Časopis pro pěstování matematiky

Vlastimil Pták

Polouspořádané lineární prostory

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 76 (1951), No. 4, 283--290

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108420`

POLOUSPOŘÁDANÉ LINEÁRNÍ PROSTORY

VLASTIMIL PTÁK, Praha.

(Došlo dne 19. října 1951.)

V referátu se vykládají základní pojmy z theorie polouspořádaných prostorů vybudované leningradskou školou a čtenář se informuje o některých přednostech této theorie proti theorii normovaných prostorů.

Při aplikacích method funkcionální analysy na některé problémy klasické analysy často hrají důležitou úlohu vztahy, vyplývající z té skutečnosti, že prostory reálných funkcí lze přirozeným způsobem částečně uspořádati. Vzpomeňme jen, jak často se objevují monotonní posloupnosti funkcí, nerovnosti mezi funkcemi, nebo operace, které nezáporné funkci přiřazují nezáporné číslo, jako na příklad Stieltjesův integrál, je-li integrující funkce neklesající. Zavedením částečného uspořádání lze často docíliti překvapujících zjednodušení důkazů a zostření vět známých z theorie Banachových prostorů. Typickým příkladem pro to jsou methoda majorant při existenčních důkazech v theorii diferenciálních a integrálních rovnic, nebo odhady chyby při methodě postupných aproximací. Pro všechny tyto vztahy není místa v theorii normovaných lineárních prostorů; ukázalo se tedy účelným podrobiti lineární prostory s částečným uspořádáním podrobnému a soustavnému studiu. Tohoto úkolu ujala se vedle řady jiných matematiků skupina pracovníků semináře pro funkcionální analysu leningradské university pod vedením L. V. Kantoroviče. Výsledkem tohoto studia je obsáhlá monografie: Канторович - Вулих - Пинскер: Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Москва 1950.

Úkolem této informativní stati jest vysvětlit základní pojmy theorie polouspořádaných lin. prostorů, upozornit na některé její přednosti proti theorii normovaných lineárních prostorů a hlavně zainteresovati pro hlubší studium jejích neřešených problémů, kterých je značný počet.

Nazveme K-prostorem modul nad tělesem čísel reálných, který je zároveň polouspořádanou množinou, při čemž částečné uspořádání souvisí s algebraickými operacemi nasnadě jsoucím způsobem: součet dvou kladných prvků je zase kladný prvek, kladný prvek násoben kladným číslem dává opět kladný prvek. Při tom požadujeme dále, aby každý prvek se dal majorisovati nezáporným prvkem a aby každá neprázdná množina shora omezená měla supremum (v obvyklém smyslu theorie polouspoř. množin). Protože každý prvek se dá majorisovati nezáporným, jest každá konečná množina shora omezena dokonce nezáporným prvkem a má tedy supremum. Pro suprema a infima konečných množin užíváme označení obvyklého z theorie svazů $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$, resp. $x_1 \wedge x_2 \wedge \wedge \ldots \wedge x_n$. Uvedeme hned několik příkladů.

Prostor P_1 všech čísel reálných s přirozeným uspořádáním.

Prostor P_2 nechť je prostor všech n-členných posloupností reálných čísel s obvyklými alg. operacemi. Při tom prvek $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ nazveme kladným, jestliže pro všechna i je $\xi_i \geqq 0$, ale pro všechna i není $\xi_i = 0$.

Prostor P_3 všech reálných funkcí definovaných na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s obvyklými alg. operacemi. Při tom prvek $x = x(t)$ prohlásíme za kladný, jestliže pro všechna $t \in \langle 0, 1 \rangle$ jest $x(t) \geqq 0$ a aspoň pro jedno t_0 jest $x(t_0) > 0$.

Prostor P_4 všech lebesgueovsky měřitelných reálných funkcí definovaných na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ modulo funkcí skoro všude rovných nule s nasnadě jsoucí definicí alg. operací i část. uspořádání.

Prostor P_5 všech funkcí s konečnou variací na $\langle 0, 1 \rangle$. Při tom funkci $x(t)$ prohlásíme za kladnou, jestliže (1) $x(0) \geqq 0$, (2) $x(t)$ je neklesající, (3) není identicky rovna nule.

Všimneme-li si axiomů pro K-prostor, shledáme, že se liší od vlastností reálných čísel jen tím, že místo plného uspořádání vyžadujeme pouze částečné uspořádání.

Je tedy patrné, že i všechny ostatní vlastnosti reálných čísel, při jejichž důkazu se nepoužívá toho, že množina reálných čísel je plně uspořádána, zůstanou v platnosti i pro obecné K-prostory. Typickým příkladem takové věty jest rovnost

$$x + y = (x \wedge y) + (x \vee y),$$

která, ač pro reálná čísla zcela triviální, má značný význam v obecném K-prostoru.

Vedeni jsouce analogií s theorií reálných funkcí definujeme pro libovolný prvek x v K-prostoru jeho kladnou a zápornou část vztahy

$$x_+ = x \vee 0, \ x_- = -x \vee 0.$$

Všimněme si, že tento rozklad v prostoru P_5 jest obvyklý rozklad funkce s konečnou variací na rozdíl dvou funkcí neklesajících.

Platí potom, jak se dá očekávati, $x = x_+ - x_-$. Je vhodné zavésti též absolutní hodnotu $|x|$ jakožto součet $x_+ + x_-$. Dokáže se bez potíží, že takto zavedená absolutní hodnota má obvyklé vlastnosti, z nichž některé uvedeme:

$$\begin{aligned} |-x| &= |x|, \\ |x + y| &\leqq |x| + |y|, \\ |x - y| &= (x \vee y) - (x \wedge y). \end{aligned}$$

Všimněme si zejména posledního vztahu, který je velmi názorný.

Řekneme, že dva prvky x_1, x_2 K-prostoru jsou disjunktní, jestliže $|x_1| \wedge |x_2| = 0$. V prostoru P_4 na příklad znamená disjunktnost dvou funkcí, že neexistuje množina kladné míry, na níž by obě funkce $x_1(t)$ i $x_2(t)$ byly od nuly různé. Pojem disjunktních prvků jest analogický pojmu orthogonálních prvků v unitárních prostorech.

Z obecných „algebraických" vět o K-prostorech zasluhují zmínky ještě dvě.

Množina všech přirozených násobků kladného prvku x není shora ohraničena, t. zv. *Archimedův princip*. Každý K-prostor tvoří svaz; tento svaz je distributivní v následujícím smyslu: je-li x_α $(\alpha \in A)$ libovolná shora omezená množina prvků K-prostoru a z libovolný prvek, pak

$$z \wedge \sup_\alpha x_\alpha = \sup_\alpha (z \wedge x_\alpha).$$

Ke každé větě přirozeně platí i věta duální, což nemusíme připomínat.

Přistupujeme nyní k nejdůležitějším pojmům, t. j. k zavedení topologie do K-prostoru. Definujeme nejdříve o-konvergenci. Řekneme, že ohraničená posloupnost x_n prvků K-prostoru o-konverguje k bodu x, jestliže

$$x = \inf_n \sup_{k \geqq n} x_k = \sup_n \inf_{k \geqq n} x_k,$$

což je zase definice přejatá z elementů analysy. Nyní můžeme zavésti do K-prostoru P topologii tím, že za uzavřené množiny prohlásíme ty množiny $F \subset P$, pro něž platí

$$x_n \in F,\ x = o\text{-}\lim x_n \Rightarrow x \in F.$$

Řekneme nyní, že posloupnost $x_n \in P$ t-konverguje k bodu $x \in P$, jestliže při právě zavedené topologii každé okolí bodu x obsahuje skoro všechny členy posloupností x_n. Platí zřejmě implikace

$$x = o\text{-}\lim x_n \Rightarrow x = t\text{-}\lim x_n.$$

Obrácená implikace však platit nemusí. Skutečně, v prostoru P_4 měřitelných funkcí o-konvergence znamená konvergenci skoro všude, zatím co t-konvergence znamená konvergenci podle míry, jak plyne z klasické věty Rieszovy.

Mohli bychom také definovati topologii tím, že bychom za uzávěr množiny $M \subset P$ prohlásili množinu všech limit o-konvergentních posloupností, jichž členové leží v M. Dostali bychom však topologii s nectností pro L-prostory příslovečnou: uzávěr dané množiny nemusí býti uzavřenou množinou.

Vezmeme-li na příklad v prostoru P_3 za M množinu všech spojitých funkcí, dostaneme takto jako uzávěr množiny M množinu všech funkcí první třídy, jejíž uzávěr jest opět širší množina všech funkcí druhé třídy a teprve „po nekonečně mnoha krocích" dospějeme k množině uzavřené.

Pro o-konvergenci v K-prostoru lze dokázati ještě velmi důležitou vlastnost, t. zv. *o-úplnost*: posloupnost x_n jest o-konvergentní, když a jen když

$$\inf_r \sup_{m, n \geqq r} |x_m - x_n| = 0.$$

Jedná se dále o nějakou rozumnou definici podprostoru. Množinu $Q \subset P$ nazveme podprostorem K-prostoru P, jestliže je především podprostorem ve smyslu theorie lineárních prostorů a za druhé, je-li K-prostorem při částečném uspořádání, indukovaném v ní částečným uspořádáním P. Čtenář si snadno uvědomí, že v prostoru P_3 množina všech spojitých funkcí, která jest podmodulem, není podprostorem. Tato definice podprostoru má však některé nevýhody. Je-li totiž $M \subset Q$ shora omezená nějakým prvkem $x \in Q$, má v podprostoru Q jisté supremum. Odnikud však neplyne, že by v širším prostoru P (kde je tím spíše omezená) měla totéž supremum a skutečně supremum množiny M v prostoru P může býti menší než její supremum v Q. Může se dokonce státi, že množina $M \subset Q$ je shora omezená v P, ale neomezená v Q. Vezměme na příklad $P = P_3$, a nechť Q znamená množinu všech ohraničených reálných funkcí definovaných v $\langle 0, 1\rangle$, takže Q je podprostor P.

Vezměme nyní funkci $x(t)$ takto definovanou

$$x(0) = 0, \ x(t) = \frac{1}{t} \text{ pro } 0 < t \leqq 1.$$

Nechť dále $x_n(t)$ znamená $\min(n, x(t))$. Potom $x_n \in Q$, množina všech x_n jest v P omezena shora prvkem x, ale je neomezena v Q. Z tohoto důvodu je účelné dále zúžiti pojem podprostoru. Řekneme, že podprostor $Q \subset P$ je *pravidelný*, jestliže pro každou množinu $M \subset Q$, shora omezenou v P, $\sup M \in Q$. Jak je ihned patrno, jest potom pro každou shora omezenou množinu $M \subset Q$ lhostejno, zda její supremum „počítáme" v P nebo v Q.

Z důvodů, které by se objevily při hlubším studiu projektorů, budeme požadovati ještě normalitu podprostorů, totiž následující vlastnost:

$$\text{je-li } x \in Q, \ y \in P, \ |y| \leqq |x|, \text{ potom } y \in Q.$$

Podprostory zároveň pravidelné i normální nazýváme komponentami K-prostoru. Je-li $E \subset P$ libovolná množina, potom množina Q'_E všech prvků $x' \in P$, disjunktních se všemi prvky $x \in E$, tvoří komponentu prostoru P, kterou nazýváme disjunktním doplňkem množiny E. Platí pro ni obdobné věty jako pro orthogonální doplňky v unitárních prostorech.

Je-li Q komponenta K-prostoru P, $x \in P$, $x \geqq 0$, položíme

$$\mathsf{P}_Q x = \sup_{y \in Q, \ 0 \leqq y \leqq x} y.$$

Z pravidelnosti Q vyplývá, že tento prvek leží v Q.

Je-li dán libovolný $x \in P$, pak položíme

$$\mathbf{P}_Q x = \mathbf{P}_Q x_+ - \mathbf{P}_Q x_-$$

a nazveme prvek $\mathbf{P}_Q x$ projekcí prvku x na komponentu Q.

Takto definované zobrazení $\mathbf{P}_Q$ t. zv. *projektor* jest additivní a homogenní a platí pro ně i ostatní věty, které bychom očekávali.

Mezi K-prostory nejvýznačnější kategorii tvoří t. zv. K-prostory s jedničkou. Jedničkou K-prostoru nazýváme takový kladný prvek $\mathbf{1}$, že nejmenší komponenta jej obsahující jest celý prostor P, nebo, což je totéž, takový kladný prvek $\mathbf{1}$, že neexistuje žádný kladný prvek s ním disjunktní. Každý K-prostor nemusí býti K-prostorem s jedničkou, jak ukazuje příklad prostoru P_5, dá se však (ve smyslu, který by bylo nutno precisovat) sestavit z K-prostorů s jedničkou.

V dalším bude P znamenati vždy K-prostor s jedničkou. Jednotkovým prvkem nazveme potom libovolnou projekci jedničky.

Každé komponentě Q odpovídá tedy určitý jednotkový prvek $\mathbf{e}_Q$ vztahem

$$\mathbf{e}_Q = \mathbf{P}_Q \mathbf{1}.$$

Tento vztah je vzájemně jednoznačný v následujícím smyslu: utvoříme-li nejmenší komponentu obsahující prvek $\mathbf{e}_Q$, dostaneme právě komponentu Q. Zejména tedy každému jednotkovému prvku přísluší jednoznačně určený projektor.

Vezmeme-li si prostor P_4, pak funkce identicky rovná 1 jest jedničkou prostoru P_4. Snadno se nahlédne, že jednotkové prvky jsou potom právě charakteristické funkce měřitelných podmnožin intervalu $\langle 0, 1\rangle$ (ovšem modulo nulových množin).

Množina všech jednotkových prvků je částečně uspořádána jakožto podmnožina prostoru P. Při tomto částečném uspořádání tvoří úplnou Booleovu algebru, kterou nazýváme basí K-prostoru P. Naznačíme nyní, jak je možno pomocí jednotkových prvků popsati každý prvek $x \in P$. Dá se totiž dokázati toto: ke každému $x \in P$ a každému reálnému λ existuje jednotkový prvek $\mathbf{e}_\lambda$ tak, že pro jeho doplněk $\mathbf{e}'_\lambda = \mathbf{1} - \mathbf{e}_\lambda$ a příslušné projektory $\mathbf{P}_\lambda$, $\mathbf{P}'_\lambda$ platí vztahy

$$\mathbf{P}_\lambda x \leqq \lambda \mathbf{e}_\lambda, \quad \mathbf{P}'_\lambda x \geqq \lambda \mathbf{e}'_\lambda.$$

Čtenář nechť si laskavě nakreslí obrázek pro prvek $x \in P_4$; zjistí, že prvek $\mathbf{e}_\lambda$ má velmi názorný význam. Podobně jako je měřitelná funkce $x(t)$ určena systémem množin $E_\lambda = \underset{t}{\mathrm{E}}[x(t) < \lambda]$, dá se očekávati, že i v obecném K-prostoru bude každý prvek x určen systémem jednotkových prvků $\mathbf{e}_\lambda$, který nazveme charakteristikou prvku x. Tomu tak skutečně jest; právě tak, jako měřitelné funkce aproximujeme pomocí stepfunkcí, t. j. lineárních kombinací charakteristických funkcí měřitelných množin, poslouží nám k tomuto účelu v obecném K-prostoru s jedničkou charakteristiky prvků.

Nechť každému číslu celému r jest přiřazeno reálné číslo λ_r tak, že

(1) $\lambda_r < \lambda_{r+1}$,

(2) $\lim\limits_{r \to +\infty} \lambda_r = +\infty$,

(3) $\lim\limits_{r \to -\infty} \lambda_r = -\infty$,

(4) $\varepsilon = \sup\limits_r (\lambda_r - \lambda_{r-1}) < \infty$.

Potom, je-li x libovolný prvek $x \in P$ a $\mathfrak{e}_\lambda$ jeho charakteristika, o-konverguje řada

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \lambda_{r-1}(\mathfrak{e}_{\lambda_r} - \mathfrak{e}_{\lambda_{r-1}}) = \tilde{x}$$

a platí $|x - \tilde{x}| \leqq \varepsilon \mathbf{1}$. Z této nerovnosti „v limitě" dostáváme vyjádření prvku x integrálem

$$x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathfrak{e}_\lambda,$$

které je opět analogií podobných vyjádření, užívaných v theorii Hilbertových prostorů.

Pojem K-prostoru v celé své obecnosti ukazuje se však příliš širokým: obecný K-prostor může ještě míti některé velmi nepříjemné vlastnosti. Ukazuje se tedy účelným uložiti K-prostorům některá další omezení. Nezdá se však, že by v tomto směru bylo docíleno definitivních výsledků.

Zakončíme tedy tento referát několika slovy o důležité a velmi zajímavé partii theorie polouspořádaných lineárních prostorů s jedničkou, totiž o problému jejich realisace.

Je-li $\mathfrak{E}$ libovolná úplná Booleova algebra, pak zobrazení $e(\lambda)$ množiny všech čísel reálných do $\mathfrak{E}$ nazveme rozkladem jedničky, jestliže má tyto dvě vlastnosti

(1) $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \Rightarrow e(\lambda_1) \leqq e(\lambda_2)$,

(2) $\inf\limits_\lambda e(\lambda) = 0$, $\sup\limits_\lambda e(\lambda) = 1$.

Dva rozklady jedničky $e_1(\lambda)$ a $e_2(\lambda)$ budeme pokládat za stejné, jestliže platí implikace:

$$\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow e_1(\lambda_1) \leqq e_2(\lambda_2), \; e_2(\lambda_1) \leqq e_1(\lambda_2)$$

Množinu všech rozkladů jedničky označíme $\Omega(\mathfrak{E})$. Jest zajímavo všimnouti si, že, díváme-li se na $\mathfrak{E}$ jako na pravděpodobnostní pole, není $\Omega(\mathfrak{E})$ ničím jiným než množinou všech náhodných proměnných na $\mathfrak{E}$. (V pojetí Kolmogorovově náhodná proměnná má za argumenty elementární jevy; díváme-li se však na jevy jakožto na prvky jisté Booleovy algebry, jest výhodnější chápat náhodné proměnné právě obráceně: jejich argumenty jsou reálná čísla a jejich hodnoty jevy.) Nyní jest možno množinu $\Omega(\mathfrak{E})$ linearisovat a částečně uspořádat tak, že se stane K-prostorem s jedničkou, při čemž jeho base je isomorfní Booleově algebře $\mathfrak{E}$. Z nasnadě jsoucích důvodů nemůžeme zde příslušné úvahy detailně rozvádět, čtenář však jistě tuší, jak se to provede. Algebraické operace je možno jednoduše zavésti pro elementární náhodné proměnné, totiž pro takové, které nabývají jen konečně mnoha hodnot, odtud se dají rozšířiti na celé $\Omega(\mathfrak{E})$, neboť množina elementárních náhodných proměnných leží v $\Omega(\mathfrak{E})$ v jistém smyslu hustě.

Stačí si nyní všimnouti toho, že, je-li P K-prostorem s jedničkou, pak charakteristika $\mathfrak{e}_\lambda$ libovolného prvku x má obě vlastnosti rozkladu jedničky. Označíme-li tedy $\mathfrak{E}(P)$ basi prostoru P, pak, jak víme, $\mathfrak{E}(P)$ je úplná Booleova algebra a je tedy možno utvořit $\Omega(\mathfrak{E}(P))$.

Charakteristika každého prvku x jest rozkladem jedničky a vidíme tedy, že můžeme prostor P přirozeným způsobem vnořit do $\Omega(\mathfrak{E}(P))$. Skutečně platí věta, že ke každému K-prostoru s jedničkou P existuje normální podprostor K-prostoru $\Omega(\mathfrak{E}(P))$ isomorfní s P.

Z tohoto důvodu bude stačit zabývat se problémem realisace jen pro takové K-prostory s jedničkou, kde každý rozklad jedničky jest charakteristikou vhodného prvku $x \in P$. Takové K-prostory budeme nazývat rozšířenými K-prostory.

K realisaci budeme se snažit užíti prostorů spojitých funkcí na vhodných kompaktních Hausdorffových prostorech.

Je-li T kompaktní Hausdorffův prostor, označíme $C(T)$ lineární prostor všech spojitých funkcí na T. Je vidět, že však prostor T bude muset mít dosti speciální charakter, aby $C(T)$ byl K-prostorem. Čtenář se snadno přesvědčí, že na příklad prostor spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s obvyklým částečným uspořádáním není K-prostorem; je vidět, že zde vadí souvislost prostoru T. Skutečně dá se dokázati, že $C(T)$ je K-prostorem, když a jen když T je extrémně nesouvislý (t. j. uzávěr každé otevřené množiny jest množina obojetná). Dostaneme tedy v případě extrémně nesouvislého T K-prostor $C(T)$. Nedostaneme však tímto způsobem každý K-prostor, protože na kompaktním prostoru každá spojitá funkce jest omezená a následkem toho má $C(T)$ tuto vlastnost: každý $x \in C(T)$ dá se majorisovat vhodným násobkem jedničky. (Dalo by se však dokázati, že tímto způsobem lze dostati všechny K-prostory s právě uvedenou vlastností.) Jest však možno malou modifikací prostoru $C(T)$ situaci zachránit. Budiž T extrémně nesouvislý kompaktní Hausdorffův prostor. Označíme $C_\infty(T)$ množinu všech spojitých funkcí na T, které mohou nabývati i hodnot $+\infty$ nebo $-\infty$, avšak nejvýše na řídké množině. Při přirozené definici alg. operací i polouspořádání (malá komplikace při definici sečítání se snadno odstraní) tvoří potom $C_\infty(T)$ rozšířený

K-prostor. Naznačíme nyní stručně důkaz, že každý rozšířený K-prostor je isomorfní vhodnému $C_\infty(T)$.

Budiž P libovolný rozšířený K-prostor. Vezměme jeho basi $\mathfrak{E}(P)$ která, jak víme, tvoří úplnou Booleovu algebru. Z klasické věty Stoneovy plyne, že existuje 0-dimensionální kompaktní Hausdorffův prostor T tak, že $\mathfrak{E}(P)$ je isomorfní s Booleovou algebrou obojetných podmnožin prostoru T. Dá se dokázati, že prostor T bude dokonce extrémně nesouvislý. (To vyplyne z úplnosti Booleovy algebry $\mathfrak{E}(P)$.) Můžeme tedy utvořit rozšířený K-prostor $C_\infty(T)$ a přiřadit navzájem ty prvky z P a z $C_\infty(T)$, které mají stejné charakteristiky.