Odtud a z našich definic snadno vyplývá, že platí: Buď $\mathscr{E}_1(z, G)$ element $\mathscr{F}$ o středu v $P(a_i) - T$. Potom $\mathscr{E}_1 \in \mathscr{F}_1$ právě když $G = F_{[i_1 \dots i_k, i_{k+1} \dots i_{k+l}]}$, kde i_{k+s} je buď i nebo $i - 1$ $(s = 1, \dots, l)$. (Je zřejmé, jak budeme modifikovat toto tvrzení pro případ $i = 1$.)

Buď nyní $\mathscr{F}_1$ libovolná větev $\mathscr{F}$ v $P(a_i)$ určená elementem $\mathscr{E}(z, F_{i_1 \dots i_k})$. Větvi $\mathscr{F}_1$ přiřadíme hvězdici $\mathscr{R}_i^1$ typu i určenou mnohoúhelníkem $\Delta_{i_1 \dots i_k}$. Z definice a z výše napsaného plyne: je-li $z \in P(a_i)$, potom

$$\mathscr{E}(z, F_{j_1 \dots j_l}) \in \mathscr{F}_1 \Leftrightarrow \Delta_{j_1 \dots j_l} \in \mathscr{R}_i^1 .$$

Snadno zjistíme toto: je-li $\mathscr{R}^*$ hvězdice typu i, existuje větev $\mathscr{F}^*$ funkce $\mathscr{F}$ v $P(a_i)$, které je přiřazena $\mathscr{R}^*$.

25. Lemma. *Buď $\mathscr{F}_j$ větev $\mathscr{F}$ v $P(a_i)$. Buď R_j^i hvězdice přiřazená $\mathscr{F}_j$ podle poznámky 24 $(j = 1, 2)$. Potom $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$ tehdy a jen tehdy, je-li $\mathscr{R}_i^1 = \mathscr{R}_i^2$.*

Důkaz. Je-li $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$, pak z předpokladu $\mathscr{E} = \mathscr{E}(z, F_{i \dots i_k}) \in \mathscr{F}_1$ plyne, že $\mathscr{E} \in \mathscr{F}_2$. To ovšem znamená, že $\Delta_{i_1 \dots i_k} \in \mathscr{R}_i^1 \cap \mathscr{R}_i^2$, čili, podle definice, $\mathscr{R}_i^1 = \mathscr{R}_i^2$.

Je-li $\mathscr{R}_i^1 = \mathscr{R}_i^2$, pak existuje $\Delta_{i_1 \dots i_k} \in \mathscr{R}_i^1 \cap \mathscr{R}_i^2$, tedy $\mathscr{E}(z, F_{i_1 \dots i_k}) \in \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 (z \in P(a_i) - T)$ a odtud plyne, že $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$.

26. Lemma. *Buď $\mathscr{F}_1$ větev $\mathscr{F}$ v $P(a_i)$. Potom je $\mathscr{F}_1$ přesně $\tau(\alpha_i)$-značná.*

Důkaz. Buď $z_0 \in K_1 \cap P(a_i)$. Stačí zřejmě dokázat, že existuje právě $\tau(\alpha_i)$ různých elementů funkce $\mathscr{F}_1$ o středu z_0. Poznamenejme, že z předpokladu $\Delta_{i_1 \dots i_k} \in \mathscr{R}_i$, $\Delta_{j_1 \dots j_l} \in \mathscr{R}_i$, $\{i_1, \dots, i_k\}$ a rovněž $\{j_1, \dots, j_l\}$ je sudá skupina, snadno plyne, že splývající vrcholy těchto mnohoúhelníků jsou téhož typu. Podle lemmatu 22 má $\mathscr{F}_1$

stejný počet různých elementů o středu z_0 jako $\mathscr{R}_l$ různých mnohoúhelníků se sudou skupinou, tedy podle 5 tento počet je $\tau(\alpha_i)$, což jsme chtěli dokázat.

27. Lemma. *Buď $M \subset \mathbf{E}$ oblast neroztínající $\mathbf{S}$. Funkce g_i buď holomorfní v M a nechť $g_i' \neq 0$ v M $(i = 1, 2)$. Je-li v M*

$$\frac{g_1''}{g_1'} = \frac{g_2''}{g_2'}, \tag{9}$$

potom existují $a, b \in \mathbf{E}$ tak, že $g_1 = ag_2 + b$ v M.

Důkaz. Protože $g_i' \neq 0$ v M, je funkce g_i''/g_i' holomorfní v M a podle Cauchyovy věty má v M primitivní funkci. Podle známé věty má g_i' v M jednoznačnou větev logaritmu u_i, která je primitivní funkcí k g_i''/g_i' v M $(i = 1, 2)$. Vztah (9) lze tedy psát:

$$u_1' = u_2'. \tag{10}$$

Z (10) plyne podle známé věty, že existuje $c \in \mathbf{E}$ tak, že $u_1 - u_2 = c$ v M. Je $g_i' = \exp * u_i$ v M a odtud snadno plyne, že pro $z \in M$ je $g_1'(z) = \exp c\, g_2'(z)$. Z téže věty plyne existence $b \in \mathbf{E}$ takového, že pro $z \in M$ je $g_1(z) - \exp c\, g_2(z) = b$. Nyní položíme $a = \exp c$.

28. Lemma. *Buď g holomorfní v $U(\infty, \varepsilon)$, $(\varepsilon > 0)$. Nechť $g' \neq 0$ v $P(\infty, \varepsilon)$ a nechť g nabývá v ∞ své hodnoty jednonásobně. Potom je*

$$\lim_{z \to \infty} \frac{g''(z)}{g'(z)} = 0$$

a funkce h, definovaná podmínkami $h(z) = g''(z)/g'(z)$ pro $z \in P(\infty, \varepsilon)$, $h(\infty) = 0$, je holomorfní v $U(\infty, \varepsilon)$.

Důkaz. V $U(\infty, \varepsilon)$ lze psát $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$, kde $b_1 \neq 0$, neboť g nabývá v ∞ své hodnoty jednonásobně. Výpočtem zjistíme, že existuje okolí $U(\infty)$ a funkce h_1 holomorfní v $U(\infty)$ taková, že $h_1(\infty) = 1$ a že pro $z \in U(\infty) - \{\infty\}$ je $g''(z)/g'(z) = -2z^{-1} h_1(z)$. Odtud vše snadno plyne.

29. Lemma. *Buď $\{i_1, \ldots, i_k\}$ sudá skupina. Potom existují $a, b \in \mathbf{E}$ tak, že v $\overline{K}_1$ platí*

$$\tilde{F}_{i_1 \ldots i_k} = a\tilde{F}_0 + b .$$

Důkaz. Označme A^i vrchol typu i mnohoúhelníka $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$. Podle poznámky 12 je $\tilde{F}_{i_1 \ldots i_k}$ homeomorfní zobrazení $\overline{K}_1$ na $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$, které je konformní v K_1 a $\tilde{F}_{i_1 \ldots i_k}(a_i) = A^i$. Podle lemmatu 3 existuje lineární zobrazení φ, $\varphi(z) = az + b$, takové, že $\varphi(\Delta_0) = \Delta_{i_1 \ldots i_k}$, přičemž $\varphi(A_i) = A^i$. Položme $\tilde{G} = \varphi * \tilde{F}_0$ na $\overline{K}_1$. Potom je $\tilde{G}$ homeomorfní zobrazení $\overline{K}_1$ na $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$, které je konformní v K_1 a $\tilde{G}(a_i) = A^i$. Podobně jako v důkazu lemmatu 22 zjistíme, že $\tilde{F}_{i_1...i_k} = \tilde{G} = a\tilde{F}_0 + b$ v $\bar{K}_1$, což jsme měli dokázat.

30. Poznámka. Označme $\mathscr{F}'$ derivaci analytické funkce $\mathscr{F}$. Víme, že $\mathscr{F}'$ je analytická funkce (v $\mathbf{S}$), a protože $\mathscr{F}$ je neomezeně pokračovatelná v Ω, je $\mathscr{F}'$ neomezeně pokračovatelná v Ω. Dále označme $\mathscr{F}''$ derivaci analytické funkce $\mathscr{F}'$. Protože $\mathscr{F}'$ (resp. $\mathscr{F}''$) je neomezeně pokračovatelná v Ω, jsou elementy $\mathscr{F}'$ (resp. $\mathscr{F}''$) o středech v Ω tvaru $\mathscr{E}(z, f')$ (resp. $\mathscr{E}(z, f'')$), kde f je taková funkce, že $\mathscr{E}(z, f) \in \mathscr{F}$. Buď $\mathscr{E}^0 = \mathscr{E}(0, F_0''/F_0')$. Podíl $\mathscr{F}''/\mathscr{F}'$ má smysl, neboť podle věty 20 je $0 \notin \mathscr{F}'(\mathbf{E} \cap \Omega)$. Označme $\mathscr{G} \in \mathscr{F}''/\mathscr{F}'$ tu analytickou funkci, pro niž $\mathscr{E}^0 \in \mathscr{G}$ a buď $\mathscr{G}_1$ větev $\mathscr{G}$ v Ω, pro niž $\mathscr{E}^0 \in \mathscr{G}_1$. Protože $\mathscr{F}''$ a také, jak snadno nahlédneme, i $1/\mathscr{F}'$ je neomezeně pokračovatelná v Ω, je analytická funkce $\mathscr{G}_1$ neomezeně pokračovatelná v Ω.

Snadno zjistíme, že všechny elementy $\mathscr{G}_1$ o středu v Ω jsou tvaru $\mathscr{E}(z, f''/f')$, kde f je taková funkce, že $\mathscr{E}(z, f) \in \mathscr{F}$. (Pro $z = \infty$ znamená ovšem f''/f' funkci definovanou v ∞ limitou, která, jak plyne z věty 20 a lemmatu 28, existuje.) Protože každý element $\mathscr{F}$ je holomorfní a $0 \notin \mathscr{F}'(\mathbf{E} \cap \Omega)$, je každý element funkce $\mathscr{G}_1$ o středu v $\mathbf{E} \cap \Omega$ holomorfním elementem. Rovněž elementy $\mathscr{G}_1$ o středu ∞ jsou holomorfní, jak plyne z lemmatu 28.

Zabývejme se značností funkce $\mathscr{G}_1$. Buď $\mathscr{E}$ element funkce $\mathscr{G}_1$ o středu 0. Potom $\mathscr{E} = \mathscr{E}(0, F''_{i_1...i_k}/F'_{i_1...i_k})$, kde $\{i_1, \ldots, i_k\}$ je sudá skupina. Podle lemmatu 29 je ovšem v K_1 $F''_{i_1...i_k}/F'_{i_1...i_k} = F_0''/F_0'$ a tedy $\mathscr{E} = \mathscr{E}^0$. Má tedy $\mathscr{G}_1$ pouze jeden element o středu 0, a protože je $\mathscr{G}_1$ neomezeně pokračovatelná, je jednoznačná a tedy meromorfní v Ω. Protože všechny elementy $\mathscr{G}_1$ jsou holomorfní, je $\mathscr{G}_1$ holomorfní.

Z jednoznačnosti $\mathscr{G}_1$ plyne podle lemmatu 27 snadno mj. tento důsledek: je-li $\{i_1, \ldots, i_k\}$ lichá skupina, existují $a, b \in \mathbf{E}$ tak, že v K_2 platí

$$F_{i_1...i_k} = aF_1 + b\,. \tag{11}$$

Nakonec poznamenejme toto: buď φ lineární zobrazení, $\varphi(z) = az + b$, $\mathscr{F}_1$ analytická funkce v nějaké oblasti Ω^*. Protože φ je meromorfní, obsahuje systém $\varphi * \mathscr{F}_1$ právě jednu analytickou funkci. Označíme ji $a\mathscr{F}_1 + b$.

31. Věta. *Buď $\Omega^* \subset \Omega$ oblast. Buď $\mathscr{F}_i$ $(i = 1, 2)$ větev $\mathscr{F}$ v Ω^*. Potom existují $a, b \in \mathbf{E}$ tak, že*

$$\mathscr{F}_2 = a\mathscr{F}_1 + b\,.$$

Důkaz. Alespoň jedna z množin $\Omega^* \cap K_1$, $\Omega^* \cap K_2$ je neprázdná. Nechť je to např. $\Omega^* \cap K_1$. Buď $\mathscr{E}_i$ element funkce $\mathscr{F}_i$ $(i = 1, 2)$ o středu $z \in \Omega^* \cap K_1$. Potom je $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}(z, F_{i_1...i_k})$, $\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}(z, F_{j_1...j_l})$, kde $\{i_1, \ldots, i_k\}$, $\{j_1, \ldots, j_l\}$ jsou sudé skupiny. Z lemmatu 29 plyne, že existují $a, b \in \mathbf{E}$ tak, že v jistém $U(z)$ je $F_{j_1...j_l} = aF_{i_1...i_k} + b$. Označme $\mathscr{F}_3 = a\mathscr{F}_1 + b$. $\mathscr{F}_3$ je analytická funkce v Ω^*. Protože $\mathscr{E}(z, F_{i_1...i_k}) \in \mathscr{F}_1$, je $\mathscr{E}(z, aF_{i_1...i_k} + b) \in \mathscr{F}_3$, tedy $\mathscr{E}_2 \in \mathscr{F}_3 \cap \mathscr{F}_2$. Odtud naše tvrzení plyne.

Pro případ, že $\Omega^* \cap K_1 = \emptyset$ je důkaz analogický (použije se vztah (11)).

32. Lemma. *Pro $z \in K_1$ platí*

$$\frac{F_0''(z)}{F_0'(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i - 1}{z - a_i}. \tag{12}$$

Důkaz. Zjistili jsme, že funkce $\mathcal{G}_1$ je holomorfní v Ω a v K_1 je rovna F_0''/F_0'. Dále z lemmatu 28 plyne, že $\mathcal{G}_1(\infty) = 0$. Podle poznámky 14 existuje okolí $U(a_i)$ a funkce Φ_i holomorfní v $U(a_i)$ taková, že pro $z \in K_1 \cap U(a_i)$ je

$$\frac{F_0''(z)}{F_0'(z)} = \frac{\alpha_i - 1}{z - a_i} + \Phi_i(z)$$

a tedy, jak plyne z věty o jednoznačnosti, je pro $z \in U(a_i) - \{a_i\}$

$$\mathcal{G}_1(z) = \frac{\alpha_i - 1}{z - a_i} + \Phi_i(z).$$

Pro $z \neq a_i$ položme

$$k(z) = \mathcal{G}_1(z) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i - 1}{z - a_i},$$

$k(a_i) = \lim_{z \to a_i} k(z)$ (tato limita existuje) $(i = 1, \ldots, n)$. Potom je funkce k zřejmě holomorfní v $\mathbf{S}$ a tedy podle Liouvilleovy věty je konstantní; protože $\mathcal{G}_1(\infty) = 0$, je k identicky rovna nule. Je tedy pro $z \in \mathbf{S}$

$$\mathcal{G}_1(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i - 1}{z - a_i},$$

a protože $\mathcal{G}_1 \mid K_1 = F_0''/F_0'$, platí (12).

33. Označení. Označme $R_{\beta_i} = \{z;\ z = ta_i,\ t \geqq 1\}$. V $\mathbf{E} - R_{\beta_i}$ existují jednoznačné větve $(\alpha_i - 1)$-té mocniny. Symbol $(z - a_i)^{\alpha_i - 1}$ znamená $\exp\left((\alpha_i - 1)\operatorname{Log}_{\beta_i}(z - a_i)\right)$. Dále buď Q spojitá funkce v K_1. Potom symbol $\int_0^z Q(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ znamená křivkový integrál funkce Q přes lineární křivku ψ, pro niž p.b. $\psi = 0$, k.b. $\psi = z \in K_1$.

34. Věta. *Existují $c, d \in \mathbf{E}$ takové, že pro $z \in K_1$ platí*

$$F_0(z) = c \int_0^z (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1}\,\mathrm{d}\zeta + d. \tag{13}$$

Důkaz. Pro $z \in K_1$ položme

$$H(z) = \int_0^z (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Výpočtem zjistíme, že pro $z \in K_1$ je

$$\frac{H''(z)}{H'(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i - 1}{z - a_i}.$$

Z lemmatu 32 plyne, že v K_1 je

$$\frac{F_0'}{F_0''} = \frac{H''}{H'}.$$

Nyní tvrzení plyne z lemmatu 27.

35. Poznámka. Integrálu na pravé straně (13) se v konformním zobrazení (např. [4]) říká Schwarzův-Christoffelův integrál (pro kruh). Poznamenejme, že vzorec (13) platí také v případě, že místo F_0 píšeme $\tilde{F}_0$ a uvažujeme $z \in \bar{K}_1$ (např. [5]).

36. Věta. *Jedinými singulárními body $\mathscr{F}$ jsou $a_1, \ldots, a_n$. Bod a_i je obyčejným kritickým singulárním bodem analytické funkce $\mathscr{F}$. $\mathscr{F}$ má v a_i charakteristiku $\{\infty \times \tau(\alpha_i)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$.*

Důkaz. Buď $1 \leqq i \leqq n$ a zvolme $P(a_i)$ tak, aby $\mathscr{F}$ byla neomezeně pokračovatelná v $P(a_i)$. Z poznámky 24 vyplývá první tvrzení. V téže poznámce jsme definovali korespondenci mezi větvemi $\mathscr{F}$ v $P(a_i)$ a hvězdicemi typu i, která je, podle lemmatu 25, vzájemně jednoznačná. Odtud a ze třetího tvrzení v lemmatu 7 plyne, že $\mathscr{F}$ má nekonečně mnoho různých větví v $P(a_i)$. Odtud a z lemmatu 26 plyne tvrzení o charakteristice. Protože $\tau(\alpha_i) \geqq 2$, je a_i kritickým singulárním bodem a zbývá tedy dokázat, že je to obyčejný singulární bod. Dokážeme toto tvrzení: Buď $\mathscr{F}_1$ větev $\mathscr{F}$ v $P(a_i)$. Buď $\mathscr{R}_i$ hvězdice přiřazená $\mathscr{F}_1$ podle poznámky 24 a buď A její střed. Potom $\lim\limits_{z \to a_1} \mathscr{F}_1(z) = A$.

Nechť $\Delta_{i_1 \ldots i_k} \in \mathscr{R}_i$, $\{i_1, \ldots, i_k\}$ je sudá. Víme, že $\Delta_{[i_1 \ldots i_k, i]} \in \mathscr{R}_i$. Buď $\varepsilon > 0$. Protože $\tilde{F}_{i_1 \ldots i_k}$ (resp. $\tilde{F}_{[i_1 \ldots i_k, i]}$) je spojitá v bodě a_i vzhledem ke $\bar{K}_1$ (resp. $\bar{K}_2$), existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\tilde{F}_{i_1 \ldots i_k}(U(a_i, \delta) \cap \bar{K}_1) \subset U(A, \varepsilon),$$
$$\tilde{F}_{[i_1 \ldots i_k, i]}(U(a_i, \delta) \cap \bar{K}_2) \subset U(A, \varepsilon) = U(A).$$

Místo $P(a_i, \delta)$ pišme $P_1(a_i)$. Dokážeme, že $\mathscr{F}_1(P_1(a_i)) \subset U(A)$. Buď $z_0 \in P_1(a_i)$. Máme dokázat, že $\{\mathscr{F}_1(z_0)\} \subset U(A)$. Nechť nejprve $z_0 \in \bar{K}_1$. Potom $c = \tilde{F}_{i_1 \ldots i_k}(z_0) \in U(A)$. Buď $\mathscr{E}(z_0, F) \in \mathscr{F}_1$. Potom pro jistou sudou skupinu $\{j_1, \ldots, j_l\}$ je $F(z) = \tilde{F}_{j_1 \ldots j_l}(z) = a\,\tilde{F}_{i_1 \ldots i_k}(z) + b$ v jistém $U(z_0) \cap \bar{K}_1$, kde $a, b \in \mathbf{E}$; poslední rovnost plyne z lemmatu 29. Stačí dokázat, že $ac + b \in U(A)$. Je $|ac + b - A| = |a(c - A + Aa + b - A|$. Protože $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ a $\Delta_{j_1 \ldots j_l}$ patří do téže hvězdice, je $\tilde{F}_{i_1 \ldots i_k}(a\ ) = \tilde{F}_{j_1 \ldots j_l}(a_i) = A$, tedy $aA + b = A$. Je tedy $|ac + b - A| = |a|\,|c - A| < |a|\,\varepsilon$. Dále je $|a| = 1$, neboť zřejmě $0 \neq |\tilde{F}_{i_1 \ldots i_k}(a_i) - \tilde{F}_{i_1 \ldots i_k}(a_{i+1})| = |\tilde{F}_{j_1 \ldots j_l}(a_i) -$

$- \tilde{F}_{j_1 \ldots j_l}(a_{i+1})| = |a| \, |\tilde{F}_{i_1 \ldots i_k}(a_i) - \tilde{F}_{i_1 \ldots i_k}(a_{i+1})|$. Je tedy $|ac + b - A| < \varepsilon$, neboli $|F(z_0) - A| < \varepsilon$, tedy $F(z_0) \in U(a)$. Analogicky postupujeme v případě, že $z_0 \in \in K_2 \cap P_1(a_i)$. (Místo lemmatu 29 použijeme vztah (11).)

Věta je dokázána.

37. Poznámka. V této poznámce užívejme terminologie z [6]. Je-li speciálně každé α_i racionální, je každý bod a_i algebraickým bodem. Funkce $\mathscr{F}$ má potom konečný počet algebraických bodů, přesto však není algebraická, neboť je podle věty 23 ∞-značná. Poznamenejme, že taková situace nemůže nastat u analytických funkcí, které mají pouze dva singulární body (viz [6]).

38. Věta. 1. *Analytická funkce $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\Delta_0, F_0)$ je prostá tehdy a jen tehdy, když Δ_0 je buď obdélník, nebo rovnostranný trojúhelník, nebo rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, nebo pravoúhlý trojúhelník, jehož jeden úhel je $\pi/3$.*

2. *Právě v těchto případech je inversní analytická funkce $\mathscr{F}_{-1}$ meromorfní* (v $\mathbf{E}$).

3. *V případě, že $\mathscr{F}_{-1}$ je meromorfní, je ∞ hromadným bodem pólů funkce $\mathscr{F}_{-1}$.*

Důkaz. ad 1. Nejprve dokážeme toto tvrzení: Jestliže $\mathscr{P}$ není sudé skoro disjunktní pokrytí, není $\mathscr{F}$ prostá.

Nechť $\mathscr{P}$ není skoro disjunktní pokrytí. Potom existují $\Delta_{i_1 \ldots i_k} \in \mathscr{P}$, $\Delta_{j_1 \ldots j_l} \in \mathscr{P}$ takové, že $\Delta_{i_1 \ldots i_k} \neq \Delta_{j_1 \ldots j_l}$ a $\operatorname{Int} \Delta_{i_1 \ldots i_k} \cap \operatorname{Int} \Delta_{j_1 \ldots j_l} \neq \emptyset$. Potom zřejmě existuje $w_0 \in \operatorname{Int} \Delta_{i_1 \ldots i_k} \cap \mathscr{H}(\Delta_{j_1 \ldots j_l})$. Existuje element $\mathscr{E}_1 \in \mathscr{F}$ takový, že $h(\mathscr{E}_1) = w_0$ a $s(\mathscr{E}_1) \in \mathbf{S} - T$ neboť $w_0 \in \operatorname{Int} \Delta_{i_1 \ldots i_k}$. Dále existuje $\mathscr{E}_2 \in \mathscr{F}$ takový, že $h(\mathscr{E}_2) = w_0$ a $s(\mathscr{E}_2) \in T$ neboť $w_0 \in \mathscr{H}(\Delta_{j_1 \ldots j_l})$. Je zřejmě $\mathscr{E}_1 \neq \mathscr{E}_2$ a tedy $\mathscr{F}$ není prostá.

Jestliže pokrytí je skoro disjunktní a není sudé, existuje hvězdice tvořená lichým počtem různých mnohoúhelníků. Odtud snadno plyne, že existuje sudá skupina $\{i_1, \ldots, i_k\}$ a lichá skupina $\{j_1, \ldots, j_l\}$ tak, že $\Delta_{i_1 \ldots i_k} = \Delta_{j_1 \ldots j_l}$ a tyto mnohoúhelníky patří do uvažované hvězdice. Jestliže zvolíme $w_0 \in \operatorname{Int} \Delta_{i_1 \ldots i_k}$, existují elementy $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$ funkce $\mathscr{F}$ takové, že $h(\mathscr{E}_1) = h(\mathscr{E}_2) = w_0$ a $s(\mathscr{E}_1) \in K_1$, $s(\mathscr{E}_2) \in K_2$. Potom je ovšem $\mathscr{E}_1 \neq \mathscr{E}_2$ a $\mathscr{F}$ není prostá.

Z právě dokázaného tvrzení a z věty 8 plyne jedna implikace tvrzení 1.

Abychom dokázali druhou implikaci, stačí ověřit platnost tohoto tvrzení: Je-li $\mathscr{P}$ sudé skoro disjunktní pokrytí, je $\mathscr{F}_{-1}$ meromorfní (v $\mathbf{E}$). Ze závěru tohoto tvrzení plyne podle známé věty, že $\mathscr{F}$ je prostá a opět užijeme větu 8. Zároveň budeme mít dokázánu jednu implikaci tvrzení 2.

Podle věty 20 je $\mathbf{H}(\mathscr{F}) = \mathbf{E} - W$. Protože $\mathscr{P}$ je skoro disjunktní, je W množina všech vrcholů všech mnohoúhelníků z $\mathscr{P}$, neboli množina středů všech hvězdic. Protože každý element $\mathscr{F}$ je prostý, a protože v $\mathbf{E} - W$ neleží vrchol žádného mnohoúhelníka, je každý bod z $\mathbf{E} - W$ regulárním bodem funkce $\mathscr{F}_{-1}$.

Dále budeme postupovat takto: dokážeme, že ke každému $A \in W$ existuje $P(A)$ takové, že každá větev $\mathscr{G}$ funkce $\mathscr{F}_{-1}$ v $P(A)$ je jednoznačná, a dále ukážeme, že existuje konečná $\lim\limits_{w \to A} \mathscr{G}(w)$. Tím bude dokázáno, že každý $A \in W$ je regulárním bodem $\mathscr{F}_{-1}$ a tedy $\mathscr{F}_{-1}$ nemá v **E** singulární body, takže je v **E** neomezeně pokračovatelná a podle věty monodromii jednoznačná (a tedy meromorfní).

Připomeňme ještě, že v uvažovaných případech je každá hvězdice p-značná, kde p je některé z čísel 2, 3, 4, 6. Dále: větev funkce $\mathscr{F}$ přiřazená takové hvězdici podle poznámky 24 je podle lemmatu 26 přesně p-značná.

Zvolme hvězdici $\mathscr{R}_i$ typu i, A buď její střed. Je tedy $A \in W$. Větev přiřazená $\mathscr{R}_i$ je tedy větví $\mathscr{F}$ v jistém $P(a_i)$. Hvězdice $\mathscr{R}_i$ obsahuje $2p$ různých mnohoúhelníků $\Delta^0, \Delta^1, \ldots, \Delta^{2p-1}$ a označení volme tak, že Δ^0 je mnohoúhelník se sudou skupinou. Buď $P(A)$ okolí bodu A takové, že neobsahuje žádné vrcholy mnohoúhelníků z $\mathscr{P}$. Buď C kružnice o středu A taková, že $C \subset P(A)$ a buď $w_j \in (\operatorname{Int} \Delta^j) \cap C$ $(j = 0, \ldots, 2p - 1)$. Buď φ parametrizace C s těmito vlastnostmi: φ je definována na $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = w_0$, φ je Jordanova křivka. Předpokládejme, že označení mnohoúhelníků uvažované hvězdice je zvoleno tak, že je-li $\varphi(t_j) = w_j$, je $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{2p} = \beta$.

Buď $\mathscr{E}^\alpha$ element větve $\mathscr{G}$ funkce $\mathscr{F}_{-1}$ v $P(A)$ o středu $\varphi(\alpha)$. Buď $\{\mathscr{E}^t\}_\alpha^\beta$ řetěz elementů $\mathscr{G}$ podél φ. Dokážeme, že $(\mathscr{E}^\alpha)_{-1} = (\mathscr{E}^\beta)_{-1}$. Odtud bude plynout, že $\mathscr{E}^\alpha = \mathscr{E}^\beta$ a tedy podle známé věty bude funkce $\mathscr{G}$ jednoznačná v $P(A)$.

Označme $\Phi_{\mathscr{E}^t}$ kanonickou funkci elementu $\mathscr{E}^t$ a pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ položme

$$\psi(t) = \Phi_{\mathscr{E}^t}(\varphi(t)) .$$

Je známo, že ψ je křivka v Ω (viz [1]). Dále položme $\varphi_j = \varphi \mid \langle t_{j-1}, t_j \rangle$, $\psi_j = \psi \mid \langle t_{j-1}, t_j \rangle$ a buď $z_j = \psi(t_j)$ $(j = 1, \ldots, 2p - 1)$.

Nechť $(\mathscr{E}^\alpha)_{-1} = \mathscr{E}(z_0, F_{i_1 \ldots i_k})$. Je $z_0 \in K_1$. Můžeme předpokládat, že $\Delta^1 = \Delta_{[i_1 \ldots i_k, i-1]}$ (neboť jinak bychom uvažovali $\dot{-}\varphi$). (Pro $i = 1$ píšeme ovšem n místo $i - 1$). Protože $(F^{i-1}_{i_1 \ldots i_k})_{-1}$ je konformní zobrazení oblasti $\operatorname{Int}(\Delta^0 \cup \Delta^1)$ na Ω_{i-1}, je $\langle \psi_1 \rangle \subset \Omega_{i-1}$ a k.b. $\psi_1 = z_1 \in K_2$ a tedy $(\mathscr{E}^\alpha)_{-1} \underset{\psi_1}{\to} \mathscr{E}(z_1, F_{[i_1 \ldots i_k, i-1]})$. Stejnou úvahou ověříme, že

$$(\mathscr{E}^\alpha)_{-1} \underset{\psi_1}{\to} \mathscr{E}(z_1, F_{[i_1 \ldots i_k, i-1]}) \underset{\psi_2}{\to} \mathscr{E}(z_{,2}, F_{[i_1 \ldots i_k, i-1, i]}) \underset{\psi_3}{\to} \ldots$$
$$\ldots \underset{\psi_{2p-1}}{\to} \mathscr{E}(z_{2p-1}, F_{[i_1 \ldots i_k \ldots i-1]}) \underset{\psi_{2p}}{\to} \mathscr{E}(z_{2p}, F_{[i_1 \ldots i_k \ldots i]}) = (\mathscr{E}^\beta)_{-1} .$$

(Skupina u F v posledním elementu má $k + 2p$ členů v hranaté závorce.)

Protože větev $\mathscr{F}$ v jistém $P(a_i)$ určená elementem $\mathscr{E}(z_0, F_{i_1 \ldots i_k})$ je p-značná, je $(\mathscr{E}^\alpha)_{-1} = (\mathscr{E}^\beta)_{-1}$.

Zbývá dokázat, že existuje $\lim\limits_{w \to A} \mathscr{G}(w)$. Označme $g_j = \mathscr{G} \mid P(A) \cap \Delta^j - \{A\}$ $(j = 0, \ldots, 2p - 1)$. Snadno zjistíme, že je $\lim\limits_{w \to A} g_j(w) = a_i$ a odtud již tvrzení o limitě plyne.

První část věty je dokázána.

ad 2. Jednu implikaci jsme již dokázali. Je-li obráceně $\mathscr{F}_{-1}$ meromorfní, je jednoznačná, a tedy je $(\mathscr{F}_{-1})_{-1} = \mathscr{F}$ prostá podle známé věty.

ad 3. Protože každá funkce $F_{i_1 \ldots i_k}$, kde $\{i_1, \ldots, i_k\}$ je lichá skupina, je konformní zobrazení K_2 na Int $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ a $\infty \in K_2$, má $\mathscr{F}_{-1}$ právě jeden pól v každém mnohoúhelníku s lichou skupinou. Protože takových mnohoúhelníků existuje nekonečně mnoho, je zřejmě bod ∞ hromadných bodem pólů $\mathscr{F}_{-1}$.

Věta je dokázána.

39. Poznámka. Je přirozené ptát se, jak „vypadají" ve výše popsaných čtyřech případech meromorfní funkce, jež jsou inversními funkcemi k $\mathscr{F}$. Tento problém je pro případ konformního zobrazení horní poloroviny na vnitřek mnohoúhelníka řešen v [2].

Literatura

[1] *Černý, I.:* Zaklady analysy v komplexním oboru, NČSAV, Praha, 1967.

[2] *Голубев, В. В.*: Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Москва, 1950.

[3] *Евграфов, М. А.*: Аналитические функции, Москва, 1968.

[4] *Nehari, Z.:* Conformal Mapping, Mc Graw-Hill book Comp., INC, 1952.

[5] *Netuka, I.:* Schwarzovy-Christoffelovy integrály, Diplomní práce na mat.-fys. fakultě, 1967.

[6] *Saks, A. - Zykmund, A.:* Analytic Functions, Warszawa, 1965.

Adresa autora: Praha 1, Malostranské nám. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Summary

SCHWARZ-CHRISTOFFEL INTEGRALS

IVAN NETUKA, Praha

Let F transform conformally the open unit disc K in the Gaussian plane $\mathbf{S}$ onto the interior of a polygon Δ. The analytic element $\{0, F\}$ determines certain analytic function $\mathscr{F}$ in $\mathbf{S}$. This paper deals with the investigation of the properties of $\mathscr{F}$.

Let us denote by $\tilde{F}$ the homeomorphic extension of F to the closure of K, A_i and α_i the vertices and the interior angles of the n-gon Δ, respectively, and $a_i = \tilde{F}_{-1}(A_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\Omega = \mathbf{S} - \{a_1, \ldots, a_n\}$.

The following assertions are proved.

The natural region of $\mathscr{F}$ is Ω and $\mathscr{F}$ is arbitrarily continuable in Ω. Every element of $\mathscr{F}$ is holomorphic and invertible.

$\mathscr{F}$ is strictly ∞-valued.

If $\Omega^* \subset \Omega$ is a region and $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ are branches of $\mathscr{F}$ in Ω^* then there are complex numbers a, b such that

$$\mathscr{F}_2 = a\mathscr{F}_1 + b\,.$$

The only critical points of $\mathscr{F}$ are $a_1, \ldots, a_n$. If $P(a_i)$ denotes an annular neighbourhood of the point a_i, $P(a_i) \subset \Omega$, then $\mathscr{F}$ has an infinite number of branches in $P(a_i)$. Every such branch has a limit at a_i and it is strictly $\tau(\alpha_i)$-valued, where $\tau(\alpha_i) = \infty$ provided α_i is an irrational number; if α_i is a rational number, $\alpha_i = p/q$ in lowest terms, then $\tau(\alpha_i) = q$.

In order that the inverse of the function $\mathscr{F}$ be a meromorphic function, it is necessary and sufficient that Δ have one of the following shapes: a rectangle, an equilateral triangle, a triangle with the angles $\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi$, a triangle with the angles $\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi$.

In the case that the inverse function $\mathscr{F}_{-1}$ is a meromorphic function then ∞ is the point of accumulation of the poles of $\mathscr{F}_{-1}$.

The detailed description of all elements of $\mathscr{F}$ is given and the well-known Schwarz-Christoffel formula is also derived.