Časopis pro pěstování matematiky

Andrei Nikolajevič Kolmogorov

Práce J. M. Gel'fanda o algebraických otázkách funkcionální analysy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 76 (1951), No. 4, 271--273

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108427`

PRÁCE J. M. GEL'FANDA O ALGEBRAICKÝCH OTÁZKÁCH FUNKCIONÁLNÍ ANALYSY

A. N. KOLMOGOROV.

(Ruský originál vyšel v časopise Uspěchi mat. nauk, sv. VI, seš. 4 (1951), str. 184 až 186.)

Současná matematika využívá ve velké míře geometrických i algebraických method tím, že jednak vyšetřuje nejrůznější soustavy objektů (funkcí, čar atd.) jako nějaký geometrický celek — prostor — a jednak vyšetřuje rozličné soustavy objektů, pro něž jsou definovány operace, jako algebraický útvar — grupu, okruh neb těleso.

Už dávno vznikla snaha sjednotit tyto dva směry, snaha vyšetřovat útvary mající současně i geometrické (topologické) i algebraické vlastnosti. Prvním pokusem tohoto druhu byla theorie lineárních prostorů, která v moderní formě byla vypracována St. Banachem. Po ní následovala řada fundamentálních prací o topologické algebře, t. j. prací věnovaných soustavnému studiu topologických grup i topologických těles. Mezi těmito pracemi zvláště pozoruhodné jsou práce L. S. Pontrjagina. Konkretnější analytický charakter mají vyšetřování Johna Neumanna a jeho školy o okruzích operátorů v Hilbertově prostoru. Již v těchto pracích se ukázalo, že s hlediska analysy ústředním algebraicko-geometrickým útvarem, který je třeba studovat, musí být algebraický okruh (soustava, v níž lze vždy odečítat, v níž však není vždy dělení možné) opatřený topologickými vlastnostmi.

I. M. Gel'fandu se podařilo vystihnout základní a velmi plodnou cestu pro přebudování veškeré funkcionální analysy v naznačeném směru. Základní výchozí myšlenkou I. M. Gel'fanda se stal ten fakt, že okruh, v němž je zavedena norma (analogie absolutní hodnoty obyčejných čísel), dá se za velmi obecných podmínek automaticky realisovat — a to úplně určeným a jediným způsobem — v okruhu funkcí definovaných na množině „maximálních ideálů" původního okruhu.

Ve shodě s tím vzniká pro každý normovaný okruh jako první a základní problém úloha najít přirozený obor změny argumentů funkcí, z nichž se okruh skládá. Na příklad skoroperiodické funkce se obyčejně pokládají za funkce reálného argumentu. Přirozenou oblastí jejich definice je však jisté rozšíření $\bar{R}$ množiny reálných čísel R. Na tomto rozšíření $\tilde{R}$ funkce, které jsou skoro periodické na R, se prostě kryjí se všemi funkcemi spojitými na $\tilde{R}$.

Z této základní myšlenky vznikl obsáhlý program bádání, kolem něhož soustředil I. M. Gel'fand s neobyčejnou energií velký kolektiv spolupracovníků a žáků. Methoda J. M. Gel'fanda dala již mnoho úplně konkretních analytických výsledků (viz na př. práci I. M. Gel'fanda o absolutně konvergentních mocninných řadách uveřejněnou spolu se základním pojednáním o normovaných okruzích). V nejnovější době se počal objevovat velký počet prací amerických autorů (Lorch, Ambrose a j.), kteří pokračují v tomto směru.

Jak již bylo řečeno, zvláštní zájem mají okruhy operátorů v Hilbertově prostoru. V práci [2] I. M. Gel'fand a M. A. Najmark našli nutné a postačující podmínky, aby abstraktní okruh měl realisaci v okruhu operátorů v Hilbertově prostoru. To vneslo značnou jasnost i řadu zjednodušení do theorie vypracované Neumannem.

Studium okruhu operátorů v Hilbertově prostoru je ekvivalentní studiu grupy unitárních operátorů tohoto prostoru. Sama o sobě je theorie grup unitárních operátorů a theorie representace abstraktních nebo konkretních grup takovými grupami značně bohatší a složitější. Již unitární representace obyčejné grupy reálných čísel (jednoparametrové grupy unitárních operátorů) byly v poslední době předmětem velkého počtu vyšetřování. Jejich theorie je přirozenou moderní formou harmonické analysy funkcí a spektrální analysy determinovaných neb náhodových kmitavých procesů.

Základem každé budoucí theorie unitárních grup a unitárních representací bude nepochybně věta Gel'fanda a Rajkova o existenci postačující soustavy spojitých unitárních representací [3]. Po objevení této věty vznikl docela přirozeně problém najít všechny irreducibilní representace obzvláště důležitých grup a sestavení libovolné representace z těchto irreducibilních representací. Z těchto konkretních matematických problémů nejhlouběji leží ty, které souvisejí s lineárními representacemi Lieových grup. V komutativním a kompaktním případě takové representace dají se rozložit na irreducibilní representace konečné dimense, t. j. dají se realisovat pomocí matic. Avšak již grupa Lorentzova, mající základní význam pro fysiku, grupa pohybu roviny Lobačevského a řada jiných klasických grup mají jen velmi chudou množinu representací konečné dimense, z nichž na příklad nelze sestrojit „regulární" representaci pomocí funkcí definovaných na grupě a majících integrovatelný čtverec.

Proto vzniká úloha najít pro základní klasické Lieovy grupy všechny jejich unitární irreducibilní representace nekonečné dimense (representace konečné dimense jsou již známy) a vyšetřovat, zda se libovolná unitární representace dá rozložit na irreducibilní representace. Tato úloha byla právě rozřešena I. M. Gel'fandem a M. A. Najmarkem. Jejich práce mají svými methodami, konkretností výsledků, daných ve tvaru explicitních vzorců, a šíří dosažených i očekávaných aplikací, zcela klasický ráz.

Zvláštní zájem má pro současnou fysiku úloha najíti všechny irreducibilní representace Lorentzovy grupy a z nich odvodit všechny unitární representace této grupy. Tato úloha je rozřešena v práci [5]. O jejím významu pro fysiku viz [7]. Důležitost otázky byla jasná i zahraničním vědcům. Avšak Dirac v roce 1945 byl s to udat jen několik náhodných representací Lorentzovy grupy nekonečné dimense, které se všechny ukázaly reducibilními. Teprve po vyjití prací I. M. Gel'fanda a M. A. Najmarka vyvolal tento problém obšírnou literaturu za hranicemi.

S matematické stránky byly překonány ještě větší obtíže v základní monografii [8], která vyšla v roce 1950. Theorie zobecněných „sférických funkcí", která je v ní obsažena, a řada jiných výsledků ukazují se jako velmi důležité pro analysu.

V celku bádání I. M. Gel'fanda a jeho spolupracovníků patří mezi nejvýznamnější jevy v současné matematice vůbec.

Přeložil *Vl. Kořínek*, Praha.

LITERATURA.

[1] *Gelfand I.*, Normierte Ringe. Matem. sb. 9 (1941), 3—36.

[2] *Gelfand I.* and *Neumark M.*, On the im bedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space, Matem. sb. 12 (1943), 197—217.

[3] *Гнльфанд И. М.* и *Райков Д. А.*, Неприводимые унитарные представления локальнобикомпактных групп, Матем. сб. 13, 1943, 301—316.

[4] *Гельфанд И. М.*, *Райков Д. А.* и *Шилов Г. Е.*, Коммугативные нормированные кольца, Успехи матем. наук, т. I, вып. 2 (1946). 48—146.

[5] *Гельфанд И. М.* и *Наймарк М. А.*, Унлтарные представлениа группы Лоренца, изв. АН СССР, сер. матем. 11 (1947), 411—504.

[6] *Гельфанд И. М.* и *Наймарк М. А.*, Унитарные представления полупростых групп Ли, Матем. сб. 21, (1947), 405—434.

[7] *Гельфанд И. М.* и *Яглом А. М.*, Общие релятивистски инвариантные уравнениа и бесконечиомерные представления группы Лоренца, ДАН 59, (1948), 655—658.

[8] *Гельфанд И. М.* и *Наймарк М. А.* Унитарные представления классических групп. Труды матем. ин-та АН СССР 36, (1950), 1—288.