Recense

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 2, 236--246

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108445

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

RECENSE

Inž. *Jiří Dvořák, Alois Švec*, CSc: TECHNICKÉ KŘIVKY. Polytechnická knižnice, 26. svazek II. řady — Příručky, SNTL, Praha 1962, stran 229, obrázků 181, první vydání, cena brož. výt. Kčs 8,—.

V knížce jsou popsány základní vlastnosti a konstrukce rovinných křivek, s jejichž aplikacemi se setkáváme v různých technických oborech, zejména pak ve strojní praxi v teorii různých mechanizmů. Z počátku, pro stručnou celkovou informaci lze říci, že v knížce na uvedené základy geometrie rovinných křivek navazuje rozbor některých významných speciálních křivek rovinných i prostorových, pak následuje vyšetřování těžiště, základy grafických metod a úvod do kinematické geometrie.

Publikace je určena konstruktérům, absolventům dvanáctiletých a průmyslových škol, studujícím při zaměstnání a všem pracujícím v různých technických oborech. Knížku lze však doporučit jako užitečnou učební pomůcku všem studujícím vysokých škol konstruktivně-technického směru.

Rozsáhlá tematika technických křivek je v knize rozdělena do tří částí.

První část s kapitolami 1 až 3 (Základy geometrie rovinných křivek, některé významné křivky, vyšetřování těžiště) obsahuje analytické metody vyšetřování křivek. V této části jsou také uvedeny důležité rovinné křivky, vyskytující se často v technické praxi. Výklad začíná základy analytické geometrie v rovině, pak jsou stručně probrány funkce goniometrické, cyklometrické, exponenciální a logaritmické a základy diferenciálního a integrálního počtu, ovšem pouze v tom rozsahu, který je potřebný pro další vyšetřování vlastností křivek. Autoři se snažili o to, aby výklad byl stručný a jednoduchý, aby mu rozumněl čtenář s maturitou. Závěrem první části jsou ve třetí kapitole uvedeny aplikace analytické geometrie při vyšetřování vlastností křivek. Pojednává se tu o určování těžiště, stanovení délky křivky, plochy obrazce omezeného křivkou a statických momentů. Tato kapitola je poněkud náročnější na znalosti matematiky alespoň v rozsahu dříve v knížce uvedeném.

Druhá část, již tvoří kapitola 4 (grafické metody), pojednává o technických křivkách jako grafech nějakých matematických nebo empirických závislostí. Jsou tam proto probrány metody potřebné při grafickém vyšetřování. Nejdříve jsou uvedeny zobrazovací rovnice, zprostředkující spolehlivost čtení i vyznačení funkčních hodnot, dále je uvedena grafická derivace a integrace. Tato část je podána poměrně podrobněji a čtenář může věci dobře porozumět jen při pečlivém studiu uvedeného textu.

Třetí část, nejrozsáhlejší, obsahující poslední kapitolu 5 (Základy kinematické geometrie) je věnována obsáhlé skupině křivek, které mají určitý výtvarný zákon, které tedy vznikají jako dráhy bodů při rovinném pohybu tělesa nebo soustavy těles; jak již bylo řečeno, jsou zde uvedeny poměrně podrobně základy kinematické geometrie tělesa a soustavy těles tak, aby čtenář získal nejen spolehlivé základní znalosti této důležité geometrické a konstruktivní disciplíny, pomocí jejíhož aparátu lze zvládnout mnoho vlastností snad všech křivek technické praxe, ale i názor na nové možnosti použití. V závěru této části jsou uvedeny příklady na použití kinematické geometrie, pojednává se o některých mechanizmech, zejména přímovodech a o základech geometrie ozubených kol. Tato poslední část má za úkol hlavně to, aby čtenář porozumněl základům geometrie evolventního nekorigovaného ozubení a současně se naučil ozubení kreslit.

Je nutno bohužel konstatovat, že autoři knížky byli pravděpodobně v časové tísni, neboť na mnohých místech lze pozorovat charakteristické známky chvatu. Mnoho drobných závad, které se najdou při podrobnějším čtení, bylo možno odstranit při pečlivější korektuře. Odvolávání na pojmy již dříve uvedené by měla být provedena přesněji, neboť při studiu, zejména začátečníkovi, dá dosti práce najít podrobnější údaje o pojmu již dříve v textu uvedeném bez podrobnějšího určení. Vím ze zkušenosti, že i takové drobnosti umí čtenáře začátečníka odradit. Popis obrázků a příslušný komentář v textu na některých místech nesouhlasí, na některých obrázcích chybí označení bodů, o nichž se v textu hovoří. Někde jsou logické úvahy vedeny příliš rychle (s velkými skoky), takže taková místa jsou pro začátečníka nesrozmitelná. Bylo by dobře pro příští vydání taková místa (je jich ostatně málo) hlouběji promyslit a učinit výklad přístupným i při zachování stručnosti.

V knížce o technických křivkách nelze v žádném případě podceňovat provedení příslušných obrázků. Z toho důvodu bude jistě nutno v příštím vydání některé obrázky udělat znovu. Protože elipsa je křivka kolmo souměrná podle svých os, bude nutno udělat znovu obr. 14 a 20. Totéž platí o obr. 21 a 22, kde elipsy nejsou pěkně provedeny. Ani při skicování hyperboly od ruky si nedovolíme porušit podstatnou vlastnost hyperboly spočívající v tom, že se blíží ke svým asymptotám. Z toho důvodu bude nutno udělat znovu i obr. 17 a 18. Také obr. 27, který neodpovídá textu a obr. 69 a 70, jež jsou chybné, bude nutno předělat. Ve cvičení 2 na str. 62 je chybně uvedena konstrukce středu křivosti řetězovky (správně má být $\overline{S_0M} = \overline{MQ}$). Na str. 71 ve jmenovatelích dvou uvedených zlomků chybí znak odmocniny. Takových nedopatření je ovšem celá řada a bude nutno pro další vydání provést pečlivější korekturu. Na obr. 114 je demonstrováno příliš mnoho pojmů, takže obrázek ztrácí na přehlednosti. Bude užitečnější jeden obrázek nahradit obrázky několika. Obr. 115 vzhledem k textu, k němuž se vztahuje, není názorný. Obr. 122 je vytištěn obráceně. Domnívám se, že by rozsah knížky příliš nevzrostl, kdyby byl rozšířen o dvě stránky s tabulkou derivací některých běžných funkcí připojenou na konci knihy. Je metodicky pochybené spokojit se pouze s tabulkou některých důležitých primitivních funkcí.

Závěrem lze říci asi toto: Přes nedopatření, která v knížce jsou a která se dají snadno odstranit v příštím vydání, je knížka vcelku pěkná jak výběrem látky tak i zpracováním, a vzhledem k problematice, o níž pojednává, velmi užitečná pro všechny, jimž je určena. Lze velmi kladně hodnotit i fakt, že autoři se rozhodli uceleně zpracovat partii, která byla dosud publikována vždy v izolovaných částech v nejrůznějších učebnicích matematiky a geometrie, a tím obohatit naši literaturu o první publikaci tohoto druhu tolik užitečnou pro naše techniky.

Bořivoj Kepr, Praha

А. Г. Курош: ЛЕКЦИИ ПО ОБЩЕЙ АЛГЕБРЕ (A. G. Kuroš: Přednášky o obecné algebře.) Moskva 1962, 396 str., cena Kčs 11,80.

Z předmluvy knihy vyjímám: Okolo r. 1930 shledaly široké vrstvy matematiků, že v algebře, jedné z nejstarších větví matematiky, nastala radikální změna. Ta byla charakterizována hlavně tím, že se algebra stala vědou založenou na teorii množin a byla podávána axiomaticky: hlavním předmětem se stal výklad o algebraických operacích prováděných s prvky množin jinak libovolných. Tato změna byla připravována předcházejícím rozvojem algebry. Začala se projevovat koncem devatenáctého století a uplatňovala se dále v prvních desetiletích století dvacátého. Teprve však vyjití dvojdílné van der Waerdenovy „Moderní algebry" v létech 1930 a 1931 (rus. překl. z let 1934 a 1937) učinilo idey, výsledky a metody této „nové" algebry přístupnými i matematikům-nealgebraikům.

V posledních třech desetiletích pokračoval intenzivní, ba přímo bouřlivý rozvoj algebry, vznikly nové vztahy mezi ní a příbuznými obory; důsledkem toho pak je, že se vzhled moderní algebry, nebo jak budeme říkat, *obecné algebry*, úplně změnil.

Van der Waerdenova algebra však, která je bezesporu znamenitá a pro dějiny matematiky dvacátého století má veliký význam, i v dalších vydáních zůstala v podstatě nezměněna a vzdálila se tak daleko od současného stavu algebry, že sám autor při čtvrtém vydání (1955, 1959) ji nazval prostě algebrou.

V posledních desetiletích pronikají idey a metody obecné algebry i do jiných oborů matematiky, např. do topologie, do funkcionální analýzy. To činí ovládání obecné algebry nutným prvkem seriózní matematické kultury. Proto konal autor na Moskevské universitě častěji speciální přednášky o obecné algebře a na jejich základě byla kniha napsána. Je určena v první řadě nikoliv pro algebraiky, nýbrž pro širší kruh matematiků nejrůznějších oborů, kteří se chtějí seznámit s obecnou algebrou v jejím nynějším stavu. Avšak i algebraik může pro sebe nalézt v knize všelicos užitečného v otázkách vzdálených jeho speciálních zájmů.

Do knihy jsou pojaty formulace některých výsledků, které se v ní ani nedokazují, ani se jich nepoužívá. Jsou odděleny od ostatního textu hvězdičkami. Autor však očekává, že je čtenář nevynechá. Podotýká však výslovně, že vložení těchto doplňujících poznámek nemá snad znamenat, že příslušná místa knihy sahají až k nejnovějším výsledkům dosaženým v posledním čase.

Kniha je zakončena indexem literatury, v němž jsou uvedeny pokud možno všechny spisy jednající o obecné algebře, které až dosud vyšly, dále monografie týkající se různých jejích částí a také některé spisy přehledné.

Podám nyní obsah Kurošovy knihy se stručnými připomínkami.

Kap. I. *Relace*. § 1. Množiny. Podána teorie množin z naivního hlediska. Vytčen pouze axiom výběru. § 2. Binární relace. § 3. Ekvivalence. § 4. Částečné uspořádání. § 5. Podmínka minimálnosti. Dokázáno, že tato podmínka je ekvivalentní s podmínkou konečnosti ubývajících řetězců a s podmínkou induktivnosti. § 6. Věty ekvivalentní s axiomem výběru. Jsou to Věta Zermelova, věta Hausdorffova a věta (lema) Kuratovského-Zornova.

Kap. II. *Grupy a okruhy*. § 1. Grupoidy, pologrupy, grupy. § 2. Okruhy, tělesa nekomutativní (тела), tělesa komutativní (поля). Uvažuje se také o oborech s neasociativním násobením (např. o okruzích Lieových). § 3. Podgrupy, podokruhy. § 4. Izomorfismus. § 5. Vnoření pologrup do grup a okruhů do těles. § 6. Neasociativní tělesa, kvazigrupy. Izotopie. § 7. Normální podgrupy, ideály. § 8. Gaussovy pologrupy. § 9. Gaussovy okruhy. § 10. Dedekindovy okruhy.

Kap. III. *Univerzální algebry. Grupy s multioperátory*, § 1. Univerzální algebry. Homomorfismy. § 2. Grupy s multioperátory. § 3. Automorfismy, endomorfismy. Těleso p-adických čísel. § 4. Normální a kompoziční řady. § 5. Abelovy, nilpotentní a řešitelné Ω-grupy. § 5. Primitivní třídy univerzálních algeber. § 7. Volné univerzální algebry. § 8. Volné součiny grup.

Kap. IV. *Svazy*. § 1. Svazy, úplné svazy. § 2. Modulární (Dedekindovy) svazy. § 3. Direktní sjednocení. Věta Šmidtova-Oreova. § 4. Direktní rozklad Ω-grup. § 5. Úplné direktní součty univerzálních algeber. § 6. Distributivní svazy. Uvažováno také o Booleových algebrách a Booleových okruzích.

Kap. V. *Operátorové grupy a okruhy. Moduly. Lineární algebry*. § 1. Operátorové grupy a okruhy. § 2. Volné moduly. Abelovy grupy. § 3. Vektorové prostory nad tělesy. § 4. Okruhy lineárních zobrazení. § 5. Jednoduché okruhy. Věta Jacobsonova. § 6. Lineární algebry. Algebra kvaternionů a algebra Cayleyova. § 7. Alternativní okruhy. Věta Artinova. § 8. Zobecněná věta Frobeniova. § 9. Věta Birkhoffova-Wittova o Lieových algebrách. § 10. Diferencování. Diferenciální okruhy.

Kap. VI. *Uspořádání, topologické grupy a okruhy. Normované* (ohodnocené) *okruhy*. § 1. Uspořádané grupy. § 2. Uspořádané okruhy. § 3. Archimedovské grupy a okruhy. § 4. Normované okruhy. § 5. Logaritmické normování komutativních těles. § 6. Věta Albertova o normovaných algebrách. § 7. Uzávěr. Topologické prostory. § 8. Zvláštní typy topologických prostorů. § 9. Topologické grupy. § 10. Souvislost topologie a normování v okruzích a tělesech. § 11. Vztahy Galoisovy. Hlavní věta teorie Galoisovy.

*

Aby čtenář (obeznámený již s látkou obsaženou v Algebře prof. VL. KOŘÍNKA) poznal aspoň do jisté míry, jakého druhu úvahami se zabývá obecná algebra (v duchu Kurošově), promluvím šíře o univerzálních algebrách a homomorfismech (kap. III, § 1) a o grupách s multioperátory (kap. III, § 2). V obecné algebře (a v oborech matematiky vybudovaných jejími metodami) se velmi často používá pojmu ekvivalence. Předešlu tedy aspoň stručně obsah paragrafu o ekvivalencích (kap. II, § 3), hlavně za tím účelem, aby se čtenář obeznámil s příslušnou terminologií autorem užívanou.

Kap. I. § 3. *Ekvivalence. Ekvivalence* je binární relace reflexivní, tranzitivní a symetrická.

Rozkladem množiny M budeme rozumět takový výběr systému neprázdných podmnožin této množiny (*tříd* tohoto rozkladu), že každý prvek z M patří právě do jedné z těchto podmnožin. Každý rozklad π množiny M určuje v M ekvivalenci. Je-li totiž $a, b \in M$ a položíme $a \sim b$ právě když a a b patří do téže třídy rozkladu π, dostaneme binární relaci v M, hovící všem podmínkám pro ekvivalenci.

Obráceně platí: *Každá ekvivalence R daná v množině M definuje rozklad této množiny.*

Nazveme *třídou prvku a* a označíme K_a množinu všech těch prvků x z M, pro něž platí aRx. Pak systém všech různých tříd tvaru K_a určuje rozklad množiny M.

Mezi ekvivalencí v množině M a rozkladem množiny M v třídy je vzájemně jednoznačný vztah.

Množinu tříd rozkladu příslušnou k dané ekvivalenci R v množině M označíme M/R a nazveme ji *faktormnožinou* množiny M vzhledem k (pro) ekvivalenci R. Zobrazení množiny M na faktormnožinu M/R, které každému prvku $a \in M$ přiřaďuje tu třídu rozkladu určenou R, v níž leží prvek a, nazývá se *přirozeným zobrazením* M na M/R.

Mezi ekvivalencemi v množině M a zobrazením M na jinou množinu je úzký vztah, který je prototypem tak zvaných „vět o homomorfismech", s nimiž se setkáváme častěji v dalších kapitolách. Speciálně, je-li dáno zobrazení φ množiny M na množinu N, odpovídá mu ekvivalence v množině M (tj. rozklad této množiny): pro prvky $a, b \in M$ položíme aRb, právě když je $a\varphi = b\varphi$. Přiřadíme-li každému prvku $x \in N$ třídu těch prvků z M, které mají x za obraz při zobrazení φ, dostaneme *vzájemně jednoznačné zobrazení ξ množiny N na množinu M/R, při čemž součin $\varphi\xi$ je právě přirozeným zobrazením M na M/R.*

Kap. III. § 1. *Univerzální algebry. Homomorfismy.* 1. Při uvažování o grupách a okruzích se ukazují četné analogie. Je tedy mnohdy účelné nezabývat se odděleně grupami a okruhy, nýbrž sestrojit jedinou teorii, z níž vyplývají výsledky pro grupy a pro okruhy jako prosté důsledky. Hlavně z tohoto důvodu se přikročilo k uvažování o algebraických zobrazováních s libovolným počtem algebraických operací, které ani nemusí být binární.

2. Nechť je dána množina G. Řekneme, že je v G dána n-ární algebraická operace ω (kde n je celé nezáporné číslo), je-li libovolnému uspořádanému systému n prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$ z množiny G přiřaděn jednoznačně určený prvek z téže množiny. Užijeme-li operace ω na uvedený systém prvků, zapíšeme výsledek ve tvaru $a_1 a_2 \ldots a_n\omega$. V některých případech se upouští od podmínky, že n-ární operace ω je definována pro každý uspořádaný systém n prvků; pak nazveme onu operaci *částečnou*. Jednoznačnost se však zpravidla vyžaduje, takže n-ární operace ω není nic jiného než speciální případ $(n + 1)$-ární relace.

Pro $n = 2$ dostáváme již známou binární operaci, pro $n = 3$ dostáváme *ternární* operaci atd. Z druhé strany pro $n = 1$ budeme mluvit o *unární* operaci. Tato operace přiřaďuje každému prvku $a \in G$ jednoznačně určený prvek $a\omega \in G$, tj. je jednoznačným zobrazením množiny G do sebe. Konečně případ $n = 0$, tj. případ *nulární* operace, značí, že v množině G byl vytčen určitý prvek nezávislý na tom, jak jsme určili v G jakýkoliv jiný prvek nebo systém prvků. Tak např., zvolíme-li jednotku v grupě G, určujeme tak ve G nulární operaci; rovněž dostaneme nulární operaci v případě okruhu, zvolíme-li v něm nulu nebo jednotku (ovšem existuje-li v něm jednotka).

3. Množina G se nazývá *univerzální algebrou*, je-li v ní dán systém Ω n-árních algebraických operací, při čemž pro různé operace $\omega \in \Omega$ mohou být čísla n jak různá tak sobě rovná. Tento

systém operací může být i nekonečný. Příkladem univerzální algebry tohoto druhu je např. vektorový prostor nad nekonečným tělesem: zde máme jednu binární operaci, totiž sčítání a nekonečně mnoho unárních operací, totiž násobení prvky základního tělesa.

V předešlé kapitole jsme se setkali s mnoha rozličnými případy univerzálních algeber: s grupoidy, s grupami, s okruhy atd. Poznamenáváme, že grupy můžeme vykládat dvojím způsobem jako univerzální algebry: buď jako množinu s třemi binárními operacemi, totiž násobením a levým a pravým dělením; nebo jako tutéž množinu s jednou binární operací, totiž násobením, s jednou unární operací: utvořením převráceného prvku a s jednou nulární operací: zvolením jednotky.

Poznamenáváme také, že tělesa budeme moci považovat za univerzální algebry pouze v tom případě, že připustíme i částečné algebraické operace. V tělese jsou totiž jak levé tak pravé dělení a utvoření převráceného prvku částečné operace.

4. Nechť je dána univerzální algebra G se systémem operací Ω. Podmnožina $A \subseteq G$ se nazývá *podalgebrou* univerzální algebry G, jestliže pro libovolnou n-ární operaci $\omega \in \Omega$ z $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ plyne $a_1 a_2 \ldots a_n \in A$.

Speciálním případem tohoto pojmu je patrně podgrupoid u grupoidu, podgrupa u grupy, podokruh u okruhu. Poznamenáváme však, že, má-li okruh R jednotku a považujeme-li ho za univerzální algebru, mezi jejímiž operacemi je nulární operace pozůstávající ve zvolení jednotky, mohou být podalgebrami pouze ty podokruhy okruhu R, které obsahují jednotku okruhu R, nikoli však libovolné podokruhy, i když každý z nich obsahuje svou vlastní jednotku.

Jako dříve dokážeme, že *průnik libovolného systému podalgeber univerzální algebry G, není-li průnik ten prázdný, je podalgebrou algebry G.*

Odtud plyne dále: Zvolíme-li v univerzální algebře G libovolnou neprázdnou množinu M, existuje jednoznačně určená podalgebra $\{M\}$, která je minimální mezi podalgebrami obsahujícími vesměs M.

5. O univerzálních algebrách G a G', v nichž jsou dány systémy operací Ω resp. Ω', se říká, že jsou *téhož typu*, je-li možno systémy Ω a Ω' vzájemně jednoznačně na sebe zobrazit tak, že libovolná operace $\omega \in \Omega$ a jí odpovídající operace $\omega' \in \Omega'$ budou n-ární *s týmž n*. Možno tedy předpokládat, že u univerzálních algeber téhož typu je dán *týž* systém operací Ω.

Univerzální algebry G a G' téhož typu s týmž systémem operací Ω se nazývají *izomorfní*, existuje-li takové vzájemně jednoznačné zobrazení algebry G na algebru G', že pro libovolnou n-ární operaci $\omega \in \Omega$ a pro libovolné prvky $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ platí

$$(a_1 a_2 \ldots a_n \omega)\,\varphi = (a_1\varphi)\,(a_2\varphi) \ldots (a_n\varphi)\,\omega\,. \tag{1}$$

Izomorfismus univerzálních algeber má právě týž význam, jako měl u grup, okruhů a částečně uspořádaných množin.

Uvedeme nyní zobecnění izomorfismu univerzálních algeber, totiž homomorfismus, což je velmi důležitý pojem ve všech dalších úvahách. Zůstává-li v platnosti podmínka (1), φ je však jednoznačné (ne však nutně vzájemně jednoznačné) zobrazení algebry G do algebry G', docházíme k pojmu *homomorfního zobrazení* jedné univerzální algebry do druhé, která je s ní téhož typu.

Z definice homomorfismu plyne okamžitě, že součin homomorfismů je opět homomorfismus.

Z (1) plyne také, že je-li $G\varphi$ obrazem algebry G při homomorfním zobrazení φ do algebry G', *$G\varphi$ bude podalgebrou algebry G'.*

Je-li $G\varphi = G'$, budeme mluvit *o homomorfním zobrazení na G'* a nazveme G' *homomorfním obrazem algebry G.*

6. Užijeme pojmu homomorfismu na případ grupoidů a okruhů. Je patrné, že v případě binárního násobení rovnost (1) přejde v rovnost

$$(ab)\,\varphi = a\varphi\,.\,b\varphi \tag{2}$$

a že univerzální algebra téhož typu jako grupoid je opět grupoidem. Lehko se zjistí, tak jako v případě isomorfismu (viz II, 4.1), že při homomorfním zobrazení grupoidu G na grupoid G' zůstávají zachovány vlastnosti operací daných v G, jako komutativnost a asociativnost.

Nechť je φ homomorfní zobrazení grupoidu G na grupoid G'. Je-li v G jednotka e, bude $e\varphi$ jednotkou v G'. Je-li nadto prvek $b \in G$ jedním z (pravých) inverzních prvků pro $a \in G$, bude $b\varphi$ jedním z (pravých) inverzních prvků pro $a\varphi$. Konečně platí, že *homomorfním obrazem pologrupy nebo grupy je pologrupa resp. grupa.*

Všimneme si nyní homomorfního zobrazení φ okruhu R na univerzální algebru R' téhož typu. Z toho co jsme svrchu dokázali, plyne, že R' bude Abelovou grupou pro sčítání a grupoidem pro násobení. Dá se dokázat, že *homomorfním obrazem okruhu bude opět okruh.* Z předešlého plyne, že při homomorfismu okruhů nula přejde v nulu a že homomorfním obrazem asociativního nebo komutativního okruhu bude okruh s touž vlastností.

7. Je více způsobů, jak získat přehled přes všechna homomorfní zobrazení dané univerzální a gebry G. Napřed však zavedeme některé nové pojmy.

Uvažujme univerzální algebru G se systémem operací Ω. Ekvivalence π daná v G se nazývá *kongruencí v G*, jestliže pro libovolnou operaci $\omega \in \Omega$ a libovolné prvky $a_i, a'_i \in G$, $i = 1, 2, \ldots, n$, z $a_i \pi a'_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ plyne $(a_1 a_2 \ldots a_n \omega) \pi (a'_1 a'_2 \ldots a'_n \omega)$.

Jinými slovy, zvolíme-li libovolné třídy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ rozkladu určené ekvivalencí π, pak třída B obsahující prvek $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$, kde $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, nezávisí na výběru prvků a_i v jejich třídách A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. To umožní definovat n-ární operaci ω ve faktor-množině G/π (viz kap. I, § 3), tím že položíme

$$A_1 A_2 \ldots A_n = B\,. \tag{3}$$

A je tomu tak pro všechny operace $\omega \in \Omega$, takže G/π přechází v univerzální algebru s týmž systémem operací Ω jako měla výchozí algebra G. Tato algebra G/π se nazývá *faktoralgebrou* univerzální algebry G vzhledem ke kongruenci π.

Definice (3) operací ve faktoralgebře G/π a definice homomorfismu (1) ukazují, že přirozené zobrazení algebry G na faktoralgebru G/π bude homomorfismem, který se nazývá *přirozeným homomorfismem G* na G/π.

Z existence přirozeného homomorfismu G na G/π a z toho, co bylo řečeno v předešlém odstavci, vyplývá, že *faktoralgebry grupoidů, grup, okruhů budou po řadě opět grupoidy, grupami, okruhy.* Možno tedy mluvit o *faktorgrupoidu, faktorgrupě, faktorokruhu G/π* po řadě pro grupoid, grupu, okruh G vzhledem ke kongruenci π.

8. Z předešlého odstavce lze odvodit větu o homomorfismech, která poskytuje přehled všech homomorfních zobrazení univerzálních algeber.

Je-li G univerzální algebra se systémem operací Ω a φ její homomorfní zobrazení na univerzální algebru G' téhož typu jako G, $G\varphi = G'$, existuje v G taková kongruence π, že algebra G' je izomorfní s faktoralgebrou G/π. Nadto existuje takové izomorfní zobrazení ψ algebry G' na faktoralgebru G/π, že součin $\varphi\psi$ je totožný s přirozeným homomorfismem G na G/π.

Kap. III. § 2. *Grupy s multioperátory.* 1. Jak uvidíme v dalším, existuje velmi těsný vztah mezi kongruencemi a tudíž i homomorfismy grup a okruhů z jedné strany a normálními podgrupami grup a ideály okruhů ze strany druhé. Tento vztah nemůže být rozšířen na případ libovolných univerzálních algeber, speciálně na případ grupoidů nebo pologrup. Bude však v platnosti pro speciální třídu univerzálních algeber, kterou zavedl nedávno P. J. HIGGINS (Proc. London Math. Soc. 6, 1956, 366–416).

Nechť je dána grupa G. Tato grupa nemusí být komutativní, bude však výhodné užívat pro ni aditivního zápisu. Speciálně budeme její nulový element značit symbolem 0. Grupa G se bude nazývat *grupou se systémem multioperátorů Ω*, nebo krátce *Ω-grupou*, je-li v G dán mimo sčítání ještě systém n-árních algebraických operací Ω (pro n hovící podmínce $n \geqq 1$), přičemž pro všechna $\omega \in \Omega$ jsou splněny podmínky

$$00 \ldots 0\omega = 0 \tag{1}$$

a kde na levé straně stojí prvek 0 n-krát, je-li operace ω n-ární.

Je patrné, že při prázdném systému operací Ω přejde Ω-grupa v grupu. Na druhé straně dostaneme z Ω-grupy okruh, je-li *aditivní grupa* oné Ω-grupy — jak nazveme grupu pro sčítání — komutativní a skládá-li se systém operací Ω z binárního násobení spojeného se sčítáním zákony distributivními; jak známo plyne z toho vztah (1). Zavedení Ω-grup má pak ten význam, že je tak umožněno jednotně vybudovat teorii grup a teorii okruhů a to dosti daleko.

2. Ω-grupu G možno považovat za univerzální algebru vzhledem k operacím aditivní grupy i k operacím z Ω. Každá podalgebra této algebry bude podgrupou aditivní grupy a tudíž bude obsahovat 0, vztah (1) bude i nadále splněn a tudíž ona podalgebra bude Ω-grupou. Nebudeme tedy mluvit o podalgebrách, ale o *Ω-podalgebrách* Ω-grupy G.

Odtud — vzhledem k III, 1.4 — plyne, že *průnik libovolného systému Ω-podgrup Ω-grupy G bude opět Ω-podgrupou a obsahuje speciálně prvek* 0. *Na druhé straně bude Ω-podalgebrou také podalgebra* $\{M\}$ vytvořená neprázdnou podmnožinou M Ω-grupy G.

Poznamenáváme, že vzhledem k (1), nulová podgrupa aditivní grupy bude Ω-podgrupou.

3. Homomorfní obraz Ω-grupy bude opět Ω-grupou. Speciálně *faktoralgebry Ω-grup* (viz III, 1.7) *jsou opět Ω-grupami*. Možno tudíž mluvit o Ω-faktorgrupě G/π Ω-grupy G vzhledem ke kongruenci π.

4. Neprázdná podmnožina A Ω-grupy G se nazývá *ideálem v* G, jsou-li splněny tyto dvě podmínky:

1) A je normální podgrupou aditivní grupy;

2) pro každou n-ární operaci $\omega \in \Omega$ libovolného prvku $a \in A$ a libovolné prvky $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ platí pro $i = 1, 2, \dots, n$:

$$-(x_1x_2 \dots x_n\omega) + x_1x_2 \dots x_{i-1}(a + x_i)\, x_{i+1} \dots x_n\omega \in A\,. \tag{2}$$

Pro grupy se ztotožňuje právě definovaný pojem ideálu s pojmem normální podgrupy.

Pro okruhy se tento nový pojem ideálu ztotožňuje s pojmem (dvoustranného) ideálu (zavedeného v II, 7.8).

Platí věta: *Každý ideál Ω-grupy G je její Ω-podgrupou.*

Je patrné, že ideálem Ω-grupy G bude speciálně G samo a nulová podgrupa 0. Nemá-li G jiné ideály nazývá se G prostou ω-grupou.

Bez námahy se zjistí, že *průnik libovolného systému ideálů Ω-grupy G je opět ideálem* a možno tudíž mluvit o ideálu *vytvořeném* libovolným systémem prvků M. Poznamenáváme, že *ideál vytvořený systémem ideálů A_i, $i \in I$, Ω-grupy G se ztotožňuje s podgrupou B aditivní grupy vytvořenou těmito ideály.*

Ideál $B = \{A, i \in I\}$ se nazývá součtem ideálů A_i, $i \in I$.

5. Dokážeme nyní větu objasňující úlohu, kterou má pojem ideálu v teorii Ω-grup. Poznamenáváme, že mluvíme-li *o rozkladu Ω-grupy G podle ideálu A*, budeme tím rozumět rozklad aditivní grupy této Ω-grupy podle A jako normální podgrupy.

Všechny kongruence libovolné Ω-grupy G jsou vyčerpány jejími rozklady podle různých ideálů.

6. Na základě této věty nebudeme v dalším mluvit o Ω-faktorgrupě G/π Ω-grupy G podle kongruence π, nýbrž o *Ω-faktorgrupě vzhledem k ideálu A* a označíme ji G/A. Ideál A bude patrně nulou této Ω-faktorgrupy.

Užijeme-li toho, co bylo řečeno, na případ grup, dostáváme, že *všechny kongruence v grupě G jsou vyčerpány jejími rozklady vzhledem k různým normálním podgrupám.* Možno tudíž mluvit o faktorgrupě grupy G *vzhledem k normální podgrupě A* a označit ji G/A.

Z druhé strany *všechny kongruence okruhu R jsou vyčerpány jeho rozklady vzhledem k různým (oboustranným) ideálům* a budeme tedy mluvit o *faktorokruhu okruhu R vzhledem k ideálu A*, který označíme R/A.

Z věty svrchu dokázané plyne ještě další poznámka. Je-li φ homomorfní zobrazení Ω-grupy G na Ω-grupu G', nazveme *jádrem* homomorfismu φ souhrn těch prvků z G, které se při φ zobrazují na nulu Ω-grupy G'. Z věty III, 2.5 a z věty o homomorfismech III, 1.8 plyne:

Jádry homomorfismů Ω-grupy jsou její ideály a pouze tyto. Homomorfní obraz Ω-grupy je určen až na izomorfismy jádrem uvažovaného homomorfismu.

Karel Rychlík, Praha

Stefan Bergman: INTEGRAL OPERATORS IN THE THEORY OF LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Heft 23.) Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961, str. 146, obr. 8, cena DM 39,60.

Tato kniha je určena matematikům-specialistům v teorii diferenciálních rovnic nebo v teorii funkcí komplexní proměnné. Předpokládá značné předběžné znalosti; nelze ji proto doporučit začátečníkovi, je však vhodná pro aspiranty a vědecké pracovníky.

Je dobře známo, že mezi harmonickými funkcemi dvou reálných proměnných a holomorfními funkcemi jedné komplexní proměnné existuje vzájemné přiřazení, které umožňuje vybudování ucelené teorie harmonických funkcí na základě teorie funkcí; přenesení výsledků z teorie funkcí na základě teorie funkcí; přenesení výsledků z teorie funkcí na harmonické funkce užitím operátoru **Re** bývá často velmi snadné. Skutečnost, že každá harmonická funkce (v jednoduše souvislé oblasti) je reálnou částí funkce holomorfní, umožňuje hluboké a systematické studium harmonických funkcí. Vzniká proto přirozeně otázka, zda lze užít podobným způsobem teorie funkcí k studiu diferenciálních rovnic značně obecnějších, než je rovnice Laplaceova. Ukazuje se, že tomu tak je, že existuje celá řada operátorů, které jsou v jistém smyslu zobecněním operátoru **Re**, tj. že převádějí analytické funkce v řešení některých typů lineárních rovnic s analytickými koeficienty a že mnohé z nich lze použít k hlubšímu studiu těchto rovnic. Této problematice je věnována recenzovaná kniha.

Protože tématika knihy je velmi speciální, lze obsah knihy naznačit jen velmi stručně: Kapitola první je věnována teorii lineárních diferenciálních rovnic se dvěma nezávisle proměnnými, jejichž koeficienty jsou celistvé funkce. V kapitole druhé je užito integrálních operátorů ke studiu harmonických funkcí tří proměnných a singularit těchto funkcí, kapitola třetí je věnována témuž tématu, ale pro obecnější rovnice. Kapitola čtvrtá pojednává o systémech diferenciálních rovnic; převážnou část této kapitoly zabírá studium harmonických vektorů, tj. vektorů H, které splňují rovnice div $H = 0$ a curl $H = 0$. (Na tyto rovnice lze pohlížet jako na zobecnění Cauchy-Riemannových podmínek.) V kapitole páté jsou studovány rovnice smíšeného typu, především rovnice $u_{xx} + l(x)\, u_{xx} = 0$, kde funkce $l(x)$ je kladná resp. záporná pro záporná resp. kladná x.

Jak je již tradicí knižnice Ergebnisse, přináší tato kniha v uceleném a utříděném podání řadu vlastních autorových výsledků dosažených v posledních letech, a pro specialistu, kterému je určena, je nesmírně důležitá.

Rudolf Výborný, Praha

J. Favard: COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, tome III: *Théorie des équations*, fascicule II: *Équations aux dérivées partielles. Équations intégrales. Calcul des variations.* Cahiers scientifiques, fascicule XXVI, Gauthier-Villars, Paris 1963, 542 stran, 15 obrázků, cena brož. 100 NF.

Kniha je dalším svazkem obsáhlé učebnice matematiky na pařížské polytechnice. Je bezprostředním pokračováním svazku o obyčejných diferenciálních rovnicích (tome III, fascicule I, 1962), který má pět kapitol a byl recenzován ve čtvrtém čísle Časopisu pro pěstování matematiky *88* (1963). Začíná tedy kapitolou šestou. Kapitoly 6—11 obsahují parciální diferenciální rovnice, kapitola 12 integrální rovnice a kapitola 13 variační počet.

Šestá kapitola knihy se zabývá parciálními rovnicemi prvního řádu pro jednu neznámou funkci. Autor uvádí základní pojmy, pojednává o Cauchyho úloze, o její geometrické interpretaci a o metodách jejího řešení (Lagrangeově a Charpitově, Lieově atd.) a dále o Pfaffových systémech.

Sedmá kapitola obsahuje otázky, týkající se systémů rovnic prvního řádu pro několik neznámých funkcí, otázky existence (větu Cauchyho-Kovalevské apod.), jednoznačnosti a stability řešení, a dále pojem zobecněných řešení (v některých běžných smyslech).

Kapitoly 8—11 jsou věnovány lineárním rovnicím druhého řádu, a to především vlnové rovnici, Laplaceově rovnici a rovnici pro vedení tepla. Po výkladu obecných vlastností lineárních rovnic druhého řádu (kapitola 8) přistupuje autor k hyperbolickým rovnicím (kapitola 9). Mimo vlnovou rovnici uvažuje některé jiné rovnice hyperbolického typu z matematické fyziky, uvádí Riemannovu metodu řešení, Laplaceovu transformaci, separaci proměnných (Fourierovu metodu) a metodu sítí. V kapitole 10 o eliptických rovnicích se autor zabývá v prvé řadě klasickými problémy Laplaceovy a Poissonovy rovnice (vlastnostmi harmonických funkcí, Greenovou funkcí, teorií potenciálu atd.), dále pak rovnicemi s proměnnými koeficienty. Uvádí dále metodu sítí pro řešení Dirichletova problému. Také kapitola 11 o parabolických rovnicích obsahuje převážně klasické problémy pro rovnici pro vedení tepla (věta o maximu, tepelné potenciály, Poissonův integrál atd.). V závěru ukazuje autor důkaz existence řešení pomocí tzv. subkalorických funkcí.

Kapitola 12 obsahuje v podstatě tradiční látku z teorie integrálních rovnic (Fredholmovy rovnice, Volterrovy rovnice, rovnice se symetrickým jádrem, singulární rovnice, aplikace na diferenciální rovnice). Způsob zpracování je poměrně moderní a používá vlastností totálně spojitých operátorů.

Kapitola 13 je věnována variačnímu počtu (slabé a silné extrémy, Eulerova rovnice, extrémály atd.). Také tato partie používá některých modernějších metod.

Učebnice je psána, uvědomíme-li si, že nejde o univerzitní učebnici, na značně vysoké úrovni. Jednoduchých ilustrativních příkladů je v knize velmi málo, příklady v textu jsou poměrně náročné. Ke každé kapitole je připojen odstavec obsahující příklady (v podstatě teoretického charakteru, zpravidla s návodem k řešení) a doplňky, uvádějící některá zobecnění a prohloubení probírané látky.

Z nedostatků knihy bych vytkl toto: V partii o úplném integrálu není zcela jasná operace vylučování parametrů (což je ovšem všeobecně známá potíž). V partii o řešení rovnic metodou sítí by bylo vhodné upozornit na nebezpečí volby velkého „časového" kroku. Zejména však více pozornosti by bylo třeba věnovat lineárním rovnicím s proměnnými koeficienty a rovnicím vyšších řádů (biharmonické apod.).

V celku jde o knihu poměrně vysoké úrovně, které nelze vytknout podstatnějších nedostatků.

Karel Rektorys, Praha

Tom M. Apostol: CALCULUS, Volume II, New York 1962, str. 525.

Druhý diel knihy Tom M. Apostol, Calculus obsahuje devät kapitol. Prvá kapitola je rozdelená na dve časti. V prvej časti sú základné *operácie s množinami*. Je tam zavedený pojem algebry množín, konečno aditívne funkcie množín a Booleove algebry. Druhá časť obsahuje *elementárny počet pravdepodobnosti*. Po historickom úvode sú uvedené niektoré princípy kombinatorickej analýzy. Potom nasledujú pojmy spočetnej a nespočetnej množiny. Ďalej je definícia pravdepodobnosti ako množinovej funkcie, za tým definícia podmienenej pravdepodobnosti a nezávislosti javov. Potom sa autor zaoberá zloženými pokusmi a špeciálne Bernouilliho.

Druhá kapitola obsahuje *množné integrály*. Z nich sa preberajú podrobnejšie dvojné integrály a na konci kapitoly sa rozširujú úvahy na trojné integrály. Po úvodnom článku zaoberá sa autor objemom ako množinovou funkciou. Pojem dvojného integrálu na uzavretom intervale definuje sa podobne, ako integrál na uzavretom intervale na číselnej osi, pomocou funkcií skokov. Potom nasleduje výpočet dvojných integrálov pomocou Fubiniho vety. V nasledujúcom článku definujú sa po čiastkach monotónne funkcie a dokazuje sa, že pre ne existuje dvojný integrál a tento sa dá počítať pomocou iterovaných integrálov. V tejto kapitole je vložený článok o spojitosti funkcie dvoch premenných. Za tým nasleduje rozšírenie definície dvojného integrálu na všeobecnejšie obory integrácie, aplikácie dvojného integrálu a veta o transformácii dvojného integrálu a jej použitie pri špeciálnych transformáciach.

Tretia kapitola obsahuje *počet pravdepodobnosti.* Po úvodnom článku nasleduje článok o náhodných premenných. Ďalšie články sú venované distribučným funkciám, špeciálne diskrétnym a spojitým distribučným funkciám a všeobecnejším distribučným funkciám. Pritom sa autor neobmedzuje len na prípad jednorozmernej náhodnej premennej, ale preberajú sa aj prípady pre dvojrozmerné náhodné premenné. Na konci kapitoly sú články o strednej hodnote a disperzii, o Čebyševovej nerovnosti, o zákone veľkých čísel a o centrálnej limitnej vete počtu pravdepodobnosti.

Štvrtá kapitola je venovaná diferenciálnemu počtu *skalárnych polí.* Na začiatku sú články o skalárnom poli, o okoliach bodu a o otvorených množinách, o derivácii skalárneho poľa vzhľadom na vektor, o vetách o strednej hodnote pre skalárne polia a o vlastnostiach derivácie skalárneho poľa vzhľadom na vektor. Ďalej sa definuje gradient skalárneho poľa a pokračuje sa deriváciou zložených funkcií, čo sa aplikuje na funkcie dané implicitne. Jeden článok je tu venovaný existencii potenciálu z daného gradientu na otvorenom intervale a metóde, ako ten potenciál vyhľadať. Kapitola končí extrémami funkcií viac premenných, Lagrangeovou metódou viazaných extrémov funkcií viac premenných.

Piata kapitola — *krivkové integrály* — začína úvodnými myšlienkami o práci. Za tým sa pokračuje definíciou krivkového integrálu, základnými ich vlastnosťami a ďalšími aplikáciami krivkových integrálov. Nasledujú články o nezávislosti krivkového integrálu od integračnej cesty, o určení potenciálu pomocou krivkového integrálu, o nutnej a postačujúcej podmienke, aby vektorové pole bolo gradientom a o aplikácii toho na exaktnú diferenciálnu rovnicu prvého rádu. V niekoľkých článkoch zaoberá sa autor Greenovou vetou a jej aplikáciami. V tejto kapitole zavádzajú sa pojmy divergencie a rotácie vektorového poľa, ukazuje sa ich fyzikálny význam a kapitola končí článkom o transformácii krivkových integrálov.

Šiesta kapitola, o *plošnom integráli,* je sostavená podobne ako kapitola o krivkových integráloch. Začína sa pojmom plochy a hlavným vektorom plochy a obsahom plochy. Potom nasleduje definícia plošných integrálov, ich transformácia, ich aplikácie a Stokesova a Gaussova veta.

V siedmej kapitole pojednáva sa *o lineárnych diferenciálnych rovniciach.* Po historickom úvode preberajú sa najprv homogenné lin. dif. rovnice, špeciálne s konštantnými koeficientami a potom nehomogenné lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu. Potom nasleduje výklad pre lineárne diferenciálne rovnice n-tého rádu a operátorová metóda pre riešenie lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami. V dvoch článkoch riešia sa Legendreova a Besselova diferenciálna rovnica pomocou nekonečných radov. Táto kapitola má doplňok venovaný komplexným číslam a komplexným funkciám.

Osma kapitola obsahuje *numerickú analýzu.* Začiatok kapitoly vyplňujú otázky aproximácie spojitej funkcie polynómami, pri tom sa vykladá tiež Gram-Schmidtov ortonormalizačný proces. V kapitole sú aj Lagrangeov a Newtonov interpolačný polynóm. Koniec kapitoly je venovaný otázkam približnej integrácie. V rámci toho sa preberajú metódy lichobežníkova, Simpsonova a Eulerova sumačná formula.

Deviata kapitola rieši otázky existencie a jednoznačnosti *riešenia diferenciálnej rovnice prvého rádu* $y' = f(x, y)$, riešenia systému diferenciálnych rovníc a riešenia lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu pri daných počiatočných podmienkach. Posledné dva články pojednávajú o stlačujúcich operátoroch, a vete o pevnom bode a o aplikácii tejto vety.

Kniha je písaná jasne a spôsob zpracovania látky je taký istý, ako bol v prvom diele. Autor často ukazuje na vzájomný súvis rôznych partií. Uveďme ako príklad vetu o transformácii dvojných integrálov. V článku 2.21 ukazuje autor, že veta o transformácii platí, ak tá veta platí pre špeciálny prípad s integrandom rovnajúcim sa identicky 1. Dôkaz toho, že veta o transformácii platí pre ten špeciálny prípad, je v článku 5.28. Dôkaz je založený na použití Greenovej vety a vety o transformácii krivkového integrálu. Niektoré ťažšie, komplikované dôkazy autor nerobí a odkazuje tu čitateľa na svoju knihu *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, 1957. Veľmi užitočné sú pre čitateľa historické poznámky, ktoré robí autor pri rôznych príležitostiach. O cvičeniach možno povedať to isté, čo o cvičeniach prvého dielu. Snaď ešte vo väčšej miere ako v prvom diele sú tu zaradené príklady, ktoré rozširujú čitateľovo znalosti získané výkladom autorovým. Na konci knihy sú uvedené riešenia príkladov z cvičení. Jediná vážna chyba je na str. 69, kde sa tvrdí, že funkcie $f + g, f - g, fg$ a f/g sú spojité v (x_0, y_0), ak f a g sú spojité v bode (x_0, y_0). Autor totiž hovorí o spojitej funkcii f v bode (x_0, y_0) len za predpokladu, že bod (x_0, y_0) je hromadným bodom oboru definície funkcie f. Na koniec možno len opakovať, že výber a spojenie látky je veľmi starostlivo urobené.

(Recenziu prvého dielu viď Časopis pro pěstování matematiky, *88* (1963), 253–254.)

Ladislav Mišík, Bratislava

DALŠÍ VYDANÉ KNIHY

Karel Rektorys a spolupracovníci: PŘEHLED UŽITÉ MATEMATIKY. Vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1963. Stran 1140, obr. 404, cena váz. výt. Kčs 82,–.

Kniha obsahuje přehled výsledků z aplikované matematiky potřebných jednak pracovníkům s technickým zaměřením (technikům, inženýrům, výzkumným pracovníkům, posluchačům i učitelům vysokých škol), jednak teoretickým pracovníkům v oborech blízkých aplikované matematice (fysikům, geodetům atd.).

Zahrnuje aritmetiku, geometrii, analytickou geometrii v rovině a prostoru, vektorový a tenzorový počet, diferenciální a integrální počet a rovnice, funkce komplexní proměnné, variační počet, počet pravděpodobnosti a matematickou statistiku. Zvláštní pozornost je věnována numerickým metodám řešení diferenciálních a integrálních rovnic, algebraických rovnic a jejich soustav a nomografii. Na konci je uveden obsáhlý seznam literatury a podrobný věcný rejstřík.

V knize nejsou uváděny důkazy resp. odvození výsledků. Věty a vzorce jsou doplněny vysvětlujícími poznámkami a příklady.

Karel Hruša, Zbyněk Dlouhý, Jiří Rohlíček: ÚVOD DO STUDIA MATEMATIKY. Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1963. Stran 144, obr. 26, cena váz. výt. Kčs 8,40.

Knížka obsahuje systematicky uspořádaný soubor některých poznatků z učiva střední všeobecně vzdělávací školy a to ve třech kapitolách, které se zabývají: 1. Základy matematické logiky, 2. Reálnými čísly a 3. Rovnicemi a nerovnostmi. Výklady jsou doprovázeny příklady a cvičeními. Na konci knížky je seznam všech pojmů, které jsou v textu definovány, s udáním stránky, kde se příslušná definice vyskytuje.

Publikace je určena posluchačům dálkového studia matematiky na pedagogických institutech, především jako učebnice pro první ročník.

Redakce