Časopis pro pěstování matematiky

Bohuslav Míšek

O počtu tříd silně ekvivalentních incidenčních matic

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 2, 211--218

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108444`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

O POČTU TŘÍD SILNĚ EKVIVALENTNÍCH INCIDENČNÍCH MATIC

BOHUSLAV MÍŠEK, Stochov-Honice

(Došlo dne 19. ledna 1963)

V článku se řeší počet incidenčních matic typu (m, n), z nichž jednu nelze převést v druhou permutacemi řádků a sloupců.

Definice 1. *Buďte m, n přirozená čísla. Matici o m řádcích a n sloupcích, jejíž prvky jsou 0 a 1, nazveme incidenční maticí typu (m, n). Každé dvě incidenční matice téhož typu, z nichž jednu lze vytvořit z druhé permutacemi řádků a sloupců, nazveme silně ekvivalentními.*

Termín „silná ekvivalence incidenčních matic" razí K. Čulík v pojednání [1], str. 229, z něhož vychází úloha *14* téhož autora z roč. *82* (1957) tohoto časopisu; jejím částečným řešením je tato práce. (Viz poznámku 1 na str. 217.) Užitím tohoto pojmu se zřejmě rozpadne množina všech incidenčních matic daného typu v disjunktní třídy silně ekvivalentních matic. V našem článku půjde o zjištění počtu těchto tříd pro daný typ (m, n). Podáme nejprve obecné řešení tohoto počtu, dále specializace obecného vzorce pro $m = 1, 2, 3, 4$ a libovolné n (spolu s tabulkou uvádějící počet těchto tříd pro $m, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$), konečně pro názorný přehled uvedeme všechny incidenční matice typu (3,3), jež nejsou silně ekvivalentní, ve formě soustavy tzv. reprezentantů tříd a ukážeme zároveň, jak stanovit takový přehled v obecném případě. Všem těmto úvahám a výpočtům předešleme několik pomocných vět založených vesměs na pojmu matice redukované.

Definice 2. *Budiž dána incidenční matice M typu (m, n). K i-tému sloupci matice M přiřaďme dyadické číslo $i_1 i_2 \ldots i_m$, jehož číslice $i_1, i_2, \ldots, i_m$ jsou 0 nebo 1 v tom pořadí, v jakém se vyskytují v řádcích tohoto sloupce. Pak nazveme redukovanou maticí typu (m, n) incidenční matici tohoto typu, v níž pro každé dva sloupce, i-tý a j-tý, platí $i_1 i_2 \ldots i_m \leqq j_1 j_2 \ldots j_m$, jestliže $i \leqq j$.*

Budiž v celém dalším výkladě p permutace m řádků redukované matice typu (m, n). Jsou-li X, Y redukované matice typu (m, n), pak nechť zápis $p(X) = Y$ značí, že na množině řádků matice X byla provedena permutace p, na množině sloupců této matice pak vhodná permutace ϱ' tak, že výsledkem obou permutací p, ϱ' je redukovaná matice Y; řekneme krátce, že p převádí X v Y. Permutací p užitou takto na X je zřejmě Y určena jednoznačně.

Budiž dána redukovaná matice M typu $(m, 2^m)$, jejíž sloupce tvoří všechny variace m-té třídy s opakováním z prvků 0 a 1; označme tyto variace $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{2^m}$. Nechť $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2^m}$ jsou celá nezáporná čísla. Pak všude v dalším výkladě označíme symbolem q permutaci, kterou na množině $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{2^m}\}$ indukuje permutace p množiny řádků matice M, symbolem $\bar{q}$ permutaci, kterou na pořadí $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2^m})$ indukuje permutace q, přiřadíme-li k v_k číslo a_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, 2^m)$. Platí-li $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2^m} = n$, resp. značí-li a_k počet stejných sloupců v_k $(k = 1, 2, \ldots, 2^m)$ v redukované matici N typu (m, n), mluvíme o vlastní posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2^m}$, resp. o vlastní posloupnosti matice N.

1. pomocná věta. *Budiž dána redukovaná matice M typu (m, n) s vlastní posloupností $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2^m}$. Pak platí $p(M) = M$ tehdy a jen tehdy, jestliže $\bar{q}(a_i) = a_j \rightarrow a_i = a_j$ $(i, j = 1, 2, 3, \ldots, 2^m)$.*

Důkaz je zřejmý.

2. pomocná věta. *Budiž T třída silně ekvivalentních redukovaných matic typu (m, n), $M \in T$: Existuje-li právě h různých permutací $p_1, p_2, \ldots, p_h$, o nichž platí $p_i(M) = M$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$, pak se T skládá z $m!/h$ různých matic.*

Důkaz. Je-li π permutace, o níž platí $\pi(M) = N$, platí zřejmě o h navzájem různých permutacích $\pi p_1, \pi p_2, \ldots, \pi p_h$, a jen o těchto permutacích, $\pi\, p_i(M) = N$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$, kde ovšem $N \in T$. Platí-li $\pi_1\, p_i(M) = N_1$, $\pi_2\, p_i(M) = N_2$, kde N_1, N_2 jsou různé matice z T, nemůže zřejmě platit pro žádnou dvojici i, j rovnost $\pi_1 p_i = \pi_2 p_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, h)$. Užijeme-li na řádky redukované matice M všech $m!$ permutací, plyne odtud ihned věta.

Pro další úvahy budou podstatné rozklady (α), resp. (ξ) čísel m, resp. n tvaru

$$(\alpha) \equiv \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + m\alpha_m = m\,,$$
$$(\xi) \equiv \xi_1 + 2\xi_2 + \ldots + 2^m\xi_{2^m} = n\,,$$

kde α_j, ξ_k $(j = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, 2^m)$ jsou celá nezáporná. Má-li permutace p α_j j-členných cyklů $(j = 1, 2, \ldots, m)$, řekneme, že p je typu (α). Je-li α_j počet čísel j v rozkladu $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_r$, kde všechna m_i jsou přirozená, řekneme, že rozklad čísla m je typu (α). Je-li permutace p typu (α), pak má p zřejmě cykly o délkách $m_1, m_2, \ldots, m_r$.

3. pomocná věta. *Buďte M, N různé silně ekvivalentní redukované matice typu (m, n). Existuje-li právě φ různých permutací $p_1, p_2, \ldots, p_\varphi$ typu (α), o nichž platí $p_i(M) = M$, existuje právě φ různých permutací $p'_1, p'_2, \ldots, p'_\varphi$ typu (α), o nichž platí $p'_i(N) = N$ $(i = 1, 2, \ldots, \varphi)$.*

Důkaz. Je-li π permutace, o níž platí $\pi(M) = N$, pak platí o φ navzájem různých permutacích $p'_i = \pi p_i \pi^{-1}$ $p'_i(N) = N$ $(i = 1, 2, \ldots, \varphi)$. Protože p_i je typu (α), je také

p'_i typu (α). Předpoklad, že existuje permutace $p'_{\varphi+1}$ typu (α) různá ode všech permutací $p'_1, p'_2, \ldots, p'_\varphi$, pro niž platí $p'_{\varphi+1}(N) = N$, vede zřejmě ke sporu s tím, že $p_1, p_2, \ldots, p_\varphi$ jsou všechny permutace uvedených vlastností.

4. pomocná věta. *Budiž T třída silně ekvivalentních redukovaných matic typu (m, n). Buďte p, p' permutace typu (α). Jsou-li $M_1, M_2, \ldots, M_\sigma$ všechny různé matice z T, o nichž platí $p(M_i) = M_i$, pak existuje právě σ různých matic $N_1, N_2, \ldots, N_\sigma$ z T tak, že platí $p'(N_i) = N_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \sigma)$.*

Důkaz. Poněvadž p' je téhož typu (α) jako p, lze řádky matic $M_1, M_2, \ldots, M_\sigma$ přečíslovat tak, aby se j-členný cyklus permutace p přečíslováním zobrazil na j-členný cyklus permutace p' $(j = 1, 2, \ldots, m)$. To znamená, že existuje permutace π tak, že platí $p' = \pi p \pi^{-1}$; přitom $\pi(M_i) = N_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \sigma)$, kde $N_1, N_2, \ldots, N_\sigma$ jsou zřejmě navzájem různé. Vzhledem k symetrii vlastností, jež mají permutace p, p', neexistuje jistě žádná další matice $N_{\sigma+1}$ z T tak, aby platilo $p'(N_{\sigma+1}) = N_{\sigma+1}$.

5. pomocná věta. *Budiž dána permutace p typu (α). Označme $c_k(\alpha)$ počet k-členných cyklů permutace q. Stanovme funkci $v_k(h)$ pro přirozená k, h takto:*

(1) $$v_k(h) = 0 \text{ pro } k \nmid h\,; \quad v_k(h) = v_k(k) \text{ pro } k | h\,;$$

(2) $$v_1(h) + 2v_2(h) + \ldots + h\, v_h(h) = 2^h\,.$$

Položíme-li $v_k(k) = v_k$ a označíme-li nejmenší společný násobek čísel $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ symbolem $[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s]$, pak platí pro přirozené k, je-li rozklad čísla $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_r$ typu (α),

(3) $$c_k(\alpha) = 0 \quad \text{pro} \quad k \nmid [m_1, m_2, \ldots, m_r]\,,$$

(4) $$c_k(\alpha) = \frac{1}{k} \sum \prod_{i=1}^{r} d_i v_{d_i} \quad \text{pro} \quad k | [m_1, m_2, \ldots, m_r]\,,$$

kde se sčítá přes všechny uspořádané r-tice přirozených čísel $d_1, d_2, \ldots, d_r$, pro něž platí $[d_1, d_2, \ldots, d_r] = k$, při čemž $d_i | m_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Důkaz provedeme indukcí podle r. Budiž $r = 1$, tedy $m = m_1$, takže pro rozklad (α) platí: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{m-1} = 0$, $\alpha_m = 1$. Je-li variace v členem k-cyklu permutace q, máme

(5) $$q^k(v) = v\,, \quad q^l(v) \neq v \quad (l = 1, 2, \ldots, k-1)\,.$$

Poněvadž $q^m(v) = v$, platí jistě $k | m$. Pak z (5) plyne, že v se skládá z m/k stejných k-číslí, jež nazveme stejnými k-cykly variace v, daných sledem číslic 0 a 1 stojících ve variaci v na místech $x, p(x), \ldots, p^{k-1}(x)$ $(x = 1, p^k(1), p^{2k}(1), \ldots, p^{m-k}(1))$. Položíme-li $c_k(\alpha) = \mu_k(m)$, platí tedy $\mu_k(m) = \mu_k(k)$ pro $k | m$, kdežto $\mu_k(m) = 0$ pro $k \nmid m$. Z definice funkce $\mu_k(m)$ plyne: $\mu_1(m) + 2\mu_2(m) + \ldots + m\, \mu_m(m) = 2^m$. Podle (1), (2) je tedy $\mu_k(m)$ totožná s $v_k(m)$ a věta pro $r = 1$ platí. Předpokládejme nyní, že (3), (4) platí s indexem $r - 1$. Očárkujme jednou, resp. dvakrát všechny symboly $p, q, \alpha, k, c_k(\alpha), v$, vztahují-li se k redukovaným maticím typu (m', n), resp. typu

(m'', n), kde $m' = m_1 + m_2 + \ldots + m_{r-1}$, $m'' = m_r$. Pak platí podle předpokladu pro přirozené k'

$$(6)\qquad c'_{k'}(\alpha') = 0 \quad \text{pro} \quad k' \nmid [m_1, m_2, \ldots, m_{r-1}]\,,$$

$$(7)\qquad c'_{k'}(\alpha') = \frac{1}{k'} \sum \prod_{i=1}^{r-1} d_i \nu_{d_i} \quad \text{pro} \quad k' | [m_1, m_2, \ldots, m_{r-1}]\,,$$

kde se sčítá přes všechny uspořádané $(r-1)$-tice přirozených čísel $d_1, d_2, \ldots, d_{r-1}$, pro něž platí $[d_1, d_2, \ldots, d_{r-1}] = k'$, při čemž $d_i | m_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$. Dále platí podle shora dokázaného pro přirozené k''

$$(8)\qquad c''_{k''}(\alpha'') = 0 \text{ pro } k'' \nmid m_r\,, \quad c''_{k''}(\alpha'') = \nu_{k''} \text{ pro } k'' | m_r\,.$$

Z podmínek (5) a z týchž podmínek jednou, resp. dvakrát očárkovaných plyne (za analogických předpokladů) $k = [k', k'']$. Položíme-li

$$(9)\qquad \delta = \frac{k'k''}{[k', k'']} = \frac{k'k''}{k}\,,$$

pojí se ve variacích v, jež jsou členy k-cyklu permutace q, libovolná variace v', jež je členem k'-cyklu permutace q', s $k''/\delta = k/k'$ členy stejných k''-cyklů variace v''. Tedy počet k-cyklů permutace q s pevnými k', k'' dostaneme, znásobíme-li součin $c'_{k'}(\alpha')$ . . $c''_{k''}(\alpha'')$ faktorem δ. Platí tudíž

$$(10)\qquad c_k(\alpha) = \sum \delta\, c'_{k'}(\alpha')\, c''_{k''}(\alpha'')\,,$$

kde se sčítá přes všechny dvojice přirozených čísel k', k'', pro něž platí $[k', k''] = k$. Užijeme-li nyní (6), (7), (8), (9) a položíme-li $k'' = d_r$, plyne z (10) snadno (3) i (4).

6. pomocná věta. *Budiž p permutace typu (α). Nechť $c_k(\alpha)$ je počet k-členných cyklů permutace q. Budiž X množina všech rozkladů (ξ). Označíme-li $P(\alpha)$ počet všech redukovaných matic M typu (m, n), které splňují rovnost $p(M) = M$, pak platí*

$$(11)\qquad P(\alpha) = \sum_{(\xi) \in X} \prod_{k=1}^{2^m} \binom{\xi_k + c_k(\alpha) - 1}{\xi_k}.$$

Důkaz. Vzhledem k tomu, že je mezi redukovanou maticí M typu (m, n) a její vlastní posloupností vzájemně jednoznačný vztah, vyplývá z pomocné věty 1, že $P(\alpha)$ je počet všech rozkladů čísla n ve 2^m celých nezáporných sčítanců $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2^m}$ s ohledem na jejich pořadí a zachovávajících soustavu rovností mezi všemi členy každého cyklu permutace $\bar{q}$. Permutace q, $\bar{q}$ mají zřejmě tentýž počet k-členných cyklů. Je-li tedy $k\xi_k$ dané celé nezáporné číslo, je možno je rozložit v $c_k(\alpha)$ k-tic stejných celých nezáporných sčítanců, vytvářejících $c_k(\alpha)$ k-cyklů permutace $\bar{q}$, s ohledem na pořadí k-tic, právě tolika způsoby, kolika je možno rozložit ξ_k v $c_k(\alpha)$ takových sčítanců. Uvážíme-li, že rozklad čísla ξ_k je nezávislý na rozkladu čísla ξ_h pro $h \neq k$, plyne vzorec (11) ihned z výrazu $\binom{\beta + \gamma - 1}{\beta}$ pro počet rozkladů čísla β v γ celých nezáporných sčítanců s ohledem na jejich pořadí.

7. pomocná věta. *Nechť A značí množinu všech rozkladů (α), $C(\alpha)$ počet všech permutací typu (α), $P(\alpha)$ počet všech redukovaných matic M typu (m, n), které splňují rovnost $p(M) = M$, kde p je permutace typu (α). Pak platí: Ve výrazu*

$$\sum_{(\alpha)\in A} C(\alpha)\, P(\alpha) \tag{12}$$

je z každé třídy silně ekvivalentních redukovaných matic typu (m, n) obsaženo právě $m!$ matic.

Důkaz. Budiž T třída silně ekvivalentních redukovaných matic typu (m, n), $M \in T$, p permutace typu (α). Označíme h, resp. $\varphi(\alpha)$ počet všech permutací π, o nichž platí $\pi(M) = M$, resp. počet těch permutací π z h uvedených, jež jsou typu (α). Pak platí především

$$\sum_{(\alpha)\in A} \varphi(\alpha) = h\,. \tag{13}$$

Podle pomocných vět 2 a 3 udává $\Phi(\alpha) = (m!/h)\,.\,\varphi(\alpha)$ součet všech $\varphi(\alpha)$-tic permutací typu (α), z nichž každá převádí jednu matici z T v ni samu. S druhé strany platí podle pomocné věty 4 a vzhledem k definici $C(\alpha)$ vztah $\Phi(\alpha) = \sigma\, C(\alpha)$, kde σ udává, kolikrát se v součtu $\Phi(\alpha)$ opakuje permutace p, tj. kolik různých matic z T převádí p v ně samy. Ve výraze (12) je tedy obsaženo právě tolik matic z T, kolik činí $\sum_{(\alpha)\in A} \sigma\, C(\alpha)$, tj. podle (13)

$$\sum_{(\alpha)\in A} \sigma\, C(\alpha) = \sum_{(\alpha)\in A} \Phi(\alpha) = \sum_{(\alpha)\in A} \frac{m!}{h}\, \varphi(\alpha) = m!\,.$$

Věta. *Budiž A, resp. X množina všech rozkladů (α), resp. (ξ). Nechť $c_k(\alpha)$ jsou definována vzorci (3), (4). Označíme-li $S(m, n)$ počet tříd silně ekvivalentních incidenčních matic typu (m, n), pak platí pro přirozená m, n*

$$S(m, n) = \sum_{(\alpha)\in A} \frac{1}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_m!\, 1^{\alpha_1} . 2^{\alpha_2} \ldots m^{\alpha_m}} \sum_{(\xi)\in X} \prod_{k=1}^{2^m} \binom{\xi_k + c_k(\alpha) - 1}{\xi_k}. \tag{14}$$

Důkaz. Můžeme se zřejmě omezit na redukované matice typu (m, n). Podle pomocné věty 7 platí

$$S(m, n) = \frac{1}{m!} \sum_{(\alpha)\in A} C(\alpha)\, P(\alpha)\,.$$

Užijeme-li nyní (11) a známého vzorce pro počet permutací typu (α), tj. permutací o α_j j-členných cyklech $(j = 1, 2, \ldots, m)$, $C(\alpha) = m!/(\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_m!\, 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \ldots m^{\alpha_m})$, dostaneme ihned (14).

Uvedeme nyní specializace vzorce (14) pro $m = 1, 2, 3, 4$ a libovolné n. (Ve všech uvedených vzorcích nechť se v Σ sčítá přes všechna celá nezáporná x, y, položíme-li $\binom{p}{q} = 0$ pro $p < q$.)

$$S(1, n) = \binom{n+1}{1},$$

$$S(2, n) = \frac{1}{2}\binom{n+3}{3} + \frac{1}{2}\Sigma\binom{n-2x+1}{1},$$

$$S(3, n) = \frac{1}{6}\binom{n+7}{7} + \frac{1}{2}\Sigma\binom{n-2x+3}{3}\binom{x+1}{1} + \frac{1}{3}\Sigma\binom{n-3x+1}{1}\binom{x+1}{1},$$

$$S(4, n) = \frac{1}{24}\binom{n+15}{15} + \frac{1}{4}\Sigma\binom{n-2x+7}{7}\binom{x+3}{3} +$$

$$+ \frac{1}{8}\Sigma\binom{n-2x+3}{3}\binom{x+5}{5} + \frac{1}{3}\Sigma\binom{n-3x+3}{3}\binom{x+3}{3} +$$

$$+ \frac{1}{4}\Sigma\binom{n-2x-4y+1}{1}\binom{y+2}{2}.$$

Definice 3. *Budiž dána třída T silně ekvivalentních redukovaných matic typu (m, n). Čtěme vlastní posloupnosti těchto matic jako čísla $(n + 1)$-adické soustavy o číslicích* $0, 1, 2, \ldots, n$. *Pak nazveme tu matici z T, jejíž $(n + 1)$-adické číslo je maximální, reprezentantem třídy T.*

Jako příklad uveďme soustavu reprezentantů typu $(3, 3)$ sestavenou podle sestupné posloupnosti příslušných $(n + 1)$-adických čísel:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

Poznámka 1. Číslo $S(m, n)$ udává počet $\varphi_2(m/n)$ z úlohy *14* (autor K. ČULÍK) na str. 457, roč. *82* (1957) tohoto časopisu.

Poznámka 2. Třídy silně ekvivalentních incidenčních matic je možno počítat také podle jiného vzorce, jenž pochází od HARARYHO [2]. Vzorec (14) jakož i vzorec Hararyův je možno odvodit z obecného vzorce Pólyova [3]. Toto odvození spolu s diskusí obou vzorců je provedeno v [4].

POČET TŘÍD SILNĚ EKVIVALENTNÍCH INCIDENČNÍCH MATIC TYPU (m, n)

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	7	13	22	34	50	70	95
3	4	13	36	87	190	386	734	1 324
4	5	22	87	317	1 053	3 250	9 343	25 207
5	6	34	190	1 053	5 624	28 576	136 758	613 894
6	7	50	386	3 250	28 576	251 610	2 141 733	17 256 831
7	8	70	734	9 343	136 758	2 141 733	33 642 660	508 147 108
8	9	95	1324	25 207	613 894	17 256 831	508 147 108	14 685 630 688

Literatura

[1] *K. Čulík*: Theorie zobecněných konfigurací. Práce Brněnské základny ČSAV, spis 355, *XXIX* (1957), 225–255.

[2] *F. Harary*: On the number of bi-coloured graphs. Pac. J. of Math. *8* (1958), 743–755.

[3] *G. Pólya*: Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. Acta Math. *68* (1937), 145–254.

[4] *B. Míšek*: Pólya's fundamental formula and incidence matrices. Proc. of the Symp. on the theory of graphs and its appl., Smolenice 1963 (to appear).

Резюме

О ЧИСЛЕ КЛАССОВ СИЛЬНО ЭКВИВАЛЕНТНЫХ МАТРИЦ ИНЦИДЕНТНОСТИ

БОГУСЛАВ МИШЕК (Bohuslav Míšek), Стохов-Гонице

Каждые две матрицы инцидентности (с элементами 0 и 1) типа (m, n), одну из которых можно образовать из другой перестановками строк и столбцов, называем *сильно эквивалентными* (по К. Чулику). В работе находится число $S(m, n)$ классов сильно эквивалентных матриц инцидентности типа (m, n) и составляется

таблица величин $S(m, n)$ для $m, n = 1, 2, \ldots, 8$. Главный результат содержит следующая теорема:

Теорема. *Пусть* (α) *или* (ξ) — *разложение вида* $m = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + m\alpha_m$ *или* $n = \xi_1 + 2\xi_2 + \ldots + 2^m\xi_{2^m}$, *где* α_j, ξ_k — *целые неотрицательные* $(j = 1, 2, \ldots, m;$ $k = 1, 2, \ldots, 2^m)$. *Обозначим через* A *или* X *множество всех* (α) *или* (ξ). *Пусть* $c_k(\alpha)$ *определены по формулам* (3), (4). *Тогда справедливо*

$$S(m, n) = \sum_{(\alpha)\in A} \frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\,\alpha_m!\,1^{\alpha_1}.\,2^{\alpha_2}\ldots m^{\alpha_m}} \sum_{(\xi)\in X} \prod_{k=1}^{2^m} \binom{\xi_k + c_k(\alpha) - 1}{\xi_k}.$$

Summary

ON THE NUMBER OF CLASSES OF STRONGLY EQUIVALENT INCIDENCE MATRICES

BOHUSLAV MÍŠEK, Stochov-Honice

Two m by n matrices of zeros and ones which can be sent into each other by permutations of their rows and columns are called *strongly equivalent* (according to K. ČULÍK) incidence matrices of type (m, n). In the paper the number $S(m, n)$ of strong equivalence classes of m by n incidence matrices is given, together with the table of values of $S(m, n)$ for $m, n = 1, 2, \ldots, 8$. The main result is contained in the following theorem:

Theorem. *Let* (α) *and* (ξ) *be partitions of type* $m = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + m\alpha_m$ *and* $n = \xi_1 + 2\xi_2 + \ldots + 2^m\xi_{2^m}$ *respectively, where* α_j, ξ_k *are non-negative integers* $(j = 1, 2, \ldots, m;$ $k = 1, 2, \ldots, 2^m)$. *Denote by* A *and* X *the set of all* (α) *and* (ξ) *respectively. Let* $c_k(\alpha)$ *be defined by* (3), (4). *Then*

$$S(m, n) = \sum_{(\alpha)\in A} \frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\,\alpha_m!\,1^{\alpha_1}\,2^{\alpha_2}\ldots m^{\alpha_m}} \sum_{(\xi)\in X} \prod_{k=1}^{2^m} \binom{\xi_k + c_k(\alpha) - 1}{\xi_k}.$$