Jiří Cerha

Eliptické parciální diferenciální rovnice s degenerovanými koeficienty

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 98 (1973), No. 2, 173--177

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108470`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ELIPTICKÉ PARCIÁLNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S DEGENEROVANÝMI KOEFICIENTY

JIŘÍ CERHA, Praha

(Došlo dne 21. června 1971)

Práce se skládá ze dvou částí. V první z nich se dokazují věty o vnoření pro Sobolevovy prostory s nezápornou spojitou vahou, která je nulová nejvýše v jednom bodě. Těchto vět se ve druhé části používá k důkazu existence zobecněných řešení, ve smyslu distribucí, parciálních diferenciálních rovnic eliptického typu s degenerovanými koeficienty.

VĚTY O VNOŘENÍ

Budiž dáno přirozené číslo N, omezená oblast $\Omega \subset R_N$ s hranicí $\partial\Omega$, reálné číslo $p \geqq 1$ a celé číslo $k \geqq 0$. Je-li dána funkce w definovaná, spojitá a nezáporná na uzávěru $\bar{\Omega}$ oblasti Ω, kladná uvnitř Ω, pak symbolem $\mathscr{E}(\bar{\Omega})$ označíme množinu funkcí definovaných v Ω, které tam mají spojité všechny derivace všech řádů a které je možno i s těmito derivacemi spojitě rozšířit na uzávěr oblasti Ω. Banachův prostor, který vznikne jako uzávěr množiny $\mathscr{E}(\bar{\Omega})$ v normě

$$(1) \qquad \|u\|_{W_{p,w}(k)(\Omega)} = \left(\int_\Omega w^p \sum_{j=0}^{k} \sum_{|i|=j} |D^i u| \, d\Omega\right)^{1/p}, \quad u \in \mathscr{E}(\bar{\Omega}),$$

označíme

$$W_{p,w}^{(k)}(\Omega),$$

případně

$$L_{p,w}(\Omega) = W_{p,w}^{(0)}(\Omega).$$

Prvky tohoto prostoru je možno ztotožnit s funkcemi u definovanými skoro všude v Ω, které tam mají zobecněné derivace (ve smyslu distribucí) $D^i u$ až do řádu k včetně takové, že funkce $|wD^i u|^p$ jsou integrovatelné v Ω, $|i| = 0, 1, \ldots, k$. Dále buď a funkce definovaná na $\bar{\Omega}$, $s > t > 0$ reálná čísla. Označíme: $|x|$ Eukleidovskou normu bodu $x \in R_N$, $T_r = \{x: |x| < r\}$, $K_r = T_r \cap \Omega$, $L_r = \{x: |x| = r\}$, $S_r = L_r \cap \Omega$, pro $r > 0$; $U_x = \{z: z = \lambda x, 1 < \lambda < sr^{-1}\}$, pro $x \in L_r$, $0 < r < s$. Pro funkce u

s definičním oborem v R_N budeme psát $u(x) = u(S, r)$, kde $S = x/r$, $r = |x|$. Písmeno c, c_1 bude značit kladnou konstantu, nezávislou na funkcích u, f. V různých výrazech může značit různé konstanty. Zavedeme ještě tyto předpoklady

$$(2) \qquad 0 \in \partial\Omega\,; \quad U_x \subset \Omega\,, \quad \text{jestliže} \quad 0 < r < t\,, \quad x \in S_r\,;$$

a bude spojitá konečná nezáporná funkce v $\bar{\Omega}$, $a(S, r)$ neklesající kladná funkce r pro $r > 0$ a každé S.

Lemma. *Existuje c nezávislé na r tak, že pro $u \in \mathscr{E}(\bar{\Omega})$, $0 < r < t$ platí*

$$\int_{S_r} a(S, r)\,|u(S, r)|\,\mathrm{d}S_r \leqq c \int_{K_s - K_r} a(x) \left(|u(x)| + \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right| \right) \mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Zvolme funkci $\varphi \in \mathscr{D}(T_s)$ takovou, že $\varphi(x) = 1$ pro $x \in T_t$, $0 \leqq \varphi \leqq 1$, označme $\psi = 1 - \varphi$. Buď $u \in \mathscr{E}(\Omega)$, $v = u\varphi$, $w = u\psi$. Je

$$a(S, r)\,|v(S, r)| \leqq a(S, r) \int_r^s \left| \frac{\partial v(S, \varrho)}{\partial \varrho} \right| \mathrm{d}\varrho \leqq \int_r^s a(S, \varrho) \left| \frac{\partial v(S, \varrho)}{\partial \varrho} \right| \mathrm{d}\varrho\,.$$

Odtud integrací přes S_r dostaneme

$$\int_{S_r} a(S, r)\,|v(S, r)|\,\mathrm{d}S_r \leqq c \int_{K_s - K_r} a(x) \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_n} \right| \mathrm{d}x\,,$$

kde c nezávisí na v, r. Obdobná nerovnost pro w je zřejmá. Jejich užitím dostáváme tvrzení.

Věta 1. *Buď b_0 spojitá nezáporná neklesající funkce v intervalu $\langle 0, \infty)$, kladná v $(0, \infty)$, $b(x) = b_0(|x|)$, w buď spojitá nezáporná v $\bar{\Omega}$ funkce, kladná pro $x \neq 0$,*

$$Q = \int_0^t b_0^{-1}(r) \left(\int_{K_s - K_r} w^{-p/(p-1)}\,\mathrm{d}\Omega \right)^{-(p-1)/p} \mathrm{d}r < \infty\,, \quad \textit{je-li} \quad p > 1\,,$$

$$Q = \int_0^t b_0(r)^{-1}\,\mathrm{d}r < \infty\,, \quad w = 1\,, \quad \textit{je-li} \quad p = 1\,.$$

Pak

$$\|u\|_{L_{1,a(\Omega)}} \leqq c \|u\|_{W^{(1)}{}_{p,wba}(\Omega)}\,, \quad u \in W^{(1)}_{p,wba}(\Omega)\,.$$

Důkaz. Podle lemmatu je pro $u \in \mathscr{E}(\Omega)$

$$\int_{S_r} a(S, r)\,|u(S, r)|\,\mathrm{d}S_r \leqq c b_0^{-1}(r) \int_{K_s - K_r} w^{-1} abw \left(u + \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| \right) \mathrm{d}\Omega\,.$$

Odtud, případným užitím Hölderovy nerovnosti (při $p > 1$) a integrací dle r, dostáváme

$$\|u\|_{L_{1,a}(K_t)} \leqq cQ\|u\|_{W^{(1)}_{p,abw}(K_s)} .$$

Odtud a z nerovnosti

$$\|u\|_{L_{1,a}(\Omega - K_t)} \leqq c\|u\|_{W^{(1)}_{p,abw}(\Omega - K_t)}$$

plyne tvrzení věty pro $u \in \mathscr{E}(\Omega)$ a limitním přechodem i pro ostatní u.

Věta 2. *Za předpokladů věty* 1 *buďte* b_m *neklesající spojité nezáporné funkce* na intervalu $\langle 0, \infty)$, $a_m(x) = b_m(|x|)$, $\int_0^t b_m(r)^{-1} \,\mathrm{d}r < \infty$, $m = 1, 2, \ldots, k - 1$, $v = aa_1a_2 \ldots a_{k-1}bw$. *Pak*

$$\|u\|_{L_{1,a}(\Omega)} \leqq c\|u\|_{W^{(k)}_{p,v}(\Omega)} , \quad u \in W^{(k)}_{p,v}(\Omega) .$$

Důkaz. Věta se dokáže postupným užitím věty 1 na derivace $D^i u$.

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Podobně jako v [1] nebo [2] lze dokázat

Věta 3. *Budiž* L *Banachův prostor,* M *modul hustý v* L, B *sesquilineární forma na* M, $B(u, u) \geqq c\|u\|_L^2$; $u \in M$. *Utvořme a označme* H_B *Hilbertův prostor, který vznikne jako uzávěr množiny* M *v normě určené skalárním součinem* $(u, v)_B = B(u, v)$; $u, v \in M$. *Formu* B *tak spojitě rozšíříme na prostor* H_B *a platí*

(i) *existuje jediné lineární spojité zobrazení* $Z : H_B \to L$ *tak, že* $Z(u) = u$ *pro* $u \in M$.

(*ii*) *Je-li* $f \in L^*$ (*hvězdička značí duální prostor*), *existuje jediný prvek* $u \in H_B$ *tak, že pro* (*rozšířenou*) *formu* B *platí* $B(v, u) = f(v)$, $v \in M$. *Přitom*

$$\|Zu\|_L \leqq c\|u\|_{H_B} \leqq c_1\|f\| .$$

Buď M modul splňující $\mathscr{D}(\Omega) \subset M \subset \mathscr{E}(\Omega)$, P_k množina polynomů stupně nejvýše $k - 1$, $a_{i,j}$ omezené měřitelné funkce v Ω; $|i|, |j| = 1, 2, \ldots, k$; $a_{i,j} = \bar{a}_{j,i}$ při $|i| = |j|$ (pruh značí komplexně sdruženou funkci). Zavedeme formální diferenciální operátor

$$A = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \sum_{|i|=m} D^i \sum_{|j|=m} a_{i,j} D^j$$

a sesquilineární formu

$$B(u, v) = \int_\Omega \sum_{m=0}^{k} \sum_{|i|=|j|=m} \overline{a_{i,j} D^i u} D^j v \,\mathrm{d}\Omega \; ; \quad u, v \in M . \tag{3}$$

Buď $f \in L_{1,a}^*(\Omega)$. Řeknu, že $u \in H_B$ je řešením rovnice

$$Au = f,$$

když

$$B(v, u) = f(v), \quad v \in M,$$

kde forma B je rozšířená ve smyslu věty 3.

Věta 4. *Budiž za předpokladů věty 2 $f \in L_{1,a}^*(\Omega)$,*

$$B(u, u) \geqq c\|u\|^2_{W^{(k)}_{p,v}(\Omega)}, \quad u \in M.$$

Pak má rovnice $Au = f$ právě jedno řešení v H_B. Toto řešení u leží též v $L_{1,a}(\Omega)$ a platí

$$\|u\|_{L_{1,a}(\Omega)} \leqq c\|u\|_{H_B} \leqq c_1\|f\|_{L_{1,a}^*(\Omega)}.$$

Věta 5. *Nechť za předpokladů věty 2 je $f \in L_{1,a}^*(\Omega)$, $P_k \subset M$,*

$$B(u, u) \geqq c\left(\int_\Omega v^p \sum_{|i|=k} |D^i u|^p \, d\Omega\right)^{2/p}, \quad u \in M,$$

$B(P_k, u) = 0$, $u \in M$. Pak má rovnice $Au = f$ řešení v H_B právě tehdy, když $f(P_k) = 0$. Je-li u_0 jedno řešení, pak množina všech řešení $N = \{u: u = u_0 + v, \ v \in P_k\}$. Nechť řešení existuje. Pak v podprostoru $H_B \ominus P_k$ existuje právě jedno řešení u a platí

$$\|u\|_{H_B} \leqq c\|f\|_{L_{1,a}^*(\Omega)}.$$

Za užitečné rady a připomínky je autor zavázán prof. Dr. JINDŘICHU NEČASOVI, DrSc.

Literatura

[1] *Maurin K.:* Metody przestrzeni Hilberta, ruský překlad Moskva (1965).

[2] *Michlin S. G.:* Проблема минимума квадратическово функционала, Moskva—Leningrad (1952).

[3] *Nečas J.:* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Praha (1967).

Adresa autora: 166 27 Praha 6 - Dejvice, Suchbátárova 2 (Elektrotechnická fakulta ČVUT).

Summary

ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEGENERATE COEFFICIENTS

JIŘÍ CERHA, Praha

An imbedding theorem for weighted Sobolev spaces is proved. Then it is used to prove an existence theorem for generalized partial differential equations with at one point degenerate coefficients.

Let $p \geqq 1$, k a positive integer, $\Omega \subset R_N$ a bounded domain satisfying (2). Let $W_{p,w}^{(k)}(\Omega)$ denote the weighted Sobolev space with the norm (1). Let b_i; $i = 0, \ldots, k - 1$; be some continuous positive non-decreasing functions on $(0, \infty)$, $\int_0^t b_i(r)^{-1} \, \mathrm{d}r < \infty$ for $i = 1, \ldots, k - 1$. Let a, w be continuous nonnegative functions on $\bar{\Omega}$, positive for $x \neq 0$. Let $a(x) = a(r, S)$ be non-decreasing in r for all S, where $r = |x|$, $S = x/r$. Let

$$\int_0^t b_0(r)^{-1} \left(\int_{K_s - K_r} w(x)^{-p/p-1} \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}r < \infty \quad \text{if} \quad p > 1 \,,$$

$$w = 1 \quad \text{and} \quad \int_0^t b_0(r)^{-1} \, \mathrm{d}r < \infty \quad \text{if} \quad p = 1 \,,$$

where $K_r = \{x \in \Omega : 0 < x < r\}$, $r > 0$. Let $v(x) = a(x) \, b_0(x) \ldots b_{k-1}(x) \, w(x)$, $x \in \Omega$.

Then $W_{p,v}^{(k)}(\Omega) \subset L_{1,a}(\Omega)$ algebraically and topologically. Moreover, let

$$A = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \sum_{|i|=m} D^i \sum_{|j|=m} a_{i,j} D^j$$

be a partial differential operator with bounded measurable coefficients, f an element of the dual space $L_{1,a}^*(\Omega)$. We define the generalized solution of the equation $Au = f$ by means of the sesquilinear form (3). Let this form be $W_{p,v}^{(k)}(\Omega)$ – elliptic. Then there exists a solution.