Časopis pro pěstování matematiky

Washek Frank Pfeffer

Об одном определении интеграла в топологических пространствах

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 2, 129--147

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108449`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 89 * PRAHA 30. IV. 1964 * ČÍSLO 2

ОБ ОДНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ИНТЕГРАЛА В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

ВАЦЛАВ ПФЕФФЕР (Václav Pfeffer), Прага

(Поступило в редакцию 15/IX 1961 г. — переработанное 20/IX 1963 г.)

В статье при помощи мажорант определяется интеграл в топологическом пространстве, который является в определенном смысле замкнутым относительно образования несобственных интегралов. Доказываются для него основные теоремы, включая теорему о замене переменной, и указывается его отношение к интегралу Лебега. Излагаемая теория применяется к пространствам Евклида.

1. Некоторые соглашения и обозначения. Пусть A – множество и пусть V – высказывание, зависящее от $x \in A$. Совокупность всех $x \in A$, для которых имеет место $V(x)$, обозначим через $\{x \in A : V(x)\}$. Если множество A содержит лишь один элемент x, то пишем $A = (x)$ или $A = \{x\}$.

Если множество A является частью *топологического пространства* P, то мы обозначим через $\bar{A}$ *замыкание* множества A и положим $A^0 = P - \overline{P - A}$ и $\dot{A} = \bar{A} - A^0$. *Окрестностью* точки $x \in P$ будем назвыать всякое множество $U \subset P$, для которого $x \in U^0$.

Множество действительных чисел, пополненное элементами $\pm\infty$, обозначим через E. Упорядочение и топологию в множестве E мы определим обычным способом. Алгебраические операции в множестве E определяются так же, как и в [7], 1. Для всех $a \in E$ пусть $a^+ = \max(a, 0)$ и $a^- = \max(-a, 0)$.

Отображение любого множества A в множество E будем называть *функцией*, определенной на множестве A. Совокупность всех функций, определенных на множестве A, мы обозначим $\mathfrak{F}(A)$ и будем ее считать полуупорядоченным обычным способом множеством.

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность. Так как недоразумение не угрожает, будем обозначать символом $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (вкратце только $\{a_n\}$) также совокупность всех членов этой последовательности.

Пусть A – произвольное множество и пусть $f_n, f \in \mathfrak{F}(A)$, $n = 1, 2, \ldots$. Если $\lim f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in A$, то это запишем в виде $\lim f_n = f$ или $f_n \to f$. Если, кроме того, последовательность $\{f_n\}$ является возрастающей или убывающей, то пишем соответственно $f_n \nearrow f$ или $f_n \searrow f$.

2. Определение. Непустая система множеств δ называется *кольцом*, если

$$A, B \in \delta \Rightarrow [A \cup B \in \delta,\ A - B \in \delta].$$

Кольцо называется *алгеброй*, если $\bigcup A \in \delta$ $(A \in \delta)$.

Примечание. Пусть δ – кольцо и $A, B \in \delta$. Тогда $\emptyset = A - A \in \delta$ и $A \cap B = A - (A - B) \in \delta$.

3. Определение. Пусть δ – кольцо. Скажем, что система $\delta_0 \subset \delta$ является *полунаследственной* в δ, если

$$[\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \delta - \delta_0,\ A \cap B = \emptyset] \Rightarrow A \cap B \in \delta - \delta_0.$$

Примечание. Пусть δ_0 – полунаследственная система в кольце δ. Непосредственно из определения вытекает следующее утверждение:

Если множество $A \in \delta_0$ является соединением конечного числа непересекающихся множеств из δ, то тогда хотя бы одно из этих множеств принадлежит δ_0.

4. Определение. Пусть δ – кольцо и пусть $F \in \mathfrak{F}(\delta)$. Функция $\mathfrak{F}$ называется *аддитивной*, если

$$F(A \cup B) = F(A) + F(B)$$

для всех $A, B \in \delta$, для которых $F(A) + F(B)$ имеет смысл и $A \cap B = \emptyset$. Если в последнем равенстве заменим знак $=$ знаком $\geqq$, то получим определение функции *супераддитивной*.

5. Лемма. *Пусть δ – алгебра, $A = \bigcup B$ $(B \in \delta)$ и $F \in \mathfrak{F}(\delta)$ супераддитивна. Если $F > -\infty$ и $F(A) < +\infty$, то $F < +\infty$. Если $F \geqq 0$, то $F \leqq F(A)$.*

Доказательство очевидно.

6. Лемма. *Пусть δ – кольцо и пусть $F \in \mathfrak{F}(\delta)$ супераддитивна. Тогда система $\delta_0 = \{A \in \delta : F(A) < 0\}$ является полунаследственной в δ.*

Доказателство. Если $A, B \in \delta - \delta_0$ и $A \cap B = \emptyset$, то $F(A \cap B) \geqq F(A) + F(B) \geqq 0$. Значит, $A \cap B \in \delta - \delta_0$.

7. Соглашение. Пусть во всей этой работе P – локально компактное топологическое пространство Хаусдорфа (см. [3], гл. 2 и 5), удовлетворяющее первой аксиоме счетности, и пусть δ – кольцо, элементами которого являются подмножества пространства P. Пусть $(x) \in \sigma$ для всех $x \in P$ и пусть $\bar{A}$ компактно и $\bar{A} \in \sigma$ для всех $A \in \sigma$.

Для $A \in \sigma$ будет $\sigma_A = \{B \in \sigma : B \subset \bar{A}\}$. Сразу видно, что σ_A есть алгебра и $\sigma_A = \sigma_{\bar{A}}$. Если $\sigma_0 \subset \sigma_A$ – полунаследственная система в σ_A, то σ_0 также является полунаследственной системой в σ.

Каждому $x \in P$ поставим в соответствие некоторое множество последовательностей $\{B_n\} \subset \sigma$ и обозначим его через η_x. О последовательностях из η_x скажем, что они *слабо сходятся* к точке x.

8. Определение. Пусть $A \in \sigma$, $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ и $x \in P$. *Нижним пределом функции F относительно множества A в точке x* называется точная нижняя грань множества всех значений $\liminf F(B_n)$, где $\{B_n\} \subset \sigma_A$ и $\{B_n\} \in \eta_x$. Обозначается ${}_0F(x, A)$ или, если исключено недоразумение, только ${}_0F(x)$.

9. Предположения. В абзацах 17–28, 33–63, 74 и 75 мы будем предполагать, что выполняются требования:

$\mathscr{E}_1$. Если $x \in P$, $\{B_n\} \in \eta_x$ и $\{k_n\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то также $\{B_{k_n}\} \in \eta_x$.

$\mathscr{E}_2$. Если $x \in P$, $\{B_n\} \in \eta_x$ и $A \in \sigma$, то также $\{A \cap B_n\} \in \eta_x$.

$\mathscr{E}_3$. Если $x \in P$, $\{B_n\} \in \eta_x$ и если множества $C_n \subset P$, $n = 1, 2, \ldots$, конечны, то также $\{B_n - C_n\} \in \eta_x$.

$\mathscr{E}_4$. Если $x \in P$, $\{B_n\} \in \eta_x$ и $\{C_n\} \in \eta_x$, то также $\{B_n \cap C_n\} \in \eta_x$ и $\{B_n - C_n\} \in \eta_x$.

$\mathscr{E}_5$. Если $x \in P$, $\{B_n\} \in \eta_n$ и если U является окрестностью точки x, то множество $\{n : B_n - U \neq \emptyset\}$ конечно.

$\mathscr{E}_6$. Для каждой точки $x \in P$ существует такая последовательнсcть ее окрестностей $\{U_n\} \subset \sigma$, что $\{U_n\} \in \eta_x$.

$\mathscr{E}_7$. Если $\sigma_0 \subset \sigma$ — полунаследственная сисгемa в σ, то множество всех точек $x \in P$, для которых существует последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_0$, $\{B_n\} \in \eta_x$, замкнуто.

$\mathscr{E}_8$. Пусть $A \in \sigma$ и пусть $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ аддитивна. Если $A \neq \emptyset$ и ${}_0F(x) = +\infty$ для всех $x \in \bar{A}$, то $F > -\infty$.

В абзацах 66–71 мы будем сверх того предполагать, что выполняется требование:

$\mathscr{E}_9$. Пусть $x \in P$, $A \in \sigma$ и пусть $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ аддитивна. Если ${}_0F(x) > -\infty$, то существует последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_A$, для которой $\{B_n\} \in \eta_x$ и $\lim F(B_n) = {}_0F(x)$.

В абзаце 78 мы выпустим $\mathscr{E}_9$ и $\mathscr{E}_8$ заменим следующими предположениями:

$\mathscr{S}$. Существует такая последовательность $\{\mathfrak{R}_n\}$ локально конечных непересекающихся покрытий пространства P, что $\mathfrak{R}_n \subset \sigma$ и $\mathfrak{R}_{n+1}$ является уплотнением $\mathfrak{R}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ (см. [7], 12).

$\mathscr{E}'_8$. Если $K_n \in \mathfrak{R}_n$ и $K_{n+1} \subset K_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то существует такая точка $x \in P$, что $\{K_n\} \in \eta_x$.

Итак, мы будем предполагать, что в абзаце 78 имеют место $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_7$, $\mathscr{S}$ и $\mathscr{E}'_8$.

10. Примечания к предположениям. Несколько загадочно выглядят предположения $\mathscr{E}_7 - \mathscr{E}_9$; они являются, конечно, неявными требованиями, предъявляемыми к пространству P, кольцу σ и множествам η_x (аналогичное положение см. в [7], 14). В абзаце 76 будет предположение $\mathscr{E}_8$ выведено из предположений $\mathscr{S}$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_5$ и $\mathscr{E}'_8$. Следовательно, все утверждения абзацев 17–63, 74 и 75 будут верны и при предпосылках, приведенных в 77.

Следующие пять абзацев разъяснят читателю это положение на достаточно общем примере. Однако, полный смысл требований $\mathscr{E}_7$ и $\mathscr{E}_9$ выяснится только в абзацах 82 и 83.

11. Соглашение. В абзацах 11–14 мы будем предполагать, что выполнено требование:

$\mathscr{S}'$. Для каждой точки $x \in P$ существует такая полная система ее окрестностей $\mathfrak{B}$, что $\mathfrak{B} \subset \sigma$.

Далее в этих абзацах предполагается, что для каждой точки $x \in P$ есть η_x система всех таких последовательностей $\{B_n\} \subset \sigma$, что множество $\{n : B_n - U \neq \emptyset\}$ конечно для любой окрестности U точки x.

12. Лемма. *Пусть $\sigma_0 \subset \sigma$. Тогда множество A всех $x \in P$, для которых существует $\{B_n\} \subset \sigma_0$, $\{B_n\} \in \eta_x$, замкнуто.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \subset A$ и $x_n \to x$. В силу предположения существуют последовательности $\{B_k^n\}_{k=1}^{\infty} \subset \sigma_0$, $\{B_k^n\}_{k=1}^{\infty} \in \eta_{x_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $\{U_p\}_{p=1}^{\infty}$ – убывающая полная система открытых окрестностей точки x и пусть n_p – натуральное число, для которого $x_{n_p} \in U_p$. Теперь существует такое натуральное число k_p, что $B_{k_p}^{n_p} \subset U_p$. Очевидно, $\{B_{k_p}^{n_p}\}_{p=1}^{\infty} \subset \sigma_0$ и $\{B_{k_p}^{n_p}\}_{p=1}^{\infty} \in \eta_x$. Значит, $x \in A$.

13. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$, $A \neq \emptyset$ и пусть $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ супераддитивна. Если ${}_0F(x) > -\infty$ для всех $x \in \bar{A}$, то $F > -\infty$.*

Доказательство. Предположим, что существует множество $B \in \sigma_A$, для которого $F(B) = -\infty$. Если $B_n = \emptyset$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\{B_n\} \in \eta_x$ для всех $x \in P$. Следовательно, $B \neq \emptyset$. Из примечания к теореме в [7], 17 вытекает, что существует точка $x \in \bar{A}$ и такая последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_A$, для которой $\{B_n\} \in \eta_x$ и $F(B_n) = -\infty$, $n = 1, 2, \ldots$. Значит, ${}_0F(x) = -\infty$, что и есть противоречие.

14. Лемма. *Пусть $x \in P$, $A \in \sigma$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$. Тогда существует такая последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_A$, что $\{B_n\} \in \eta_x$ и $\lim F(B_n) = {}_0F(x)$.*

Доказательство. Лемма очевидно верна, если ${}_0F(x) = +\infty$. Пусть ${}_0F(x) < +\infty$ и пусть $\{\alpha_n\}$ такая последовательность действительных чисел, что $\alpha_n > {}_0F(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim \alpha_n = {}_0F(x)$. Существуют последовательности $\{B_k^n\}_{k=1}^{\infty} \subset \sigma_A$, для которых $\{B_k^n\}_{k=1}^{\infty} \in \eta_x$ и ${}_0F(x) \leqq \lim\limits_{k \to \infty} F(B_k^n) < \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ – убывающая полная система окрестностей точки x. Существуют такие натуральные числа k_n, что $B_{k_n}^n \subset U_n$ и ${}_0F(x) - 1/n \leqq F(B_{k_n}^n) < \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $\{B_{k_n}^n\}_{n=1}^{\infty}$ является искомой последовательностью.

15. Теорема. *Если выполнены требования абзаца 11, то выполнены также требования $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_9$.*

Доказательство. Требования $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_6$ непосредственно вытекают из предположений абзаца 11. Требования $\mathscr{E}_7 - \mathscr{E}_9$ являются следствием лемм 12–14.

16. Соглашение. Пусть теперь P — топологическо пространство, σ — кольцо и η_x — множества последовательностей в том смысле как эти понятия были введены в 7. Вплоть до конца абзаца 63 мы будем предполагать, что выполнены требования $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_8$.

17. Лемма. *Пусть $x \in P$, $B_n = \emptyset$ и $C_n = (x)$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда $\{B_n\} \in \eta_x$ и $\{C_n\} \in \eta_x$. Если $\{D_n\} \in \eta_x$, то также $\{D_n \cup (x)\} \in \eta_x$ и $\{D_n - (x)\} \in \eta_x$.*

Доказательство. В силу $\mathscr{E}_6$ существует такая последовательность $\{U_n\} \subset \sigma$ окрестностей точки x, что $\{U_n\} \in \eta_x$. Так как $\emptyset \in \sigma$, $(x) \in \sigma$ (см. 2, 7) и $B_n = \emptyset \cap U_n$, $C_n = (x) \cap U_n$, $n = 1, 2, \dots$, то, в силу $\mathscr{E}_2$, имеем $\{B_n\} \in \eta_x$ и $\{C_n\} \in \eta_x$. Второе утверждение леммы вытекает из предыдущего и $\mathscr{E}_4$.

Следствие. Пусть $A \in \sigma$, $x \in \bar{A}$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$. Тогда ${}_0F(x) \leqq \min[F(\{x\}), F(\emptyset)]$. В частности, если F супераддитивна и $F(\emptyset) < +\infty$, то ${}_0F(x) \leqq 0$. В самом деле, $F(\emptyset) = F(\emptyset \cup \emptyset) \geqq F(\emptyset) + F(\emptyset)$ и, следовательно, $F(\emptyset) \leqq 0$.

Примечание. Пусть $x \in P$ и $B_n = \emptyset$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда $\{B_n\} \in \eta_x$, как только $\eta_x \neq \emptyset$ и имеет место требование $\mathscr{E}_2$.

18. Лемма. *Если $x, y \in P$ и $x \neq y$, то $\eta_x \cap \eta_y = \emptyset$. Если $A \in \sigma$, $x \notin \bar{A}$, $\{B_n\} \subset \sigma_A$ и $\{B_n\} \in \eta_x$, то $B_n = \emptyset$ для всех достаточно больших индексов n.*

Лемма непосредственно вытекает из $\mathscr{E}_5$ и аксиомы отделимости Хаусдорфа.

19. Лемма. *Пусть $x \in P$, $\{B_n\} \in \eta_x$ и U — окрестность точки x. Тогда множество $\{n : \bar{B}_n - U \neq \emptyset\}$ конечно.*

Лемма является следствием $\mathscr{E}_5$ и регулярности пространства P.

20. Лемма. *Для каждой точки $x \in P$ существует такая последовательность ее окрестностей $\{V_k\} \subset \sigma$, что $\bar{V}_{k+1} \subset V_k^0$, $k = 1, 2, \dots$, и $\{V_k\} \in \eta_x$.*

Доказательство. Пусть $x \in P$. В силу $\mathscr{E}_6$ существует такая последовательность $\{U_n\} \subset \sigma$ окрестностей точки x, что $\{U_n\} \in \eta_x$. Положим $V_1 = U_1$. Из 19 вытекает, что существует число n_1, для которого $\bar{U}_{n_1} \subset V_1^0$. Положим $V_2 = U_{n_1}$. Продолжая этот процесс, мы индукцией построим подпоследовательность $\{V_k\}$ последовательности $\{U_n\}$, для которой $\bar{V}_{k+1} \subset V_k^0$, $k = 1, 2, \dots$. Из $\mathscr{E}_1$ следует, что $\{V_k\} \in \eta_x$.

21. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$, $A \neq \emptyset$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ аддитивна. Если ${}_0F(x) > -\infty$ для всех $x \in \bar{A}$, то $F > -\infty$.*

Доказательство. Для $B \in \sigma_A$ мы положим $H(B) = +\infty$, если $F(B) > -\infty$, и $H(B) = -\infty$, если $F(B) = -\infty$. Функция H, очевидно, аддитивна и ${}_0H(x) = +\infty$ для всех $x \in \bar{A}$. Отсюда в силу $\mathscr{E}_8$ вытекает, что $H > -\infty$ и, следовательно, также $F > -\infty$.

22. Лемма. *Пусть множество $A \subset P$ компактно, $f \in \mathfrak{F}(A)$ и пусть $\sum\{f(x) : x \in A\} = +\infty$.*[1]*) Тогда существует такая точка $x_0 \in A$, что для всякой ее окрестности U будет $\sum\{f(x) : x \in U \cap A\} = +\infty$.*

Лемма легко доказывается от противного.

23. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ аддитивна. Пусть, далее, $F(\bar{A}) < +\infty$ и ${}_0F(x) > -\infty$ для всех $x \in \bar{A}$. Тогда $\sum\{F^+(\{x\}) : x \in \bar{A}\} < +\infty$.*

Доказательство. В силу 5 и 21 функция F конечна. Пусть $\sum\{F^+(\{x\}) : : x \in \bar{A}\} = +\infty$. Тогда, в силу 22, существует такая точка $x_0 \in \bar{A}$, что для всякой ее окрестности U будет $\sum\{F^+(\{x\}) : x \in U \cap \bar{A}\} = +\infty$. В силу $\mathscr{E}_6$ существует такая последовательность $\{U_n\} \subset \sigma$ окрестностей точки x_0, что $\{U_n\} \in \eta_{x_0}$. Если мы положим $B_n = U_n \cap \bar{A}$, то $\sum\{F^+(\{x\}) : x \in B_n\} = +\infty$. Следовательно, существуют конечные множества $C_n \subset B_n$, для которых

$$F(C_n) = \sum\{F^+(\{x\}) : x \in C_n\} > n + F(B_n), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Так как $\{B_n - C_n\} \in \eta_{x_0}$ (см. $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$) и $F(B_n - C_n) = F(B_n) - F(C_n) < -n$, $n = 1, 2, \ldots$, то ${}_0F(x_0) = -\infty$. Это, однако, противоречие.

Следствие. Если выполнены предположения только что приведенной леммы, то множество $\{x \in \bar{A} : F(\{x\}) > 0\}$ счетно (см. [3], гл. 2, G, (d)).

24. Обозначение. Пусть $A \in \sigma$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$. Через $Z(F, A)$ мы обозначим множество всех $x \in P$, для которых существует такая последовательность $\{B_n\} \in \eta_x$, что $B_n \in \sigma_A$ и $F(B_n) < 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Примечание. Из 18 вытекает, что $Z(F, A) \subset \bar{A}$, как только $F(\emptyset) \geqq 0$. Однако, если $F(\emptyset) < 0$, то, в силу 17, будет $Z(F, A) = P$.

25. Лемма. *Если $A \in \sigma$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ супераддитивна, то множество $Z(F, A)$ замкнуто.*

Лемма является непосредственным следствием 6 и $\mathscr{E}_7$.

26. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$, $A \neq \emptyset$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ аддитивна. Если $Z(F, A) = \emptyset$, то $F \geqq 0$.*

Доказательство. Для $B \in \sigma_A$ мы положим $H(B) = +\infty$, если $F(B) \geqq 0$, и $H(B) = -\infty$, если $F(B) < 0$. Функция H, очевидно, аддитивна. Пусть $x \in \bar{A}$, $\{B_n\} \subset \sigma_A$ и $\{B_n\} \in \eta_x$. Так как $x \notin Z(F, A)$, то $H(B_n) = +\infty$ для всех достаточно больших индексов n. Значит, ${}_0H(x) = +\infty$. Из $\mathscr{E}_8$ теперь вытекает, что $H > -\infty$ и, следовательно, $F \geqq 0$.

27. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$, $x_0 \in \bar{A}$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ аддитивна. Пусть, далее, $Z(F, A) \subset \subset (x_0)$ и ${}_0F(x_0) \geqq 0$. Тогда $F \geqq 0$.*

Доказательство. Пусть $B \in \sigma_A$ и пусть $\{U_n\} \subset \sigma$ — такая последовательность окрестностей точки x_0, что $\{U_n\} \in \eta_{x_0}$ (см. $\mathscr{E}_6$). Положим $B_n = B - U_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как $F(\emptyset) \geqq {}_0F(x_0) \geqq 0$ (см. 17), то, в силу примечание в абзаце

---

[1]) Определение и основные свойства обобщенной суммы $\sum\{f(x) : x \in A\}$ приведены в [3], гл. 2, G.

24, будет $Z(F, B_n) \subset \bar{B}_n$. Так как одновременно $Z(F, B_n) \subset Z(F, A) \subset (x_0)$ и $x_0 \notin \bar{B}_n$, то $Z(F, B_n) = \emptyset$. Отсюда, в силу 26, вытекает, что если $B_n \neq \emptyset$, то $F(B_n) \geqq 0$. Однако, если $B_n = \emptyset$, то опять $F(B_n) \geqq 0$, как мы показали выше. Следовательно, для $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$F(B) = F(B \cap U_n) + F(B_n) \geqq F(B \cap U_n).$$

В силу $\mathscr{E}_2$ будет $\{B \cap U_n\} \in \eta_{x_0}$; значит,

$$F(B) \geqq \liminf F(B \cap U_n) \geqq {}_0F(x_0) \geqq 0.$$

28. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$, $A \neq \emptyset$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ аддитивна. Если ${}_0F(x) \geqq 0$ для всех $x \in \bar{A}$, то множество $Z(F, A)$ компактно и совершенно.*

Доказательство. Лемма верна, если $Z(F, A) = \emptyset$. Пусть $Z(F, A) \neq \emptyset$. Так как $F(\emptyset) \geqq 0$, то $Z(F, A) \subset \bar{A}$. В силу 25 множество $Z(F, A)$ замкнуто и, следовательно, компактно. Пусть $x \in Z(F, A)$, U — окрестность точки x и пусть $\{B_n\} \subset \sigma_A$, $\{B_n\} \in \eta_x$ — последовательность, для которой $F(B_n) < 0$, $n = 1, 2, \ldots$. В силу 19 существует такое n_0, что $\bar{B}_{n_0} \subset U$ и, в силу 27, существует $x' \in Z(F, B_{n_0})$, $x' \neq x$. Так как $Z(F, B_{n_0}) \subset \bar{B}_{n_0} \subset U$ и $Z(F, B_{n_0}) \subset Z(F, A)$, то $x' \in U \cap Z(F, A)$. Следовательно, x является предельной точкой множества $Z(F, A)$.

Следствие. Если выполнены предположения предыдущей леммы, то множество $Z(F, A)$ либо пусто, либо несчетно. Это вытекает из хорошо известной теоремы, утверждающей, что непустое компактное совершенное подмножество топологического пространства Хаусдорфа несчетно.

29. Определение. Скажем, что последовательность $\{B_n\} \subset \sigma$ *сильно сходится* к точке $x \in P$ и пишем $B_n \to x$, если $\{B_n\} \in \eta_x$ и $x \in B_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Для $x \in P$ мы положим $\kappa_x = \{\{B_n\} \subset \sigma : B_n \to x\}$.

Примечание. Очевидно, $\kappa_x \subset \eta_x$ для всех $x \in P$. Из 17 следует, что если $x \in P$ и $B_n = (x)$ для $n = 1, 2, \ldots$, то $B_n \to x$.

30. Определение. Пусть $x \in P$, $A \in \sigma$ и $F, H \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$. *Нижней производной* от функции F вдоль функции H в точке x относительно множества A называется точная нижняя грань множества всех значений $\liminf [F(B_n)/H(B_n)]$, где $\{B_n\} \subset \subset \sigma_A$ и $B_n \to x$. Обозначается ${}_*F(H, x, A)$.

Примечание. Сразу видно, что ${}_*F(H, x, A) = +\infty$ для всех $x \in P - \bar{A}$.

31. Определлние. Пусть $A \in \delta$, $H \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ и $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Аддитивная функция $M \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ называется *мажорантой* функции f вдоль функции H на множестве A, если $M(\bar{A}) < +\infty$ и если

$$x \in \bar{A} \Rightarrow [{}_0M(x, A) \geqq 0 \text{ и } -\infty \neq {}_*M(H, x, A) \geqq f(x)].$$

Совокупность всех мажорант функции f вдоль функции H на множестве A мы обозначим $\mathfrak{M}(H, f, A)$.

Примечание. Очевидно, $\mathfrak{M}(H, f, \bar{A}) = \mathfrak{M}(H, f, A)$ и из 21 и 5 вытекает, что каждая мажоранта $M \in \mathfrak{M}(H, f, A)$ есть конечная функция.

32. Определение. Пусть $A \in \sigma$, $H \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ и $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Положим

$$I_I(H, f, A) = \inf M(A) \quad [M \in \mathfrak{M}(H, f, A)] ,$$

если $A \neq \emptyset$, и $I_I(H, f, A) = 0$, если $A = \emptyset$. Число $I_I(H, f, A)$ называется *верхним интегралом* от функции f вдоль функции H на множестве A. Если

$$I_I(H, f, A) = -I_I(H, -f, A) \neq \pm\infty ,$$

то это общее значение называетя *интегралом* от функции f вдоль функции H на множестве A и обозначается символом $I(H, f, A)$. Функция $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$, определенная соотношением $F(B) = I_I(H, f, B)$ [2]) для всех $B \in \sigma_A$, называется *неопределенным верхним интегралом* от функции f вдоль функции H на множестве A и обозначается $I_I(H, f)$. Положим

$$\mathfrak{P}(H, A) = \{f \in \mathfrak{F}(\bar{A}) : I_I(H, f, A) = -I_I(H, -f, A) \neq \pm\infty\} ,$$

$$\mathfrak{P}_0(H, A) = \{f \in \mathfrak{P}(H, A) : |f| \in \mathfrak{P}(H, A)\} .$$

Примечание. Интересно, что мы определили производную, мажоранту и интергал, не употребляя никаких предположений, приведенных в абзаце 9.

33. Соглашение. Пусть вплоть до конца этой статьи задана определенная конечная неотрицательная аддитивная функция $G \in \mathfrak{F}(\sigma)$, удовлетворяющая следующим требованиям:

α) $$A \in \sigma \Rightarrow G(\bar{A} - A) = 0 ,$$

β) $$[x \in P, \{B_n\} \in \eta_x] \Rightarrow \lim G(B_n) = 0 .$$

Исключая абзацы 54 и 58, мы будем во свей этой работе дифференцировать и интегрировать единственно вдоль только что введенной функции G.

Поэтому, исключая эти абзацы, мы будем писать ${}_*F(x, A)$ или только ${}_*F(x)$ вместо ${}_*F(G, x, A)$ и $I_I(f, A)$, $I(f, A)$, $I_I(f)$ вместо $I_I(G, f, A)$, $I(G, f, A)$, $I_I(G, f)$; подобно $\mathfrak{M}(f, A)$ или $\mathfrak{M}(f)$ или $\mathfrak{M}(A)$ или $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{P}(A)$, $\mathfrak{P}_0(A)$.

Примечание. Из $\beta)$ и 17 вытекает, что $G(\{x\}) = 0$ для всех $x \in P$. Пусть $x \in P$, $A \in \sigma$, $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ и пусть $F(\emptyset) \leqq 0$ и ${}_*F(x) > -\infty$. Так как ${}_0F(x) \leqq 0$ и $\liminf F(B_n) \geqq 0$, если только $\{B_n\} \subset \sigma_A$ и $\{B_n\} \in \kappa_x$, то, в силу $\mathscr{E}_1$, будет

[2]) Здесь, разумеется, мы отождествляем определенную функцию с той же функцией, рассматриваемой только на подмножестве ее области определения, но мы думаем, что читателю наверно ясно, в чем дело.

${}_0F(x)$ точный нижней гранью множества всех значений $\liminf F(B_n)$, где $\{B_n\} \subset \sigma_A$, $\{B_n\} \in \eta_x$ и $x \notin B_n$, $n = 1, 2, \ldots$

34. Лемма. *Пусть* $A \in \sigma$, $x \in \bar{A}$, $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ *и пусть* ${}_*F(x) > -\infty$. *Тогда* $F(\{x\}) \geqq 0$ *и если функция* F *аддитивна, то даже* $F(\{x\}) \geqq |{}_0F(x)|$.

Лемма вытекает из 17, 29 и 33.

35. Теорема. *Пусть* $A \in \sigma$ *и* $f, g \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. *Тогда выполняется:*

а) $0 < c < +\infty \Rightarrow I_I(cf, A) = cI_I(f, A)$;

б) $f \leqq g \Rightarrow I_I(f, A) \leqq I_I(g, A)$.

Доказательство просто.

36. Лемма. *Пусть* $A \in \sigma$, $A \neq \emptyset$ *и* $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ *аддитивна. Пусть, далее,* $F(\bar{A}) < +\infty$ *и* ${}_0F(x) \geqq 0$, ${}_*F(x) \geqq 0$ *для всех* $x \in \bar{A}$. *Тогда* $F \geqq 0$.

Доказательство. Пусть сначала ${}_*F(x) > 0$ для всех $x \in \bar{A}$. Если $Z(F, A) \neq \emptyset$ то, в силу следствия леммы 28, множество $Z(F, A)$ несчетно. В силу 34 и следствия леммы 23 существует такое $x \in Z(F, A)$, что $F(\{x\}) = 0$. К точке x найдется последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_A$, для которой $\{B_n\} \in \eta_x$ и $F(B_n) < 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как $B_n \cup \{x\} \to x$ и $F(B_n \cup \{x\}) = F(B_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, то ${}_*F(x) \leqq 0$. Это, однако, противоречит предположению; значит, $Z(F, A) = \emptyset$. Утверждение леммы теперь вытекает из 26.

В общем случае положим $H = F + \varepsilon G$, $\varepsilon > 0$. Легко проверяется (см. [7], 23), что

$${}_0H(x) \geqq {}_0F(x) + \varepsilon\, {}_0G(x) \geqq 0\,, \quad {}_*H(x) \geqq {}_*F(x) + \varepsilon\, {}_*G(x) \geqq {}_*F(x) + \varepsilon > 0$$

для всех $x \in \bar{A}$. Итак, в силу первой части доказательства, $H \geqq 0$. Ввиду произвольности ε также $F \geqq 0$.

Примечание. Заменим в предположении $\mathscr{E}_8$ слово „*аддитивна*" словом „*супераддитивна*" и то же самое проведем в леммах 21, 23, 26–28. Читатель легко убедится в том, что после этой замены будут приведенные леммы опять верны. Наперекор этому, в абзаце 94 будет показано, что лемма 36 после этой замены уже неверна. В абзацах 95 и 96 будет показана необходимость остальных предположений предыдущей леммы (исключая, конечно, предположение „${}_*F(x) \geqq 0$ *для всех* $x \in \bar{A}$", необходимость которого очевидна).

37. Теорема. *Пусть* $A \in \sigma$ *и* $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. *Тогда* $-I_I(-f, A) \leqq I_I(f, A)$.

Доказательство. Если $A = \emptyset$, то теорема очевидно верна. Пусть $A \neq \emptyset$ и пусть $I_I(f, A) < -I_I(-f, A)$. Тогда существует $M \in \mathfrak{M}(f)$, для которой $M(A) < -I_I(-f, A)$. Так как $I_I(-f, A) < -M(A)$, то найдется такая $N \in \mathfrak{M}(-f)$, что $N(A) < -M(A)$. Функция $F = M + N$ конечна и аддитивна. Легко проверится, что ${}_0F(x) \geqq 0$ и ${}_*F(x) \geqq 0$ для всех $x \in \bar{A}$. Итак, в силу 36, имеем $F \geqq 0$. Это, однако, противоречие, потому что $F(A) < 0$.

Следствие. Пусть $A \in \sigma$, $A \neq \emptyset$ и $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Пусть существует такая функция $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$, что $F \in \mathfrak{M}(f)$ и $-F \in \mathfrak{M}(-f)$. Тогда $f \in \mathfrak{P}(A)$ и $I(f, A) = F(A)$.

38. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$, $c \in E$, $c \neq \pm\infty$ и $f = c$ на $\bar{A}$. Тогда $f \in \mathfrak{P}(A)$ и $I(f, A) = cG(A)$.*

Доказательство. Если $A \neq \emptyset$, то функция $F = cG$ удовлетворяет требованиям следствия теоремы 37.[2]) Однако, теорема справедлива также для $A = \emptyset$, так как $G(\emptyset) = 0$.

Примечание. Если $A \in \sigma$ и $G(A) = 0$, то $f \in \mathfrak{P}(A)$ и $I(f, A) = 0$ для каждой функции $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$.

39. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$, $f, f_i \in \mathfrak{F}(\bar{A})$, $\alpha_i \in E$ и $\alpha_i \neq \pm\infty$, $i = 1, 2$. Для всех $x \in \bar{A}$ пусть $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$, как только сумма вправо имеет смысл. Тогда*

$$I_I(f, A) \leqq I_I(\alpha_1 f_1, A) + I_I(\alpha_2 f_2, A),$$

как только сумма вправо имеет смысл. Если $f_1, f_2 \in \mathfrak{P}(A)$, то также $f \in \mathfrak{P}(A)$ и

$$I(f, A) = \alpha_1 I(f_1, A) + \alpha_2 I(f_2, A).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы [7], 29.

40. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$, $A \neq \emptyset$ и $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ аддитивна. Пусть, далее, $F(\bar{A}) < +\infty$ и ${}_0F(x) \geqq 0$, ${}_*F(x) > -\infty$ для всех $x \in \bar{A}$. Тогда $F(B) \geqq 0$ для каждого множества $B \in \sigma_A$, для которого $G(B) = 0$.*

Доказательство. Пусть $B \in \sigma_A$ и $G(B) = 0$. Если $B = \emptyset$, то $F(B) = 0$, потому что, в силу 21 и 5, функция F конечна. Пусть $B \neq \emptyset$. Так как $F \in \mathfrak{M}({}_*F, B)$,[2]) то тогда $F(B) \geqq I_I({}_*F, B)$. Однако, из примечания к теореме 38 вытекает, что $I_I({}_*F, B) = 0$.

41. Лемма. *Пусть $x \in P$, $A_1, A_2 \in \sigma$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ и $A = A_1 \cup A_2$. Пусть, далее, $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ супераддитивна и ${}_0F(x, A_i) \geqq 0$, $i = 1, 2$. Тогда также ${}_0F(x, A) \geqq 0$ и, если функция F даже аддитивна, то*

$${}_*F(x, A) = \min\,[{}_*F(x, A_1), {}_*F(x, A_2)].$$

Доказательство. Если $A_1 = \emptyset$ или $A_2 = \emptyset$, то утверждение леммы тривиально. Предположим, следовательно, что $A_1 \neq \emptyset$ и $A_2 \neq \emptyset$. Пусть $\{B_n\} \subset \sigma_A$ и $\{B_n\} \in \eta_x$. Для $n = 1, 2, \ldots$ положим $B_n^1 = B_n \cap \bar{A}_1$ и $B_n^2 = B_n - \bar{A}_1 = B_n \cap (\bar{A} - \bar{A}_1)$. Тогда $\{B_n^i\} \subset \sigma_A$ и $\{B_n^i\} \in \eta_x$ (см. $\mathscr{E}_2$). Следовательно, $\liminf F(B_n^i) \geqq {}_0F(x, B_i) \geqq 0$, $i = 1, 2$. Отсюда вытекает:

$$\liminf F(B_n) \geqq \liminf\,[F(B_n^1) + F(B_n^2)] \geqq \liminf F(B_n^1) + \liminf F(B_n^2) \geqq 0$$

(при этом сумме $F(B_n^1) + F(B_n^2)$ мы приписываем произвольное значение всюды там, где она не определена). Ввиду произвольности последовательности $\{B_n\}$ имеем ${}_0F(x, A) \geqq 0$.

Пусть функция F аддитивна. Обозначим $a_i = {}_*F(x, A_i)$, $i = 1, 2$ и $a = {}_*F(x, A)$. Очевидно, что $a \leqq \min(a_1, a_2)$. Предположим, что $a < \min(a_1, a_2)$, и выберем $b \in E$, $a < b < \min(a_1, a_2)$. Тогда $x \in \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$, $F(\{x\}) \leqq 0$ и существует такая последовательность $\{C_n\} \subset \sigma_A$, что $C_n \to x$ и $\liminf [F(C_n)/G(C_n)] < b$. Если мы для $n = 1, 2, \ldots$ положим $C_n^1 = (C_n \cap \bar{A}_1) \cup \{x\}$, $C_n^2 = (C_n - \bar{A}_1) \cup \{x\}$, то будет $\{C_n^i\} \subset \sigma_{A_i}$ и $C_u^i \to x$, $i = 1, 2$. Легко проверяется, что для достаточно больших индексов n имеем $F(C_n^i) \geqq bG(C_n^i)$, $i = 1, 2$ и, следовательно,

$$F(C_n) = F(C_n^1) + F(C_n^2) - F(\{x\}) \geqq F(C_n^1) + \\ + F(C_n^2) \geqq b[G(C_n^1) + G(C_n^2)] = bG(C_n).$$

Однако, отсюда непосредственно вытекает, что $\liminf [F(C_n)/G(C_n)] \geqq b$. Это противоречие.

42. Определение. Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Аддитивная функция $M \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ называется *обобщенной мажорантой* функции f на множестве A, если выполняется следующее:

α) $M(\bar{A}) < +\infty$ и ${}_0M(x) \geqq 0$ для всех $x \in \bar{A}$.

β) Существует такое счетное множество $S \subset \bar{A}$, что

$$x \in \bar{A} - S \Rightarrow -\infty \neq {}_*M(x) \geqq f(x).$$

Совокупность всех обобщенных мажорант функции f на множестве A мы обозначим $\mathfrak{M}_0(f, A)$ и, если не угрожает недоразумение, только $\mathfrak{M}_0(f)$ или $\mathfrak{M}_0(A)$ или $\mathfrak{M}_0$.

43. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$, $A \neq \emptyset$ и $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Тогда*

$$I_I(f, A) = \inf M(A) \quad [M \in \mathfrak{M}_0(f, A)].$$

Доказательство. Пусть $M \in \mathfrak{M}_0$ и пусть $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное множество, соответствующее M (см. 42, β)). Выберем $\varepsilon > 0$ и для $B \in \sigma_A$ положим

$$N(B) = M(B) + \varepsilon \sum_n 2^{-n} \chi_B(x_n),$$

где χ_B — характеристическая функция множества B. Так как ${}_0N(x) \geqq {}_0M(x)$, ${}_*N(x) \geqq {}_*M(x)$ для всех $x \in P$ и ${}_*N(x_n) = +\infty$, $n = 1, 2, \ldots$, то $N \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $I_I(f, A) \leqq N(A) \leqq M(A) + \varepsilon$. Ввиду произвольности M и ε, имеем

$$I_I(f, A) \leqq \inf M(A) \quad [M \in \mathfrak{M}_0].$$

Обратное неравенство является непосредственным следствием включения $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_0$.

Следствие. Пусть $A \in \sigma$, $A \neq \emptyset$ и $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Пусть существует такая функция $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$, что $F \in \mathfrak{M}_0(f)$ и $-F \in \mathfrak{M}_0(-f)$. Тогда $f \in \mathfrak{P}(A)$ и $I(f, A) = F(A)$.

44. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$, $f, g \in \mathfrak{F}(\bar{A})$ и пусть существует такое счетное множество $S \subset \bar{A}$, что $f(x) = g(x)$ для всех $x \in \bar{A} - S$. Тогда $I_I(f, A) = I_I(g, A)$.*

Теорема непосредственно вытекает из 43.

45. Лемма. *Пусть $A \in \sigma$, $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$ и $M \in \mathfrak{M}(f, A)$. Для $B \in \sigma_A$ положим $N(B) = M(B \cap A)$. Тогда $N \in \mathfrak{M}_0(f, A)$.*

Доказательство. Легко проверится, что функция N конечна и аддитивна и что ${}_0N(x) \geqq 0$ для всех $x \in \bar{A}$. Положим $S = \{x \in \bar{A} : M(\{x\}) \neq 0\}$. В силу 34 и следствия леммы 23, множество S счетно. Пусть $x \in \bar{A} - S$ и пусть $\{B_n\} \subset \sigma_A$ — такая последовательность, что $B_n \to x$ и $N(B_n)/G(B_n)$ имеет смысл для всех индексов n. Положим $C_n = (A \cap B_n) \cup \{x\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $C_n \to x$ (см. $\mathscr{E}_2$ и 17), $G(C_n) = G(B_n)$ (см. 33) и $M(C_n) = M(A \cap B_n) = N(B_n)$. Значит,

$$\liminf \left[N(B_n)/G(B_n)\right] = \liminf \left[M(C_n)/G(C_n)\right] \geqq {}_*M(x)$$

и, следовательно, ${}_*N(x) \geqq {}_*M(x)$. Отсюда уже вытекает утверждение леммы.

46. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Тогда функция $I_I(f)$ аддитивна.*

Доказательство. Легко проверится (см., напр. [7], 11), что $I_I(f, B) \geqq I_I(f, B_1) + I_I(f, B_2)$.

С другой стороны, выберем $M_i \in \mathfrak{M}(B_i)$ и для $C \in \sigma_B$ положим $N_i(C) = M_i(C \cap B_i)$, $i = 1, 2$. В силу 45 будет $N_i \in \mathfrak{M}_0(B_i)$ [2]). Пусть $N = N_1 + N_2$. Так как $G(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2) = 0$ (см. 33), то $N_1(C) \geqq 0$ для всех $C \in \sigma_{B_2}$ и $N_2(C) \geqq 0$ для всех $C \in \sigma_{B_1}$ (см. 40). Значит, ${}_0N_1(x, B_2) \geqq 0$, ${}_0N_2(x, B_1) \geqq 0$ и ${}_*N_1(x, B_2) \geqq 0$, ${}_*N_2(x, B_1) \geqq 0$ для всех $x \in P$. Итак, для $i = 1, 2$ и всех $x \in P$ имеем

$$ {}_0N(x, B_i) \geqq {}_0N_1(x, B_i) + {}_0N_2(x, B_i) \geqq {}_0N_i(x, B_i) \geqq 0 \,, $$

$$ {}_*N(x, B_i) \geqq {}_*N_1(x, B_i) + {}_*N_2(x, B_i) \geqq {}_*N_i(x, B_i) \,. $$

Из 41 теперь вытекает, что для всех $x \in P$ будет ${}_0N(x, B) \geqq 0$ и

$$ {}_*N(x, B) = \min \left[{}_*N(x, B_1), {}_*N(x, B_2)\right] \geqq \min \left[{}_*N_1(x, B_1), {}_*N_2(x, B_2)\right] . $$

Следовательно, $N \in \mathfrak{M}_0(B)$. В силу 43 имеем

$$ I_I(f, B) \leqq N(B) = N_1(B) + N_2(B) = M_1(B_1) + M_2(B_2) $$

и ввиду произвольности мажорант M_1, M_2 также $I_I(f, B) \leqq I_I(f, B_1) + I_I(f, B_2)$.

Следствие. Из 33 α) и примечания к теореме 38 вытекает

$$ I_I(f, \bar{A}) = I_I(f, A) + I_I(f, \bar{A} - A) = I_I(f, A) \,. $$

47. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Если $I_I(f, A) \neq \pm\infty$, то функция $I_I(f)$ конечна.*

Доказательство. Если $A = \emptyset$, то теорема верна. Пусть $A \neq \emptyset$. Из неравенства $I_I(f, A) < +\infty$ вытекает, что $\mathfrak{M}(f, A) \neq \emptyset$. Однако, для $M \in \mathfrak{M}(f, A)$ имеем $I_I(f) \leqq M < +\infty$. Так как $I_I(f, A) > -\infty$, то конечность функции $I_I(f)$ следует из 46 и 5.

48. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$. Тогда $\mathfrak{P}(A) \subset \mathfrak{P}(B)^2)$ для каждого $B \in \sigma_A$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{P}(A)$ и $B \in \sigma_A$. В силу 37, 46 и 47 будет $F = I_I(f) + I_I(-f)$ конечной неотрицательной аддитивной функцией. Из 5 и из следствия теоремы 46 вытекает $0 \leqq F(B) \leqq F(\bar{A}) = F(A) = 0$. Значит, $f \in \mathfrak{P}(B)$.

Примечание. Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{P}(A)$. На основании предыдущей теоремы мы можем соотношением $F(B) = I(f, B)$, $B \in \sigma_A$, определить функцию $F \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$, которую мы будем называть *неопределенным интегралом* от функции f на множестве A. Обозначим ее через $I(f)$.

49. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$, $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$ и пусть $F = I_I(f)$. Если $F(A) \neq \pm\infty$, то ${}_0F(x) = 0$ для всех $x \in P$.*

Доказательство. Пусть $x \in P$. В силу следствия леммы 17 будет ${}_0F(x) \leqq 0$. Если $A = \emptyset$, то, очевидно, ${}_0F(x) = 0$. Пусть $A \neq \emptyset$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует такая $M \in \mathfrak{M}(f, \bar{A})$, что $M(\bar{A}) \leqq F(\bar{A}) + \varepsilon$. Выберем последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_A$, $\{B_n\} \in \eta_x$. Так как $0 \leqq M - F < \varepsilon$, то

$$\liminf F(B_n) \geqq \liminf M(B_n) - \varepsilon \geqq {}_0M(x) - \varepsilon \geqq -\varepsilon\,.$$

Следовательно, также ${}_0F(x) \geqq -\varepsilon$. Неравенство ${}_0F(x) \geqq 0$ теперь вытекает из произвольности числа ε.

Примечание. Пусть $A \in \sigma$, $f \in \mathfrak{P}(A)$ и $x \in P$. Если $\{B_n\} \subset \sigma_A$ и $\{B_n\} \in \eta_x$, то из предыдущей теоремы вытекает, что $\lim I(f, B_n) = 0$ и, следовательно,

$$\lim I(f, A - B_n) = I(f, A).$$

50. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. Если функция f конечна и непрерывна, то $f \in \mathfrak{P}(A)$.*

Доказательство. Учитывая теоремы 46 и 49, мы одинаковым способом как и в [7], 45 докажем, что $I_I(f) \in \mathfrak{M}(f, A)$ и $-I_I(f) \in \mathfrak{M}(-f, A)$. Теперь достаточно использовать следствие теоремы 37.

51. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$, $f \in \mathfrak{P}(A)$ и пусть S — множество всех $x \in \bar{A}$, для которых существует такая последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_A$ непересекающихся множеств, что $\{B_n\} \in \eta_x$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |I(f, B_n)| = +\infty$. Тогда множество S счетно.*

Доказательство. Пусть множество S несчетно. Выберем $M \in \mathfrak{M}(f, A)$ и положим $H = M - I(f)$. Функция H, очевидно, конечна, неотрицательна и аддитивна. В силу следствия леммы 23 существует $x \in S$, для которого $M(\{x\}) = 0$. Не умаляя общности, мы можем предполагать, что имеется такая последовательность $\{B_n\} \subset \sigma_A$ непересекающихся множеств, что $\{B_n\} \in \eta_x$ и $\sum_{n=1}^{\infty} I(f, B_n) = -\infty$. Пусть $c < \min[{}_*M(x), 0]$. Так как $B_n \cup \{x\} \to x$, $M(B_n \cup \{x\}) = M(B_n)$ и $G(B_n \cup \{x\}) = G(B_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, то найдется такое n_1, что для $n \geqq n_1$ будет $M(B_n) \geqq cG(B_n)$ и, следовательно, $H(B_n) \geqq cG(B_n) - I(f, B_n)$. Далее найдется $n_2 \geqq n_1$, для которого $\sum_{n=n_1}^{n_2} I(f, B_n) < cG(A) - H(A)$. Если мы положим $B = \bigcup_{n=n_1}^{n_2} B_n$, то

$$H(A) \geqq H(B) = \sum_{n=n_1}^{n_2} H(B_n) \geqq c \sum_{n=n_1}^{n_2} G(B_n) - \sum_{n=n_1}^{n_2} I(f, B_n) > cG(B) - cG(A) + H(A) \geqq H(A).$$

Это, однако, противоречие.

Примечание. Читателю советуется сравнить предыдущую теорему с теоремой [7], 35.

52. Несколько утверждений. В этом абзаце мы приведем без доказательства некоторые важные свойства интеграла. Доказательства этих свойств подобны доказательствам аналогичных утверждений, содержащихся в [4], II, 63–73. Читатель может их без особого труда доказать сам на основании указанного образца.

а) *Пусть* $A \in \sigma$ *и* $f, g \in \mathfrak{P}_0(A)$. *Тогда* $f^+, f^-, |f| \in \mathfrak{P}_0(A)$, $\max(f, g) \in \mathfrak{P}_0(A)$ и $\min(f, g) \in \mathfrak{P}_0(A)$.

б) *Пусть* $A \in \sigma$ *и* $f_n, f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$, $n = 1, 2, \ldots$. *Если* $f_n \nearrow f$ *и* $I_I(f_1, A) > -\infty$, *то* $I_I(f_n, A) \nearrow I_I(f, A)$.

в) *Пусть* $A \in \sigma$ *и* $f_n \in \mathfrak{F}(\bar{A})$, $n = 1, 2, \ldots$. *Если* $I_I(\inf f_n, A) > -\infty$, *то*

$$I_I(\liminf f_n, A) \leqq \liminf I_I(f_n, A).$$

г) *Пусть* $A \in \sigma$, $g, h, f_n \in \mathfrak{P}(A)$ *и пусть* $g \leqq f_n \leqq h$, $n = 1 2, \ldots$. *Если существует* $\lim f_n$, *то* $\lim f_n \in \mathfrak{P}(A)$ *и*

$$I(\lim f_n, A) = \lim I(f_n, A).$$

д) *Пусть* $A \in \sigma$, $f_n \in \mathfrak{P}(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, *и* $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$. *Если* $f_n \nearrow f$, *то*

$$I_I(f, A) = -I_I(-f, A) = \lim I(f_n, A).$$

53. Теорема. *Пусть* $A \in \sigma$, $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$ *и* $x \in \bar{A}$. *Пусть, далее,* $f \in \mathfrak{P}(B)$, *как только* $B \in \sigma_A$ *и* $x \notin \bar{B}$, *и пусть* $\lim I(f, A - B_n) = c \neq \pm\infty$ *для каждой последовательности* $\{B_n\} \subset \sigma_A$, *для которой* $\{B_n\} \in \eta_x$ *и* $x \notin \overline{A - B_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда* $f \in \mathfrak{P}(A)$ *и* $I(f, A) = c$.

Доказательство. В силу 20 существует такая последовательность $\{U_n\} \subset \sigma$ окрестностей точки x, что $\overline{U}_{n+1} \subset U_n^0$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\{U_n\} \in \eta_x$. Пусть $B \in \sigma_A$. Для $n = 1, 2, \ldots$ положим $B_n^1 = B - U_n$ и $B_n^2 = (\bar{A} - B) - U_n$.

Предположим, что последовательность $\{I(f, B_n^1)\}$ неограничена сверху. Тогда существуют такие натуральные числа n_k, что $n_k < n_{k+1}$ и $I(f, B_{n_k}^1) > k - I(f, B_k^2)$, $k = 1, 2, \ldots$. Так как $B_{n_k}^1 \cap B_k^2 = \emptyset$,

$$B_{n_k}^1 \cup B_k^2 = (B - U_{n_k}) \cup [\bar{A} - (B \cup U_k)] = \bar{A} - [(U_{n_k} \cap B) \cup (U_k - B)],$$

$x \notin \overline{B_{n_k}^1 \cup B_k^2}$, $k = 1, 2, \ldots$ и $\{(U_{n_k} \cap B) \cup (U_k - B)\} \in \eta_x$ (см. $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_4$), то

$$+\infty > \lim I(f, B_{n_k}^1 \cup B_k^2) = \lim [I(f, B_{n_k}^1) + I(f, B_k^2)] \geqq \lim k = +\infty .$$

Это, однако, невозможно. Подобно проверится, что последовательность $\{I(f, B_n^1)\}$ ограничена снизу. Если мы заменим множество B множеством $\bar{A} - B$, то мы получим из предыдущего, что последовательность $\{I(f, B_n^2)\}$ также ограничена.

Пусть $\{C_n^i\}$ и $\{D_n^i\}$ такие подпоследовательности последовательностей $\{B_n^i\}$, что

$$\lim I(f, C_n^i) = \liminf I(f, B_n^i), \quad \lim I(f, D_n^i) = \limsup I(f, B_n^i),$$

$i = 1, 2$. Для $n = 1, 2, \ldots$ положим $C_n = C_n^1 \cup C_n^2$ и $D_n = D_n^1 \cup D_n^2$. В силу $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ и $\mathscr{E}_4$ будет

$$c = \lim I(f, C_n) = \lim I(f, C_n^1) + \lim I(f, C_n^2) = \liminf I(f, B_n^1) + \liminf I(f, B_n^2) \leqq$$
$$\leqq \limsup I(f, B_n^1) + \limsup I(f, B_n^2) = \lim I(f, D_n^1) + \lim I(f, D_n^2) = \lim I(f, D_n) = c .$$

Следовательно, существует конечный $\lim I(f, B_n^1)$.

Положим $A_1 = \bar{A} - U_1$ и $A_{k+1} = \bar{A} \cap (U_k - U_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда $A_k \in \sigma_A$ и $A_k \cap A_l = \emptyset$, для $k \neq l$, $k, l = 1, 2, \ldots$. Значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty} I(f, B \cap A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} I(f, B \cap A_k) = \lim I(f, B - U_n) = \lim I(f, B_n^1) \neq \pm\infty .$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем такие $R_k \in \mathfrak{M}(f, A_k)$ и $r_k \in \mathfrak{M}(-f, A_k)$, что

$$R_k(A_k) < I(f, A_k) + \varepsilon/2^{k+1} \quad \text{и} \quad r_k(A_k) < I(-f, A_k) + \varepsilon/2^{k+1} .$$

Для $B \in \sigma_A$ положим

$$M_k(B) = R_k(B \cap A_k) \quad \text{и} \quad m_k(B) = r_k(B \cap A_k) .$$

В силу 45 будет $M_k \in \mathfrak{M}_0(f, A_k)$, $m_k \in \mathfrak{M}_0(-f, A_k)$,[2]) $k = 1, 2, \ldots$, причем

$$\lim_{p,q\to\infty} |\sum_{k=p}^{q} M_k(B)| \leqq \lim_{p,q\to\infty} \sum_{k=p}^{q} [R_k(B \cap A_k) - I(f, B \cap A_k)] +$$
$$+ \lim_{p,q\to\infty} |\sum_{k=p}^{q} I(f, B \cap A_k)| \leqq \lim_{p,q\to\infty} \sum_{k=p}^{q} \varepsilon/2^{k+1} = 0 .$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} M_k(B)$ сходится. Аналогично докажется, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} m_k(B)$. Итак, мы можем на σ_A определить конечные аддитивные функции

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \quad \text{и} \quad m = \sum_{k=1}^{\infty} m_k\,.$$

Если $y \in \bar{A}$ и $y \neq x$, то существует такое k_y, что $y \in (A_{k_y} \cup A_{k_y+1})^0$. Положим $A_y = A_{k_y} \cup A_{k_y+1}$ и $M_y = M_{k_y} + M_{k_y+1}$. В силу $\mathscr{E}_5$ имеем

$${}_0M(y, A) = {}_0M_y(y, A_y) \quad \text{и} \quad {}_*M(y, A) = {}_*M_y(y, A_y)\,.$$

Одинаковым способом, как в доказательстве теоремы 46, теперь проверится, что ${}_0M_y(y, A_y) \geqq 0$ и

$${}_*M_y(y, A_y) \geqq \min\,[{}_*M_{k_y}(y, A_{k_y}),\ {}_*M_{k_y+1}(y, A_{k_y+1})]\,.$$

Отсюда следует, что $M \in \mathfrak{M}_0(f, B)$ для каждого множества $B \in \sigma_A$, замыкание которого не содержит точку x.

Пусть $\{K_n\} \subset \sigma_A$, $\{K_n\} \in \eta_x$ и пусть $x \notin \bar{K}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, Тогда существуют такие натуральные числа k_n, что $k_n < k_{n+1}$ и $K_n \cap U_{k_n} = \emptyset$. Если мы положим $K_n^1 = A - U_{k_n}$ и $K_n^2 = K_n^1 - K_n = A - (K_n \cup U_{k_n})$, то $K_n^1 = K_n \cup K_n^2$, $K_n \cap K_n^2 = \emptyset$, $n = 1, 2, \ldots$, и, в силу $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_4$, также $\{U_{k_n}\} \in \eta_x$ и $\{K_n \cup U_{k_n}\} \in \eta_x$. Следовательно, из 43 вытекает

$$\liminf M(K_n) \geqq \lim I(f, K_n) = \lim I(f, K_n^1) - \lim I(f, K_n^2) = c - c = 0\,.$$

Пусть $\{K_n\} \subset \sigma_A$, $\{K_n\} \in \eta_x$ произвольна. Выберем $\varDelta > 0$ и найдем такие натуральные числа p_n, что $p_n < p_{n+1}$ и $|\sum_{k=p_n+1}^{\infty} M_k(K_n)| < \varDelta$. Если мы положим $L_n = K_n - U_{p_n}$, то $x \notin \bar{L}_n$ и $\{L_n\} \in \eta_x$ (см. $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_4$). Из предыдущего вытекает

$$\liminf M(K_n) \geqq \liminf M(L_n) + \liminf M(K_n \cap U_{p_n}) \geqq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} M_k(K_n \cap U_{p_n}) =$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \Big[\sum_{k=1}^{p_n} R_k(K_n \cap U_{p_n} \cap A_k) + \sum_{k=p_n+1}^{\infty} R_k(K_n \cap U_{p_n} \cap A_k)\Big] =$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=p_n+1}^{\infty} R_k(K_n \cap A_k) = \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=p_n+1}^{\infty} M_k(K_n) > -\varDelta\,.$$

Ввиду произвольности $\varDelta$ опять $\liminf M(K_n) \geqq 0$.

Итак, ${}_0M(x, A) \geqq 0$ и, следовательно, $M \in \mathfrak{M}_0(f, A)$. Подобно докажется, что $m \in \mathfrak{M}_0(-f, A)$. В силу 37, 43 и следствия теоремы 46 мы получим

$$0 \leqq I_I(f, A) + I_I(-f, A) \leqq M(\bar{A}) + m(\bar{A}) = \sum_{k=1}^{\infty} [M_k(\bar{A}) + m_k(\bar{A})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [R_k(A_k) + r_k(A_k)] < 2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^{k+1} = \varepsilon\,.$$

Из произвольности ε вытекает, что $f \in \mathfrak{P}(A)$. Равенство $I(f, A) = c$ теперь следует из примечания в абзаце 49.

54. Теорема. *Пусть $A \in \sigma$, $A \neq \emptyset$ и $h \in \mathfrak{F}(A)$, $h \geqq 0$. Пусть, далее, существует такая функция $H \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$, что*

$$H \in \mathfrak{M}_0(h, A) \quad \text{и} \quad -H \in \mathfrak{M}_0(-h, A)\,.$$

Тогда H – конечная неотрицательная аддитивная функция, удовлетворяющая на σ_A требованиям α), β) абзаца 33. Если $f \in \mathfrak{P}(H, A)$, то $fh \in \mathfrak{P}(G, A)$ и

$$I(H, f, A) = I(G, fh, A)\,.$$

Доказательство. В силу следствия абзаца 43 имеем $H = I(h)$. Итак, первое утверждение теоремы вытекает из 35, 38, 46 и 49. Сравнительно просто можно показать, что $\mathfrak{M}(H, f, A) \subset \mathfrak{M}_0(fh, A)$. Следовательно, $I(H, f, A) \geqq$ $\geqq I_I(G, fh, A)$. Применяя только что доказанное для функции $-f$, мы получим

$$I(H, f, A) = -I(H, -f, A) \leqq -I_I(G, -fh, A) \leqq I_I(G, fh, A) \leqq I(H, f, A)\,,$$

что и требовалось показать.

55. Определение. Пусть A, $A_1 \in \sigma$. Взаимно однозначное отображение φ множества $\bar{A}$ на множество $\bar{A}_1$ называется *допустимым*, если

α) $$B \in \sigma_A \Leftrightarrow \varphi(B) \in \sigma_{A_1}\,,$$

β) $$[\{B_n\} \subset \sigma_A, x \in \bar{A}, \{B_n\} \in \eta_x] \Leftrightarrow [\{\varphi(B_n)\} \subset \sigma_{A_1}, \varphi(x) \in \bar{A}_1, \{\varphi(B_n)\} \in \eta_{\varphi(x)}]\,.$$

Примечание. Если отображение φ допустимо, то допустимо также обратное отображение φ^{-1}. Для допустимого отображения φ далее выполняется:

$$[\{B_n\} \subset \sigma_A, x \in \bar{A}, B_n \to x] \Leftrightarrow [\{\varphi(B_n)\} \subset \sigma_{A_2}, \varphi(x) \in \bar{A}_1, \varphi(B_n) \to \varphi(x)]\,.$$

56. Теорема. *Пусть $A, A_1 \in \sigma$. Допустимое отображение φ множества $\bar{A}$ на множество $\bar{A}_1$ гомеоморфно.*

Доказательство. В силу примечания к определению допустимого отображения достаточно доказатъ, что отображение φ непрерывно. Пусть $x \in \bar{A}$ и пусть V – окрестность точки $\varphi(x)$. Из $\mathscr{E}_6$ и $\mathscr{E}_2$ вытекает, что найдется последовательность $\{U_n\} \subset \sigma$ окрестностей точки x, для которой $\{U_n \cap \bar{A}\} \in \eta_x$. Следовательно, $\{\varphi(U_n \cap \bar{A})\} \in \eta_{\varphi(x)}$. Итак, в силу $\mathscr{E}_5$, существует такое n_0, что $\varphi(U_{n_0} \cap \bar{A}) \subset V$. Это, однако,требовалось.

Примечание. Пусть A, $A_1 \in \sigma$ и пусть выполнены требования абзаца 12. Тогда допустимо всякое гомеоморфное отовражение φ множества $\bar{A}$ на множество $\bar{A}_1$, для которого

$$B \in \sigma_A \Leftrightarrow \varphi(B) \in \sigma_{A_1}\,.$$

57. Обозначение. Пусть A, $A_1 \in \sigma$ и пусть φ допустимое отображение множества $\bar{A}$ на множество $\bar{A}_1$. Если $f \in \mathfrak{F}(\bar{A}_1)$, то мы обозначим через $f * \varphi$ функцию из $\mathfrak{F}(\bar{A})$,определенную соотношением

$$f * \varphi(x) = f(\varphi(x))$$

для всех $x \in \bar{A}$. Аналогично, если $H \in \mathfrak{F}(\sigma_{A_1})$, то мы обозначим через $H * \varphi$ функцию из $\mathfrak{F}(\sigma_A)$, определенную соотношением

$$H * \varphi(B) = H(\varphi(B))$$

для всех $B \in \sigma_A$.

Примечание. Очевидно, $(f * \varphi) * \varphi^{-1} = f$ и $(H * \varphi) * \varphi^{-1} = H$.

58. Теорема. *Пусть $A, A_1 \in \sigma$ и пусть φ — допустимое отображение множества $\bar{A}$ на множество $\bar{A}_1$. Тогда $G * \varphi \in \mathfrak{F}(\sigma_A)$ — конечная неотрицательная аддитивная функция удовлетворяющая требованиям* α), β) *абзаца* 33, *и*

$$I_I(G, f, A_1) = I_I(G * \varphi, f * \varphi, A)$$

для каждой функции $f \in \mathfrak{F}(\bar{A}_1)$.

Доказательство. Если $A = \emptyset$, то все тривиально. Пусть $A \neq \emptyset$. Первое утверждение теоремы очевидно. Выберем $M \in \mathfrak{M}(G, f, A_1)$. Сравнительно просто покажется, что $M * \varphi \in \mathfrak{M}(G * \varphi, f * \varphi, A)$. Следовательно,

$$M(\bar{A}_1) = M(\varphi(\bar{A})) = M * \varphi(\bar{A}) \geqq I_I(G * \varphi, f * \varphi, A)\,.$$

Ввиду произвольности мажоранты M имеем $I_I(G, f, \bar{A}_1) \geqq I_I(G * \varphi, f * \varphi, \bar{A})$. Применяя только что доказанное неравенство для отображения φ^{-1}, мы получим

$$I_I(G * \varphi, f * \varphi, \bar{A}) \geqq I_I(G * \varphi * \varphi^{-1}, f * \varphi * \varphi^{-1}, \bar{A}_1) = I_I(G, f, \bar{A}_1)$$

Теперь достаточно использовать следствие теоремы 46.

Следствие. Пусть выполнены предположения предыдущей теоремы. Тогда

$$I(G, f, A_1) = I(G * \varphi, f * \varphi, A)$$

для каждой функции $f \in \mathfrak{F}(\bar{A}_1)$, для которой существует хотя бы один из интегралов.

59. Соглашение. Пусть p — целое число, $p \geqq 2$. Выберем определенное целое число i, $1 \leqq i \leqq p$, и каждому $x \in P$ поставим в соответствие множество η^i_x, введенное в 7. Для системы множеств η^i_x, $x \in P$, определим способом, описанным в абзацах 8, 29 — 32 предел, производную, мажоранту и интеграл. Ради различения мы будем пользоваться символами ${}_0F^i$, κ^i, ${}_*F^i$, $\mathfrak{M}^i$, I^i, $\mathfrak{P}^i$ и т. д., $i = 1, 2, \ldots, p$, значение которых несомненно.

60. Теорема. *Каждой точке $x \in P$ поставим в соответствие два множества η_x^i, $i = 1, 2$. Пусть для множеств η_x^i выполнены требования $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_8$; множества η_x^2 произвольны. Пусть $\eta_x^1 \subset \eta_x^2$ для всех $x \in P$. Тогда требования $\mathscr{E}_6$ и $\mathscr{E}_8$ выполнены также для множеств η_x^2, и если $A \in \sigma$ и $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$, то $I_I^2(f, A) \geqq I_I^2(f, A)$. Итак, если $A \in \sigma$, то $\mathfrak{P}^2(A) \subset \mathfrak{P}^1(A)$ и $I^2(f, A) = I^1(f, A)$ для каждой функции $f \in \mathfrak{P}^2(A)$.*

Доказательство подобно доказательству теоремы в [7], 31.

Примечание. Формулировка предыдущей теоремы корректна благодаря примечанию в абзаце 32.

(*Продолжение*)