Časopis pro pěstování matematiky

Ivo Marek

Über einen speziellen Typus der linearen Gleichungen im Hilbertschen Raume

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 2, 155--172

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108450`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

ÜBER EINEN SPEZIELLEN TYPUS DER LINEAREN GLEICHUNGEN IM HILBERTSCHEN RAUME

IVO MAREK, Praha

(Eingegangen den 17. Oktober 1962)

Im Hilbertschen Raume $\mathcal{X}$ der auf einer begrenzten Teilmenge des Euklidischen Raumes quadratisch integrabeln Vektorfunktionen wird die Gleichung $Lx = Bx + \lambda Cx + s$ untersucht, wo L, B, C lineare Operatoren sind, die ihre Definitionsbereiche $\mathcal{D}(L)$, $\mathcal{D}(B)$, $\mathcal{D}(C)$ in $\mathcal{X}$ abbilden. Es werden die hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines positiven Eigenwertes und eines positiven Eigenvektors und die Bedingungen für die Lösbarkeit der unhomogenen Gleichung sowie der adjungierten Gleichung angegeben.

1. Formulation der Aufgabe. Es sei $\mathfrak{A}$ eine offene zusammenhängende Teilmenge des reellen Euklidischen Raumes $\mathcal{R}_l$ $(l \geqq 1)$. Unter dem Begriff des Masses wird das Lebesguesche Mass auf der Punktmenge $\mathfrak{A}$ verstanden. Es sei $\mathcal{X} = \mathcal{L}_2(\mathfrak{A}) \times \ldots \times \mathcal{L}_2(\mathfrak{A})$ (m-mal) der Raum der auf $\mathfrak{A}$ quadratisch integrabeln (im Lebesgueschen Sinne) komplexen Vektorfunktionen mit dem inneren Produkt

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathfrak{A}} x_j(r) \overline{y_j(r)} \, \mathrm{d}r \,, \tag{1.1}$$

wo $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ und $\overline{y_j(r)}$ den komplex konjugierten Wert bedeutet. Durch diese Skalarproduktdefinition wird $\mathcal{X}$ zu einem Hilbertschen Raume.

Mit dem Symbol $[\mathcal{X}]$ werden wir den Banachschen Raum der stetigen linearen Abbildungen des Raumes $\mathcal{X}$ in sich mit der Norm

$$\|T\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Tx\| \,, \quad T \in [\mathcal{X}] \,,$$

bezeichnen.

Im Raume $\mathcal{X}$ werden wir die lineare Gleichung

$$Lx = Bx + \lambda Cx + s \tag{1.2}$$

untersuchen, wo L, B, C lineare Operatoren sind, die die Definitionsbereiche $\mathcal{D}(L)$, $\mathcal{D}(B)$, $\mathcal{D}(C)$ in $\mathcal{X}$ abbilden (weitere Voraussetzungen über diese Operatoren werden wir noch angeben), und wo s ein Vektor aus dem Raume $\mathcal{X}$ und x die gesuchte Lösung ist.

Gleichzeitig mit der Gleichung (1.2) werden wir die adjungierte Gleichung

$$(1.3) \qquad L^*x^* = B^*x^* + \bar{\lambda}C^*x^* + s^*$$

betrachten, wo L^*, B^*, C^* die adjungierten Operatoren zu L, B, C sind.

Hinsichtlich der Operatoren L, B, C machen wir die Voraussetzung, dass ihre Definitionsbereiche $\mathscr{D}(L)$, $\mathscr{D}(B)$, $\mathscr{D}(C)$ dicht in $\mathscr{X}$ liegen und dass

$$(1.4) \qquad \mathscr{D}(C) \supset \mathscr{D}(B) \supset \mathscr{D}(L)$$

gilt. Ausserdem setzen wir voraus, dass zum Operator $L - B$ der begrenzte inverse Operator $(L - B)^{-1}$ $((L - B)^{-1} \in [\mathscr{X}])$ existiert.

Unser Ziel ist, die Bedingungen anzuführen, die die Existenz der Lösungen der Gleichungen (1.2) und (1.3) und der dazugehörigen homogenen Gleichungen

$$(1.5a) \qquad Lx = Bx + \lambda Cx\,,$$

$$(1.5b) \qquad L^*x^* = B^*x^* + \bar{\lambda}C^*x^*$$

sichern. Die angeführten Bedingungen für die Existenz der Lösungen der homogenen Gleichungen (1.5) sind häufig erfüllt im Falle einiger Typen von Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Als Beispiel führen wir ein System von Differentialgleichungen an, das die Neutronenverteilung in einem Kernreaktor im Rahmen der Mehrgruppendiffusionsnäherung beschreibt [1], [6], [7].

Für die Konstruktion der Lösungen der Gleichungen (1.2) und (1.3) bzw. (1.5) schlagen wir einige Iterationsprozesse vor, die im Falle der erwähnten Systeme von Diffussionsgleichungen als Prozesse der Quelleniteration bekannt sind [6], S. 46, [11] S. 265–275.

2. Fundamentaler Hilfsatz. Es sei $\mathscr{K} \subset \mathscr{X}$ der Kegel der nichtnegativen Vektorfunktionen auf $\mathfrak{A}$. Bekanntlich [4] nennt man den Operator $T \in [\mathscr{X}]$ $\mathscr{K}$-positiv, wenn $Tx \in \mathscr{K}$ für jeden Vektor $x \in \mathscr{K}$. Im Raume $\mathscr{X}$ kann man mit Hilfe des Kegels $\mathscr{K}$ die Halbordnung einführen. Man definiere [4]

$$(2.1) \qquad x \prec y \Leftrightarrow y - x \in \mathscr{K} \quad (y \succ x \Leftrightarrow y - x \in \mathscr{K})\,.$$

Das Symbol $x \succ \emptyset$, wo $\emptyset$ der Nullvektor des Raumes $\mathscr{X}$ ist, bedeutet, dass für $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $x_j(r) \geqq 0$ fast überall im $\mathfrak{A}$ gilt. Ausser der in (2.1) definierten Halbordnung werden wir die folgende Halbordnung benützen. Für $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ definieren wir

$$(2.2) \qquad x \lll y \Leftrightarrow x_j(r) \leqq y_j(r)\,, \; j = 1, \ldots, m\,, \quad \text{fast überall im } \mathfrak{A}\,,$$

wobei die scharfe Ungleichung für wenigstens einen Index j_0 auf einer Teilmenge vom positiven Mass gilt. Aus $x \lll y$ folgt offenbar die Beziehung $x \prec y$.

Für $x = (x_1, \ldots, x_m)$ wird mit dem Symbol $|x|$ der Vektor mit den Koordinaten $|x_1|, \ldots, |x_m|$ bezeichnet, wo

$$(2.3) \qquad |x_j|\,(r) = |x_j(r)| = x_j(r) \exp\{-\,i \arg x_j(r)\}$$

Offenbar $|x| \in \mathscr{K}$ und $x \prec |x|$ für jeden reellen Vektor $x \in \mathfrak{X}$. Wenn ausserdem $\arg x_j(r) = \pi$ fast überall im $\mathfrak{A}$ gilt, so ist $x \lll |x|$. Im folgenden werden wir anstatt

$$x_1(r) \exp\{-i \arg x_1(r)\}, \ \ldots, \ x_m(r) \exp\{-i \arg x_m(r)\},$$

kurz $x(r) \exp\{-i \arg x(r)\}$ oder $x \exp\{-i \arg x\}$ schreiben.

Definition 1. *$\mathscr{K}$-positiver Operator T wird absolut $\mathscr{K}$-positiv genannt, wenn es gilt:*

(α) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ und für jeden Vektor $x \in \mathscr{K}$, $x \neq \emptyset$ existiert ein solches natürliches $N = N(x)$, dass die Menge der Nullpunkte des Vektors $T^n x$ das Mass kleiner als ε für alle $n \geqq N$ hat.*

(β) *Für jeden Vektor $x \in \mathfrak{X}$, für welchen in einer Menge des positiven Masses entweder*

(2.4a) $$\arg x_j(r) \neq c_j$$

mindestens für einen Index, wo c_j, $j = 1, \ldots, m$, von r unabhängige Konstanten sind, oder

(2.4b) $$c_j \neq c_k$$

mindestens für zwei Indexe $j \neq k$, gilt

(2.5) $$|T^N x| \lll T^N |x| \quad \textit{für} \quad N = N(|x|)\,.$$

Beispiel. Es sei $m = 1$, d. h. $\mathfrak{X} = \mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$. Operator T sei ein Integraloperator mit dem messbaren begrenzten Kern $t(r, r')$, der auf $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ fast überall nichtnegativ ist. Der Operator T ist offenbar $\mathscr{K}$-positiv. Dabei braucht er jedoch kein absolut $\mathscr{K}$-positiver Operator zu sein. Wenn aber für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches natürliches M existieren wird, dass die n-te Iteration des Kernes $t(r, r')$ die Eigenschaft haben wird, dass die Nullpunkte der Funktion $t^n(r, r') = \int_{\mathfrak{A}} t^{n-1}(r, r'')\, t(r'', r')\, \mathrm{d}r'$ für fast alle $r \in \mathfrak{A}$ eine Menge mit dem Masse kleiner als ε für $n \geqq M$ bilden, dann wird T ein absolut $\mathscr{K}$-positiver Operator sein.

Definition 2. *Ein Operator $T \in [\mathfrak{X}]$ wird Operator Radon-Nikolski genannt, wenn $T = U + V$, wo U ein kompakter Operator ist, der $\mathfrak{X}$ in sich abbildet, $V \in [\mathfrak{X}]$ und dabei gilt*

(2.6) $$r(T) > r(V)\,,$$

wo $r(A)$ den Spektralradius des Operators $A \in [\mathfrak{X}]$ bedeutet.

Mit dem Symbol $\mathfrak{A}_\infty(T)$ ([14], S. 292) bezeichnen wir die Klasse solcher komplexen Funktionen f, für welche gilt: (1) Der Definitionsbereich $\Delta(f)$ ist eine offene Teilmenge der komplexen Zahlebene, die das Spektrum $\sigma(T)$ enthält und deren Komplement kompakt ist. (2) f hat die Ableitung in $\Delta(f)$ und $f(\lambda)$ ist beschränkt für $|\lambda| \to \infty$.

Von grundlegender Bedeutung für die weitere Untersuchung ist der folgende Hilfsatz:

Hilfsatz 1. *Setzen wir voraus, dass T ein absolut $\mathscr{K}$-positiver Operator ist und $f \in \mathfrak{A}_\infty(T)$ existiert so, dass $f(T) = U + V$ ein Operator Radon-Nikolski und*

$|f(\lambda)| > r(V)$ für $|\lambda| = r(T)$ ist. Dann hat der Operator T einen positiven dominanten Eigenwert μ_0, der ein einfacher Pol der Resolvente $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$ ist. Der entsprechende Eigenvektor x_0 ($\|x_0\| = 1$) ist positiv fast überall im $\mathfrak{A}$ und ist der einzige im $\mathscr{K}$ liegende Eigenvektor des Operators T. Dem Eigenwert μ_0 entspricht ein Eigenvektor x_0^* des adjungierten Operators T^*, der fast überall im $\mathfrak{A}$ positiv ist und ausser x_0^* ($\|x_0^*\| = 1$) liegt im $\mathscr{K}$ kein anderer Eigenvektor des Operators T^*. Es gelten also folgende Beziehungen

$$(2.7) \qquad Tx_0 = \mu_0 x_0\,, \quad T^*x_0^* = \mu_0 x_0^*\,, \quad |\lambda| < \mu_0\,, \quad |\lambda^*| < \mu_0$$

für $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq \mu_0$; $\lambda^* \in \sigma(T^*)$, $\lambda^* = \mu_0$, wobei $\sigma(A)$ das Spektrum des linearen Operators A bedeutet.

Beweis. Nach dem Satze 3.2 [10] existiert ein $\mu_0 \in \sigma(T)$ und $x_0 \in \mathscr{K}$, $x_0^* \in \mathscr{K}$, so dass

$$(2.8) \qquad Tx_0 = \mu_0 x_0\,, \quad T^*x_0^* = \mu_0 x_0^*\,, \quad |\lambda| \leqq \mu_0\,, \quad |\lambda^*| \leqq \mu_0$$

für $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda^* \in \sigma(T^*)$ gilt. Aus (2.8) folgt die Gültigkeit der Gleichungen

$$(2.9) \qquad T^n x_0 = \mu_0^n x_0\,, \quad T^{*n} x_0^* = \mu_0^n x_0^*$$

für jedes natürliche n.

Wir werden beweisen, dass x_0 fast überall im $\mathfrak{A}$ positiv ist. Es sei $\mathfrak{S}$ die Menge der Nullpunkte der Vektorfunktion x_0, d. h. die Menge der Punkte, in denen alle Komponenten des betrachteten Vektors gleich Null sind. Das Mass der Menge $\mathfrak{S}$ ist offenbar endlich. Aus (2.8) folgt, dass für $r \in \mathfrak{S}$ $y_0(r) = 0$ ist ($y_0 = T^n x_0$). Für genügend grosse n ist das Mass der Menge der Nullpunkte der Funktion $T^n x_0$ kleiner als eine im voraus gewählte positive Zahl. Die Menge $\mathfrak{S}$ muss also eine Nullmenge (Menge vom Mass Null) sein und der Vektor x_0 ist also positiv fast überall im $\mathfrak{A}$.

Es sei $\Gamma \subset \mathfrak{A}$ und χ_Γ^j die charakteristische Funktion der Menge Γ. Setzen wir $\chi_\Gamma = (\chi_\Gamma^1, \ldots, \chi_\Gamma^m)$. Es sei $x \in \mathscr{K}$, $x \neq \emptyset$. Nach Voraussetzung gilt

$$(2.10) \qquad (T^n \chi_\Gamma, x) > 0$$

für jede von einer Nullmenge verschiedene Teilmenge $\Gamma \subset \mathfrak{A}$ und für genügend grosse n. Es sei $\mathfrak{T}$ die Menge der Nullpunkte des Vektors x_0^*. Das Mass der Menge $\mathfrak{T}$ ist gleich Null, denn widrigenfalls

$$0 = (\chi_{\mathfrak{T}}, T^{*n} x_0^*) = (T^n \chi_{\mathfrak{T}}, x_0^*)$$

für alle n, was mit (2.10) im Widerspruch steht. Es ist also x_0^* ein positiver Vektor fast überall im $\mathfrak{A}$.

Wir werden beweisen, dass μ_0 ein dominanter Punkt des Spektrums des Operators T und also auch des Operators T^* ist. Setzen wir voraus, dass ein $v \in \sigma(T)$ existiert, so dass $|v| = \mu_0$. Es ist nicht möglich, dass $v \neq \mu_0$. Es sei im Gegenteil

$$Tx_1 = vx_1\,, \quad x_1 \neq \emptyset\,, \quad v \neq \mu_0\,,$$

so dass $T^N x_1 = \nu^N x_1$. Es gelten offenbar die Beziehungen

$$\begin{aligned}(2.11) \qquad & \mu_0^N |x_1| = |T^N x_1| \prec T^N |x_1|\,, \\ & \mu_0^N(|x_1|, x^*) \leqq (T^N |x_1|, x^*) = \mu_0^N(|x_1|, x^*)\,, \quad x^* \in \mathscr{K}\,.\end{aligned}$$

Aus diesen Relationen folgern wir, dass fast überall im $\mathfrak{A}$

$$(2.12) \qquad [T^N |x_1|](r) = \mu_0^N\, |x_1|(r)$$

gilt. Vektor $|x_1|$ ist ein Eigenvektor des Operators T^N, der zum Eigenwert μ_0^N gehörig ist. Nach dem schon Bewiesenen ist $|x_1|$ positiv fast überall im $\mathfrak{A}$. Setzen wir $|x_1| = (|x_{11}|, \ldots, |x_{1m}|)$, $|x_{1j}|(r) = x_{1j}(r) \exp\{-i \arg x_{1j}(r)\}$, so dass

$$(2.13) \quad [T^N |x_1|](r) = \mu_0^N x_1(r) \exp\{-i \arg x_1(r)\} = \frac{\mu_0^N}{\nu^N} \exp\{-i \arg x_1(r)\} [T^N x_1](r)\,.$$

gilt. Da der Operator T absolut $\mathscr{K}$-positiv ist, so folgt daraus, dass $\arg x_{1j}(r) = \text{konst}$ für $r \in \mathfrak{A}$, $j = 1, \ldots, m$, was bedeutet, dass ein passendes Mehrfaches des Vektors x_1 im $\mathscr{K}$ liegt. Ohne die Allgemeinheit zu verletzen, kann man also voraussetzen, dass schon der Vektor x_1 selbst im $\mathscr{K}$ liegt.

Wäre der Punkt μ_0 nicht der einfache Pol der Resolvente $R(\lambda, T)$, so würde der zum Eigenwert μ_0 gehörige und zum Eigenvektor x_0^* des Operators T^* senkrechte Eigenvektor x_2 des Operators T existieren. Nach der schon bewiesenen Behauptung sind aber diese Vektoren fast überall im $\mathfrak{A}$ nichtnegativ, so dass die Gleichheit $(x_2, x_0^*) = 0$ ausgeschlossen ist. Dadurch wird bewiesen, dass μ_0 ein einfacher Pol der Resolvente $R(\lambda, T)$ ist. Ähnlich beweist man, dass μ_0 ein einfacher Pol der Resolvente $R(\lambda, T^*)$ ist.

Nun werden wir beweisen, dass im Kegel $\mathscr{K}$ kein anderer von den Vektoren der Form cx_0 verschiedener Eigenvektor des Operators T liegt, wo c eine positive Konstante ist. Wir haben schon bewiesen, dass im Falle, dass der Eigenvektor y_0 des Operators T im $\mathscr{K}$ liegt, y_0 fast überall im $\mathfrak{A}$ positiv ist. Der Vektor $y_0 \in K$, $y_0 \neq cx_0$ kann nicht zum Wert μ_0 gehören. Es sei also $Ty_0 = \nu_1 y_0$, $y_0 \in K$, $0 \leqq \nu_1 < \mu_0$. Nach dem Satz 1 im [8] existiert der Grenzwertoperator $B_1^* = \lim \mu_0^{-n} T^{*n}$ und es gilt [14], S. 299

$$(2.14) \qquad B_1^* x_0^* = x_0^*\,, \quad (B_1^*)^* y_0 = \emptyset\,.$$

Aus (2.14) folgt die Gültigkeit der Gleichungen $(y_0, x_0^*) = ((B_1^*)^* y_0, x_0^*) = 0$. Diese Gleichungen stehen aber im Widerspruch mit der Positivität der Vektoren y_0, x_0^* fast überall im $\mathfrak{A}$.

Ähnlich kann man beweisen, dass im Kegel $\mathscr{K}$ kein anderer von den Vektoren der Form $c^* x_0^*$ verschiedener Eigenvektor des Operators T^* liegt, wo c^* eine positive Konstante ist. Somit sind alle Behauptungen des Hilfsatzes bewiesen.

Bemerkung. Es sei $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ ein Teilgebiet des Gebietes $\mathfrak{A}$. Weiter sei $\mathscr{K}'$ der Kegel der fast überall im $\mathfrak{A}'$ nichtnegativen und fast überall im $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$ identisch verschwindenden Funktionen.

Es gelte: (α') *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und für jedes* $x \in \mathcal{K}$, $x \neq \emptyset$ *existiert ein natürliches* $N = N(x)$, *so dass das Mass der Menge der Nullpunkte der Vektorfunktion* $T^n x$ *in* $\mathfrak{A}'$ *kleiner als* ε *für alle* $n \geqq N$ *ist.* (γ) *Es sei* $T\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$, *d. h.* $Tx \in \mathcal{K}'$ *für* $x \in \mathcal{K}$.

Eine Analogie zum Hilfsatz 1 kann man in folgender Form aussprechen:

Hilfsatz 1'. *Es sei* $T \in [\mathfrak{X}]$ *ein Operator, der die Bedingungen* (α'), (β), (γ) *erfüllt. Setzen wir voraus, dass* $f \in \mathfrak{A}_\infty(T)$ *existiert, so dass* $f(T) = U + V$ *ein Operator Radon-Nikolski ist und* $|f(\lambda)| > r(V)$ *für* $|\lambda| = r(T)$. *Dann existiert ein positiver dominanter Eigenwert* μ_0 *des Operators* T *und dieser Wert ist ein einfacher Pol der Resolvente* $R(\lambda, T)$ *und* $R(\lambda, T^*)$. *Zum Eigenwert* μ_0 *gehört ein Eigenvektor* $x_0 \in \mathcal{K}$ *des Operators* T *und ein Eigenvektor* $x_0^* \in \mathcal{K}$ *des Operators* T^*. *Beide Vektoren* x_0, x_0^* *sind positiv fast überall im* $\mathfrak{A}'$, *und ausser den Vektoren der Form* cx_0, $c^*x_0^*$, *wo* c, c^* *positive Konstanten sind, liegen im* $\mathcal{K}$ *keine anderen Eigenvektoren der Operatoren* T, T^*.

Den Beweis dieser Behauptung kann man fast wörtlich wie den Beweis des Hilfsatzes 1 durchführen und wir werden ihn also nicht wiederholen.

Es seien

$$R(\lambda, T) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \mu_0)^k T_k + (\lambda - \mu_0)^{-1} B_1 , \tag{2.15}$$

$$R(\lambda, T^*) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \mu_0)^k W_k + (\lambda - \mu_0)^{-1} C_1$$

die Laurentschen Entwicklungen der Resolventen $R(\lambda, T)$ $R(\lambda, T^*)$ der Operatoren T, T^* in einer Umgebung der isolierten Singularität μ_0. Es ist bekannt, [14], S. 305, dass $T_k \in [\mathfrak{X}]$, $W_k \in [\mathfrak{X}]$ und

$$B_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_0} R(\lambda, T)\, \mathrm{d}\lambda , \quad C_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_0} R(\lambda, T^*)\, \mathrm{d}\lambda , \tag{2.16}$$

wo $\mathfrak{C}_0$ eine Kreislinie mit dem Mittelpunkt im μ_0 und mit solchem Radius ϱ_0 ist, dass im Kreise $|\lambda - \mu_0| \leqq \varrho_0$ ausser μ_0 kein anderer Punkt des Spektrums $\sigma(T)$ und $\sigma(T^*)$ liegt.

Satz 1. *Ist* T *ein solcher absolut* $\mathcal{K}$*-positiver Operator und dass* $f(T) = U + V$ *für eine Funktion* $f \in \mathfrak{A}_\infty(T)$, *für welche* $|f(\lambda)| > r(V)$ *für* $|\lambda| = r(T)$ *ein Operator Radon-Nikolski ist, so sind auch die Operatoren* (2.16) *absolut* $\mathcal{K}$*-positiv.*

Beweis. Nach dem Satz 1 in [8] ist in der Norm des Raumes $[\mathfrak{X}]$

$$B_1 = \lim_{n \to \infty} \mu_0^{-n} T^n , \quad C_1 = \lim_{n \to \infty} \mu_0^{-n} T^{*n} ,$$

woraus augenblicklich die Behauptung des Satzes folgt.

Bemerkung. Es ist klar, wie eine Analogie zum Satz 1 für den Fall des in der vorigen Bemerkung definierten Kegels $\mathscr{K}'$ zu formulieren ist, und wir werden sie also nicht anführen. Auch im folgenden werden wir die analogischen Sätze nicht ausgesprochen anführen.

3. Die Existenz des charakteristischen Wertes. In diesem Teil werden wir die Ergebnisse des vorigen Absatzes für die Untersuchung der Existenz von Eigenvektoren und charakteristischen Werten der Gleichung (1.5) anwenden.

Setzen wir voraus, dass einer von den Operatoren

$$T = C(L - B)^{-1}, \quad T = (L - B)^{-1} C \tag{3.1}$$

absolut $\mathscr{K}$-positiv ist und dass $f \in \mathfrak{A}_\infty(T)$ existiert, für welche $f(T) = U + V$ ein Operator Radon-Nikolski ist und $|f(\lambda)| > r(V)$ für $|\lambda| = r(T)$. Wir stellen leicht fest, dass der zugehörige adjungierte Operator

$$T^* = (L^* - B^*)^{-1} C^*, \quad T^* = C^*(L^* - B^*)^{-1} \tag{3.2}$$

auch absolut $\mathscr{K}$-positiv ist.

Nach dem Hilfsatz 1 existiert ein dominanter positiver Eigenwert μ_0 und ein fast überall im $\mathfrak{A}$ positiver Eigenvektor $x_0 \in \mathscr{K}$ des Operators T, sowie ein fast überall im $\mathfrak{A}$ positiver Eigenvektor $x_0^* \in \mathscr{K}$ des Operators T^*, so dass (2.7) gilt.

Es sei $T = C(L - B)^{-1}$ und $\mu_0^{-1} T x_0 = x_0$. Setzen wir $y_0 = (L - B)^{-1} x_0$, so dass $(L - B) y_0 = x_0 = \mu_0^{-1} C(L - B)^{-1} x_0 = \mu_0^{-1} C y_0 = \lambda_0 C y_0$. Unter der Voraussetzung, dass $(L - B)^{-1} \mathscr{K} \subset \mathscr{K}$, ist $y_0 \in \mathscr{K}$, das heisst y_0 ist fast überall im $\mathfrak{A}$ ein nichtnegativer Vektor.

Ähnlich sei $T^* = (L^* - B^*)^{-1} C^*$ und $\mu_0^{-1} T^* x_0^* = x_0^*$, so dass $(L^* - B^*) x_0^* = \mu_0^{-1} C^* x_0^*$ und $\lambda_0 = \mu_0^{-1}$ ein charakteristischer Wert der Gleichungen (1.5) ist.

Für den Fall, dass die Operatoren $T = (L - B)^{-1} C$, $T^* = C^*(L^* - B^*)^{-1}$ den höher angeführten Bedingungen genügen, kann man die Beweise ähnlich durchführen. Somit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 2. *Es sei $T = (L - B)^{-1} C$, $(T = C(L - B)^{-1})$ ein absolut $\mathscr{K}$-positiver und ein solcher Operator, dass $f(T) = U + V$ für eine Funktion $f \in \mathfrak{A}_\infty(T)$, für welche $|f(\lambda)| > r(V)$ für $|\lambda| = r(T)$, ein Operator Radon-Nikolski ist. Es soll der Operator $(L - B)^{-1}$ den Kegel $\mathscr{K}$ in sich abbilden. Dann existiert ein und nur ein Eigenvektor $y_0 \in \mathscr{K}$ $(\|y_0\| = 1)$ der Gleichung (1.5a). Dieser Eigenvektor gehört zum positiven charakteristischen Wert λ_0, der zugleich der kleinste charakteristische Wert der Gleichung (1.5a) ist d. h.*

$$|\lambda| > \lambda_0 \tag{3.3}$$

für jeden anderen charakteristischen Wert λ der Gleichung (1.5a). Weiter existiert ein und nur ein Eigenvektor y_0^* $(\|y_0^*\| = 1)$ der adjungierten Gleichung (1.5b), der zu demselben charakteristischen Wert gehört.

Wenn unter den Voraussetzungen des Satzes 2 $f(\lambda) = \lambda$ im Kreise $|\lambda| < 2\mu_0$ und $f(\lambda) = 0$ für $|\lambda| > 2\mu_0$ ist, kann man die Lösbarkeitsbedingungen der unhomogenen Gleichungen (1.2) und (1.3) für $|\lambda| < 1/r(V)$ erhalten. In diesem Falle gilt [12], [3], S. 472 für die Operatorengleichung

$$x - \lambda Tx = s \tag{3.4}$$

die Fredholmsche Alternative für diejenigen λ, für welche

$$|\lambda| < \frac{1}{r(V)} \tag{3.5}$$

ist. Es gilt also der folgende

Satz 3. *Es sei $|\lambda| < \lambda_0$. Dann unter der Voraussetzung, dass einer von den Operatoren (3.1) ein absolut $\mathcal{K}$-positiver Operator Radon-Nikolski ist, existiert eine und nur eine Lösung x der Gleichung (1.2) und eine und nur eine Lösung x^* der Gleichung (1.3), wobei s, s^* beliebige Vektoren in $\mathfrak{X}$ sind. Für λ, für welche*

$$r(V) < \frac{1}{|\lambda|} \tag{3.6}$$

ist, existiert eine Lösung x der Gleichung (1.2) bzw. eine Lösung x^* der Gleichung (1.3) genau dann, wenn

$$(s, x^*) = 0\,, \quad (s^*, x) = 0 \tag{3.7}$$

für jede nichttriviale Lösung x^* bzw. x der Gleichung (1.5b) bzw. (1.5a).

Beweis. Der Satz 3 ist eine Folgerung der Gültigkeit der Fredholmschen Alternative für die angeführten λ. Man muss nur die Lösbarkeitsbedingungen (3.7) beweisen. Um jede Unklarheit zu vermeiden, wollen wir den Fall der Operatoren $T = C(L-B)^{-1}$, $T^* = (L^* - B^*)^{-1} C^*$ untersuchen. Es ist bekannt, [12], [3], S. 472, dass die Gleichung

$$u - \lambda Tu = z \quad (u^* - \bar{\lambda}T^*u^* = z^*) \tag{3.8}$$

für λ, für welche $|\lambda| < [r(V)]^{-1}$, genau dann lösbar ist, wenn $(z, y^*) = 0$, $((z^*, y) = 0)$ für jede Lösung y^* (y) der Gleichung

$$y^* - \bar{\lambda}T^*y^* = \emptyset \quad (y - \lambda Ty = \emptyset)\,. \tag{3.9}$$

Es ist klar, dass unter unseren Bedingungen die Gleichung (1.2) ((1.3)) genau dann lösbar ist, wenn die Gleichung (3.8) lösbar ist, wobei $z = C(L-B)^{-1}\, s$, $(z^* = (L^* - B^*)^{-1}\, s^*)$. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung (3.8) ist, dass der Vektor z (z^*) zu jeder Lösung y^* (y) der homogenen Gleichung (3.9) senkrecht steht. Es ist also (denn $y^* = x^*$)

$$0 = (z, y^*) = (C(L - B)^{-1} s, y^*) = (s, T^*y^*) = \lambda^{-1}(s, x^*),$$

was die Bedingung (3.7) ergibt. Dabei haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass $\lambda \neq 0$ ist. Im Falle $\lambda = 0$ ist aber die Bedingung (3.7) trivial.

Die Lösbarkeitsbedingungen (3.7) für die adjungierte Gleichung, sowie die entsprechenden Bedingungen für den Fall der Operatoren $(L - B)^{-1} C$, $C^*(L^* - B^*)^{-1}$ kann man in analoger Weise erhalten.

4. Die Iterationsprozesse. Für die Konstruktion der Lösung der Gleichungen (1.2), (1.3), (1.5) kann man die Iterationsmethoden anwenden. Wir werden für die Konstruktion von Eigenvektoren und von charakteristischen Werten der erwähnten Gleichungen Iterationsprozesse angeben, die der formalen Seite nach sehr allgemein sind, da sie viele bekannte in der Praxis angewandte Iterationsprozesse als Spezialfall enthalten. Hierher gehört auch die in der Reaktorphysik angewandte Methode der Quelleniteration. Die Konvergenz des angeführten Typus von Iterationen ist eine Folgerung der Existenz des minimalen charakteristischen Wertes der Gleichungen (1.5) ([8]).

Die Lösung der unhomogenen Gleichungen (1.2), (1.3) kann man auch mit Hilfe der Iterationen konstruieren. Ausser den Banachschen schrittweisen Näherungen werden wir noch andere Methoden anführen, die die Existenz des minimalen charakteristischen Wertes ausnützen und im Grunde die Konvergenzbeschleunigungsmethoden von Ljusternik für die üblichen schrittweisen Näherungen sind [5], [9].

I. Betrachten wir zuerst den Fall des Operators $T = C(L - B)^{-1}$. Die Lösung der homogenen Gleichungen (1.5) suchen wir mit Hilfe von Iterationen

$$(4.1)\quad Lu_{(n)} = Bu_{(n)} + v^{(n)}, \quad u^{(n+1)} = Cu_{(n)}, \quad v^{(n+1)} = \lambda_{(n)}u^{(n+1)}, \quad v^{(0)} = Cx^{(0)};$$

$$(4.2)\quad v^{*(n)} = C^*u^*_{(n)}, \quad L^*u^{*(n+1)} = B^*u^{*(n+1)} + v^{*(n)}, \quad u^*_{(n+1)} = \lambda^*_{(n)}u^{*(n+1)}, \quad u^*_{(0)} = x^{*(0)};$$

$$(4.3)\qquad \lambda_{(n)} = \frac{y'_n(v^{(n)})}{z'_n(u^{(n+1)})},$$

$$(4.4)\qquad \lambda^*_{(n)} = \frac{y'_n(u^*_{(n)})}{(z'_n(u^{*(n+1)})}.$$

In diesen Formeln formen y'_n, z'_n die Folgen von stetigen Funktionalen, die im $\mathfrak{X}$ gleichmässig die Lipschitzsche Bedingung erfüllen und zum Funktional y' schwach konvergieren. Setzen wir also voraus, dass die Ungleichungen

$$(4.5)\qquad |y'_n(x) - y'_n(y)| \leqq c_1\|x - y\|, \quad |z'_n(x) - z'_n(y)| \leqq c_2\|x - y\|$$

gelten, wo c_1, c_2 Konstanten sind, die weder von n noch von x und y abhängen. Weiter mögen die Beziehungen

$$(4.6) \qquad y'_n(x) \to y'(x)\,, \quad z'_n(x) \to y'(x)$$

für jeden Vektor $x \in \mathfrak{X}$ und hinsichtlich der Funktionale y'_n, z'_n, y' die Beziehungen

$$(4.7) \qquad y'_n(\lambda x) = \lambda\, y'_n(x)\,, \quad z'_n(\lambda x) = \lambda\, z'_n(x)\,, \quad y'(\lambda x) = \lambda\, y'(x)$$

für jeden Vektor $x \in \mathfrak{X}$ und jede positive Zahl λ gelten. Es möge eine Zahl $\delta > 0$ existieren, so dass

$$(4.8) \qquad |y'_n(x) - y'(x)| + |z'_n(x) - y'(x)| \leqq c_3(x)\, n^{-1-\delta}$$

für jeden Vektor $x \in \mathfrak{X}$ bei genügend grossen n gilt.

Die Anfangsvektoren $x^{(0)}$. $x^{*(0)}$ für die Iterationen wählen wir so, dass

$$(4.9) \qquad B_1 v^{(0)} \neq \emptyset$$

und

$$(4.10) \qquad y'(B_1 v^{(0)}) \neq 0\,,$$

$$(4.11) \qquad C_1 x^{*(0)} \neq \emptyset\,,$$

$$(4.12) \qquad y'(C_1 x^{*(0)}) \neq 0\,,$$

wo die Operatoren B_1, C_1 in (2.15) und (2.16) definiert sind. Es sei zuletzt

$$(4.13) \qquad \begin{aligned} y'_n(T^n v^{(0)}) &\neq 0\,, \quad z'_n(T^n v^{(0)}) \neq 0\,, \\ y'_n(T^{*n} x^{*(0)}) &\neq 0\,, \quad z'_n(T^{*n} x^{*(0)}) \neq 0 \end{aligned}$$

für $n = 0, 1, \ldots$

Satz 4. *Es sei $T = C(L - B)^{-1}$ ein solcher absolut $\mathcal{K}$-positiver Operator, dass $f(T) = U + V$ für eine Funktion $f \in \mathfrak{A}_\infty(T)$, für welche $|f(\lambda)| > r(V)$ bei $|\lambda| = r(T)$ ein Operator Radon-Nikolski ist. Es mögen die Voraussetzungen (4.5)–(4.13) erfüllt sein. Dann konvergieren die Folgen (4.3), (4.4) zu λ_0, d. h. $\lambda_{(n)} \to \lambda_0$, $\lambda^*_{(n)} \to \lambda_0$ und in der Norm des Raumes $\mathfrak{X}$ $u_{(n)} \to u_0$, $u^*_{(n)} \to u^*_0$, wobei u_0 (u^*_0) der Eigenvektor der Gleichung (1.5a) ((1.5b)) ist, der zu dem im Satz 2 besprochenen charakteristischen Wert λ_0 gehört.*

Beweis. Auf Grund des Hilfsatzes 1 sind alle Voraussetzungen der Sätze 10 und 7 in der Arbeit [8] erfüllt, wovon die Behauptung folgt.

II. Führen wir den Iterationsprozess für den Fall an, wenn der Operator $T = (L - B)^{-1} C$ die Bedingungen der absoluten $\mathcal{K}$-Positivität erfüllt. Dann suchen wir die Lösung der homogenen Gleichungen (1.5) mit Hilfe der Iterationen

(4.14) $$v^{(n)} = Cu_{(n)}\,, \quad Lu^{(n+1)} = Bu^{(n+1)} + v^{(n)}\,, \quad u_{(n+1)} = \lambda_{(n)}, \; u^{(n+1)}\,,$$
$$u_{(0)} = x^{(0)}\,,$$

(4.15) $$L^* u^*_{(n)} = B^* u^*_{(n)} + v^{*(n)}\,, \quad u^{*(n+1)} = C^* u^*_{(n)}\,, \quad v^{*(n+1)} = \lambda^*_{(n)}\, u^{*(n+1)}\,,$$
$$v^{*(0)} = C^* x^{*(0)}\,,$$

(4.16) $$\lambda_{(n)} = \frac{y'_n(u_{(n)})}{z'_n(u^{(n+1)})}\,,$$

(4.17) $$\lambda^*_{(n)} = \frac{y'_n(v^{*(n)})}{z'_n(u^{*(n+1)})}\,.$$

Die Anfangsvektoren der Iterationen wählen wir so, dass

(4.18) $$B_1 x^{(0)} \neq 0\,, \quad C_1 v^{*(0)} \neq 0\,,$$

(4.19) $$y'(B_1 x^{(0)}) \neq 0\,, \quad y'(C_1 v^{*(0)}) \neq 0\,.$$

Weiter fordern wir, dass

(4.20) $$y'_n(T^n x^{(0)}) \neq 0\,, \quad z'_n(T^n x^{(0)}) \neq 0\,,$$
$$y'_n(T^{*n} v^{*(0)}) \neq 0\,, \quad z'_n(T^{*n} v^{*(0)}) \neq 0$$

für $n = 0, 1, \ldots$

Satz 4'. *Es sei $T = (L - B)^{-1} C$ ein solcher absolut $\mathcal{K}$-positiver Operator, dass $f(T) = U + V$ für eine Funktion $f \in \mathfrak{A}_\infty(T)$, für welche $|f(\lambda)| > r(V)$ bei $|\lambda| = r(T)$ ein Operator Radon-Nikolski ist. Es mögen die Voraussetzungen (4.5) – (4.8) und (4.18)–(4.20) erfüllt sein. Dann gilt für die Zahlenfolgen (4.16), (4.17) $\lambda_{(n)} \to \lambda_0$, $\lambda^*_{(n)} \to \lambda_0$ und für die Folgen (4.14), (4.15) gilt in der Norm des Raumes $\mathcal{X}$ $u_{(n)} \to u_0$, $u^*_{(n)} \to u^*_0$, wobei u_0 (u^*_0) der Eigenvektor der Gleichung (1.5a) ((1.5b)) ist, der zu dem im Satz 2 besprochenen charakteristischen Wert λ_0 gehört.*

Es seien $s \in \mathcal{X}$, $s^* \in \mathcal{X}$ beliebige Vektoren. Bei der Konstruktion der Lösungen der unhomogenen Gleichungen (1.2), (1.3) werden wir zwei Fälle unterscheiden.

I. $T = C(L - B)^{-1}$. Für λ, für welche

(4.21) $$|\lambda| < \lambda_0$$

gilt, kann man die Gleichungen (1.2), (1.3) mit Hilfe der Iterationen

(4.22) $$z_{n+1} = \frac{1}{\lambda_{(n)} - \lambda}\,(\lambda_{(n)} y_{n+1} - \lambda y_n)\,,$$

(4.23) $$z^*_{n+1} = \frac{1}{\lambda^*_{(n)} - \bar{\lambda}}\,(\lambda^*_{(n)} y^*_{n+1} - \bar{\lambda} y^*_{(n)})$$

lösen, in denen $\lambda_{(n)}$, $\lambda^*_{(n)}$ durch die Formeln (4.3), (4.4) definiert sind, und y_n, y^*_n die durch

$$Lx_{n+1} = Bx_{n+1} + \lambda y_n + s\,, \quad x_0 \in \mathscr{X}\,, \quad y_n = Cx_n\,, \tag{4.24}$$

$$L^* y^*_{n+1} = B^* y^*_{n+1} + \bar{\lambda} C^* y^*_n + s^*\,, \quad y^*_0 = x^*_0 \in \mathscr{X} \tag{4.25}$$

definierten schriftweisen Näherungen sind.

Satz 5. *Es sei $T = C(L - B)^{-1}$ ein solcher absolut $\mathscr{K}$-positiver Operator, dass $f(T) = U + V$ für eine Funktion $f \in \mathfrak{A}_\infty(T)$, für welche $|f(\lambda)| > r(V)$ bei $|\lambda| = r(T)$ ein Operator Radon-Nikolski ist. Es möge die Bedingung (4.21) erfüllt sein. Dann gilt für die Folgen (4.24), (4.25)*

$$\|x_n - x\| \leqq cr^n\,, \quad \|y^*_n - x^*\| \leqq c^* r^n\,, \quad r > r(T) = r(T^*)\,, \tag{4.26}$$

wobei x (x^*) die einzige Lösung der Gleichung (1.2) ((1.3)) ist; s, x_0 (s^*, x^*_n) sind beliebige Vektoren und c, c^* sind von n unabhängig. Für die Folgen (4.22), (4.23) gilt

$$\|z_n - x\| \leqq c_0 v^n\,, \quad \|z^*_n - x^*\| \leqq c^*_0 v^n\,, \tag{4.27}$$

wo c^*_0, c_0 nicht von n abhängen und v ist der Halbmesser eines Kreises mit dem Mittelpunkt im Anfangspunkt, der ohne den Punkt μ_0 $\sigma(T)$ ($\sigma(T^*)$) enthält, so dass $v < r(T)$.

Beweis. Die Gültigkeit der Beziehungen (4.26) folgt aus der Voraussetzung (4.21) [13]. Die Gültigkeit von (4.27) ist durch die Existenz des dominanten Eigenwertes des Operators T (T^*) garantiert [9].

II. $T = (L - B)^{-1} C$. Für λ, für welche (4.21) gilt, kann man die Lösungen der Gleichungen (1.2), (1.3) mit Hilfe der Iterationen (4.22), (4.23) konstruieren, in denen $\lambda_{(n)}$, $\lambda^*_{(n)}$ mit Hilfe der Formeln (4.16), (4.17) definiert sind und y_n, y^* durch die schrittweisen Näherungen folgendermassen definiert sind:

$$Ly_{n+1} = By_{n+1} + \lambda Cy_n + s\,, \quad y_0 = x_0 \in \mathscr{X}\,, \tag{4.28}$$

$$L^* x^*_{n+1} = B^* x^*_{n+1} + \bar{\lambda} C^* y^*_n + s^*\,, \quad y^*_n = C^* x^*_n\,, \quad x^*_0 \in \mathscr{X}\,. \tag{4.29}$$

Satz 5′. *Es sei $T = (L - B)^{-1} C$ ein solcher absolut $\mathscr{K}$-positiver Operator, dass $f(T) = U + V$ für eine Funktion $f \in \mathfrak{A}_\infty(T)$, für welche $|f(\lambda)| < r(V)$ bei $|\lambda| = r(T)$ ein Operator Radon-Nikolski ist. Dann bleibt unter Voraussetzung (4.21) die Behauptung des Satzes 5 gültig, wo man die Folgen (4.24), (4.25) durch die entsprechenden Folgen (4.28), (4.29) ersetzt.*

Folgerung. Wählen wir in den Formeln (4.24), (4.28) ((4.25), (4.29)) $x_0 = (L - B)^{-1} s$ ($x^*_0 = (L^* - B^*)^{-1} s^*$), so erhalten wir die Iterationsfolge

$$w_{n+1} = \frac{\lambda_{(n)}}{\lambda_{(n)} - \lambda}\, y_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} y_k\,, \qquad w^*_{n+1} = \frac{\lambda^*_{(n)}}{\lambda^*_{(n)} - \bar{\lambda}}\, y^*_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} y^*_k\,,$$

wo y_k, y_k^* für den Fall $T = C(L - B)^{-1}$ durch die Formeln (4.24), (4.25) und für den Fall $T = (L - B)^{-1} C$ durch die Formeln (4.28), (4.29) definiert sind.

5. Anwendungen. Als Beispiel zur Illustration der Anwendung der Ergebnisse der vorangehenden Absätze führen wir ein System von Differentialgleichungen für die Neutronenflussverteilung in einem Kernreaktor in der Mehrgruppendiffusionsnäherung an. Die erhaltenen Resultate über die Existenz der charakteristischen Werte und Eigenvektoren sind meistens bekannt [2] und wir werden deshalb nicht bis in die Einzelheiten gehen. Ursprünglich betreffen unsere Resultate besonders die Konvergenz der angeführten Iterationsverfahren. Ein anderes Beispiel für die Anwendung unserer Ergebnisse ist das System von Integro-Differentialgleichungen für den Neutronentransport in der Mehrgruppennäherung der kinetischen Theorie. Die Beweise der fundamentalen Existenzsätze für diesen Fall wurden noch nicht angegeben [6], S. 48. Mit Hinsicht auf die Wichtigkeit dieses Problems werden wir den erwähnten Fall in einer Sonderarbeit behandeln.

Es sei $G \subset \mathcal{R}_q$ eine offene zusammenhängende Menge (das Reaktorgefäss) und so beschaffen, dass $\bar{G} = \bigcup_{j=1}^{p} \bar{G}_j$, wo G_j eine zusammenhängende offene Menge ist und für $j \neq k$ ist $G_{jk} = \bar{G}_j \cap \bar{G}_k$ die gemeinsame Grenze der Mengen G_j, G_k (mit dem Streif wird die topologische Abschliessung in der natürlichen Topologie des Raumes $\mathcal{R}_q$ bezeichnet). Setzen wir voraus, dass die Grenze $\dot{G}$ des Gebietes G glatt ist (d. h. es existiert die Normale). Es sei m die Anzahl der energetischen Gruppen von Neutronen und d_j, b_{jk}, c_{jk} seien reelle Funktionen (Diffusionskonstanten). Wir setzen voraus, dass d_j, b_{jk}, c_{jk} stetige erste und zweite partielle Ableitungen für jede Komponente G_h, $1 \leqq h \leqq p$, haben. Bemerken wir, dass die erwähnten Funktionen auf $G_{k,s}$ Unstetigkeiten haben.

Setzen wir $\mathfrak{A} = G$. Es sei $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ das Lineal von Vektorfunktionen, die die folgenden Eigenschaften haben:

(a) Jede Koordinate x_j des Vektors $x = (x_1, \ldots, x_m)$ hat beschränkte und stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung in jedem Teilgebiet G_h.

(b) Jede Komponente x_j sowie die Komponente $d_j \operatorname{grad} x_j$ in der Richtung der Normale ist stetig längs der Grenze G_{ks}, was bedeutet, dass sie stetig in jedem Punkte ist, der genau den zwei Teilgebieten G_h, G_s, $h \neq s$ gemeinsam ist und in welchem die gemeinsame Normale definiert ist.

(c) Jede Komponente x_j genügt der Randbedingung

$$x_j(r) + \alpha_j(r) \frac{\partial}{\partial n} x_j(r) = 0 \quad \text{für} \quad r \in \dot{G}\,, \tag{5.1}$$

wo $\partial/\partial n$ die Ableitung in Richtung der äusseren Normalen bedeutet und für die Funktion α_j

$$\alpha_j(r) \geqq 0 \quad \text{für} \quad r \in \dot{G}\,, \quad j = 1, \ldots, m\,, \tag{5.2}$$

gilt.

Für $x \in \mathscr{D}$ definieren wir die Differentialoperatoren L_j durch

$$L_j x_j \equiv -\operatorname{div}\left(d_j(r) \operatorname{grad} x_j(r)\right) + \sigma_j(r)\, x_j(r)\,, \tag{5.3}$$

$$L = (\delta_{jk} L_j)\,, \tag{5.4}$$

wo δ_{jk} das Kroneckersche Delta ist. Es sei weiter $B = (b_{jk})$, $C = (c_{jk})$.

Die physikalische Bedeutung der eingeführten Grössen und Operatoren werden wir nicht erwähnen. Einzelheiten wird der Leser in der Arbeit [1] oder in der Monographie [6], S. 282–290 finden.

Bemerken wir, dass

$$\begin{gathered} b_{jk}(r) \geqq 0\,, \quad b_{jk}(r) \equiv 0 \quad \text{für} \quad k > j\,, \\ d_j(r) \geqq \bar{d} > 0 \quad (d \text{ hängt von } j \text{ und } r \text{ nicht ab})\,, \\ c_{jk}(r) \geqq 0\,. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Es seien $F_{jk} \subset G$ die folgendermass definierten Mengen

$$F_{jk} = \{r \in G \mid b_{jk}(r) + c_{jk}(r) > 0\} \quad \text{für} \quad j \neq k\,.$$

Wir werden voraussetzen, dass für jedes Paar j, k, $1 \leqq j, k \leqq m$, eine endliche Folge von solchen Indizes $j = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{t-1} = k$ existiert, dass das Lebesguesche Mass der Mengen $F_{\beta,\beta+1}$ für $\beta = \alpha_h$, $\beta + 1 = \alpha_{h+1}$, $h = 0, \ldots, t-2$, positiv ist. Namentlich setzen wir voraus, dass $c_{1m}(r) \not\equiv 0$ ist.

Mit Hinsicht auf die Existenz von Nullpunkten der Funktionen c_{jk} werden wir während unserer Untersuchung mit dem Kegel der in $\mathfrak{A}$ nichtnegativen Funktionen nicht ausreichen und wir sehen uns gezwungen, die Untersuchung mit dem Kegel $\mathscr{K}'$ der in $\mathfrak{A}'$ nichtnegativen Funktionen durchzuführen, wo

$$\mathfrak{A}' = \bigcup_{j=1}^{m} [G - \Omega_j]\,,$$

wo

$$\Omega_j = \{r \in G \mid c_{jk}(r) = 0 \text{ für } k = 1, \ldots, m\}$$

(siehe die Bemerkung zum Hilfsatz 1 und den Hilfsatz 1′).

Man kann beweisen, dass der Operator L symmetrisch und positiv definit ist. Weiter kann man beweisen, dass zum Operator L der inverse Operator L^{-1} existiert. Der Operator L^{-1} ist durch die Integralkerne bestimmt, die die zu den Differentialoperatoren L_j, $j = 1, \ldots, m$, gehörigen Greenschen Funktionen $G_j(r, r')$ sind. Die erwähnten Greenschen Funktionen sind infolge der positiven Definitheit der Operatoren L_j in $\mathfrak{A}$ nichtnegativ und es gilt $G_j(r, r') = G_j(r', r) > 0$ für $r \in G$, $r' \in G$, $r' \neq r$. Durch die analytischen Eigenschaften der Greenschen Funktionen ist die Kompaktheit des Operators L^{-1} gesichert. Eine leichte Folgerung der Kompaktheit des Operators L^{-1} ist die Kompaktheit des Operators $(L - B)^{-1}$, unter Voraussetzung seiner Existenz.

Wenn es uns gelingt zu beweisen, dass der Operator $C(L - B)^{-1}$ den Voraussetzungen des Hilfsatzes $1'$ genügt, so werden wir die Ergebnisse der Absätze 1—4 auf unseren Fall des Systems von Gleichungen in der Mehrgruppendiffusionsnäherung anwenden können.

Der Operator $T = C(L - B)^{-1}$ ist kompakt und $r(T) > 0$; desto mehr ist er ein Operator Radon-Nikolski, so dass man die im Hilfsatz $1'$ verlangte Funktion $f \in \mathfrak{A}_\infty(T)$ leicht konstruieren kann (zum Beispiel $f(\lambda) = \lambda$ für $|\lambda| < 2r(T)$ und $f(\lambda) = 0$ für $|\lambda| > 2r(T)$). In der Arbeit [2] wird gezeigt, dass der Operator $(L - B)^{-1}$ existiert und ein $\mathscr{K}$-positiver Operator ist, und der Operator $T = C(L - B)^{-1}$ durch die Integralkerne der Form $c_{js}H_{sk}$ bestimmt ist, wo H_{sk} solche Funktionen sind, dass

$$\sum_{h,s,t} \int_G c_{jh}(r)\, H_{hs}(r, r'')\, c_{st}(r'')\, H_{tk}(r'', r')\, \mathrm{d}r'' > 0$$

für alle $r \in \mathfrak{A}'$, $r' \in \mathfrak{A}$ gilt, weshalb der Operator T den Voraussetzungen des Hilfsatzes $1'$ genügt, was wir eben beweisen wollten.

Wir führen einige Ergebnisse an:

1. *Es existiert ein positiver charakteristischer Wert λ_0 und zu diesem Wert gehört die einzige, fast überall in $\mathfrak{A}$ positive, Lösung des Systems*

$$\text{(5.7a)} \qquad -\operatorname{div}\left(d_j(r) \operatorname{grad} x_j(r)\right) + \sigma_j(r)\, x_j(r) = \sum_{k=1}^{m} \left[b_{jk}(r) + \lambda\, c_{jk}(r)\right] x_k(r)$$

mit den Randbedingungen

$$\text{(5.7b)} \qquad x_j(r) + \alpha_j(r) \frac{\partial}{\partial n} x_j(r) = 0 \quad \text{für} \quad r \in \dot{G}\,.$$

2. *Für alle Punkte λ, für welche $|\lambda| < \lambda_0$, hat das System (5.7) nur triviale Lösung.*

3. *Zur Konstruktion der Lösungen des Systems (5.7) kann man die im Absatz 4 angeführten Formeln anwenden.* Wir werden einige von den meist benützten Formeln anführen. Die Konvergenz dieser Prozesse wurde grösstenteils nicht untersucht. Bei den Verfahren, für welche die Konvergenz schon bewiesen worden ist, zitieren wir die Arbeit, in der der Konvergenzbeweis angegeben wurde.

$$\text{(A)} \qquad y_n'(x) = z_n'(x) = y'(x) = \|x\|\,.$$

Die Konvergenz dieses Prozesses wurde in [2] bewiesen.

$$\text{(B)} \qquad y_n'(x) = z_n'(x) = y'(x) = x(r_0)\,,$$

wo $r_0 \in \mathfrak{A}$ ein passend gewählter fester Punkt ist. Der Konvergenzbeweis für diesen

Fall wurde für den allgemeinen Fall des Reaktorgefässes noch nicht angegeben; er wurde nur für den Fall, wenn $m = 1$ $G = G_1$, [6], S. 90–94, durchgeführt.

$$\text{(C)} \qquad y_n'(x) = z_n'(x) = y'(x) = \int_G x(r)\, \overline{x^*_{(p)}(r)}\, \mathrm{d}r\,,$$

wo p ein fester Index ist und

$$L^* x^{*(t)} = B^* x^{*(t)} + C^* x^{*(t-1)}\,, \quad x^{*(0)} \in K\,, \quad x^{*(0)} \neq 0$$

und $x^*_{(t)} = x^{*(t)}/(x^{*(t)}, x^{*(0)})$.

$$\text{(D)} \qquad y_n'(x) = z_n'(x) = \left(x, \frac{T^{*n} x^{*(0)}}{\|T^{*n} x^{*(0)}\|}\right).$$

Die Konvergenz der Prozesse (C) und (D) wurde hier offenbar zum erstenmal bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] *R. Ehrlich, H. Hurwitz:* The multigroup diffusion equations. Nucleonics *12* (1954), 2.

[2] *G. J. Habetler, M. A. Martino:* The multigroup diffusion equations of reactor physics. Report KAPL-1886, July 1958.

[3] *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов:* Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, Москва 1959.

[4] *М. Г. Крейн, М. А. Рутман:* Линейные операторы оставляющие инвариантным конус в простанстве Банаха. Усп. матем. наук *III* (1948), вып. 1, 3—97.

[5] *Л. А. Люстерник:* Замечания к численному решению краевых задач уравнения Лапласа и вычислениям собственных значений методом сеток. Труды матем. инст. АН СССР им. В. А. Стеклова, *XX* (1947), 49—64.

[6] *Г. И. Марчук:* Численные методы расчета ядерных реакторов. Атомиздат, Москва 1958.

[7] *I. Marek*: Užití maticové metody v mnohoskupinové teorii difuse neutronů. Aplikace matematiky *3* (1958), 141–149.

[8] *I. Marek:* Iterations of linear bounded operators and Kellogg's iterations in non self-adjoint eigenvalue problems. Czech. Math. Journ. *12* (1962), 536–554.

[9] *И. Марек:* Об одном методе ускорения сходимости итерационных процессов. Журн. выч. матем. и матем. физики *2* (1962), 963—971.

[10] *I. Marek:* On some spectral properties of Radon-Nicolski operators and their generalizations. Comment. Math. Univ. Carol. *3*, 1 (1962), 20–30.

[11] *R. L. Murray:* Nuclear reactor physics. Translation in Russian. Изд. гл. управления по исполь. атом. энергии. Москва 1959.

[12] *С. М. Никольский:* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах. Изд. Акад. Наук СССР, сер. матем. *7* (1943), 146—166.

[13] *L. B. Rall:* Error bounds for iterative solutions of Fredholm integral equations. Pacif. Journ. Math. Vol. *7* (1955), Suppl. 2, 977–986.

[14] *A. E. Taylor:* Introduction to functional analysis. J. Wiley publ. New York 1958.

Výtah

O SPECIÁLNÍM TYPU LINEÁRNÍCH ROVNIC V HILBERTOVĚ PROSTORU

Ivo Marek, Praha

V práci se vyšetřují rovnice

$$Lx = Bx + \lambda Cx + s\,, \tag{1.2}$$

$$L^*x^* = B^*x^* + \bar{\lambda}C^*x^* + s^*\,, \tag{1.3}$$

kde L, B, C jsou lineární, obecně neohraničené, operátory zobrazující příslušné definiční obory $\mathscr{D}(L) \subset \mathscr{D}(B) \subset \mathscr{D}(C)$ do $\mathscr{X}$, kde $\mathscr{X} = \mathscr{X}_1 \times \ldots \times \mathscr{X}_m$ značí kartézský součin m prostorů $\mathscr{X}_j = \mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$, $j = 1, \ldots, m$, funkcí integrovatelných se čtvercem na oblasti $\mathfrak{A} \subset \mathscr{R}_l$ ($\mathscr{R}_l$ – l-rozměrný eukleidovský prostor) a L^*, B^*, C^* jsou operátory adjungované k operátorům L, B, C.

Vyšetřována je speciální třída, obecně nesymetrisovatelných operátorů, pro něž je zaručena existence charakteristických hodnot. Výsledků je potom užito pro vyšetřování rovnic (1.2), (1.3) a je dokázána platnost některých vět Fredholmova typu pro λ nacházející se v přesně definovaných oblastech komplexní roviny. Základními pro naše vyšetřování jsou pojmy „*absolutně $\mathscr{K}$-kladného operátoru*“ (definice 1) a „*operátoru Radona-Nikolského*“ (definice 2).

Pro sestrojování některých řešení rovnic (1.2), (1.3) je navržen poměrně obecný iterační proces a je dokázána jeho konvergence.

Výsledky jsou ilustrovány na příkladě rovnic typu (1.2), (1.3) z teorie jaderných reaktorů.

Резюме

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ ТИПЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА

ИВО МАРЕК (Ivo Marek), Прага

В статье рассматриваются линейные уравнения

$$Lx = Bx + \lambda Cx + s\,, \tag{1.2}$$

$$L^*x^* = B^*x^* + \bar{\lambda}C^*x^* + s^*\,, \tag{1.3}$$

где L, B, C — линейные, в общем неограниченные, операторы, отображающие

соответствующие области определения $\mathscr{D}(L) \subset \mathscr{D}(B) \subset \mathscr{D}(C) \subset \mathscr{X}$ в $\mathscr{X}$, где $\mathscr{X} = \mathscr{X}_1 \times \ldots \times \mathscr{X}_m$ – прямое произведение комплексных пространств $\mathscr{X}_j = \mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$, $\mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$ – гильбертово пространство функций, интегрируемых с квадратом на области $\mathfrak{A} \subset \mathscr{R}_l$ ($\mathscr{R}_l$ – евклидово пространство размера $l, l \geqq 1$) и операторы L^*, B^*, C^* сопряжены с операторами L, B, C.

Вводится специальный класс, в общем несимметризуемых, операторов, для которых обеспечено существование собственных значений. Результаты использованы для исследования уравнений (1.2), (1.3). Доказана справедливость некоторых теорем типа Фредгольма для вполне определенной области значений λ. Основными для исследования являются понятия „*абсолютно $\mathscr{K}$-положительного оператора*“ (определение 1) и „*оператора Радона-Никольского*“ (определение 2).

Для построения некоторых решений уравнений (1.2), (1.3) предложен довольно общий итерационный процесс и доказана его сходимость.

Для иллюстрации рассуждений приведен пример уравнений типа (1.2), (1.3) из теории ядерных реакторов.