Beloslav Riečan
Poznámka o hustote ako množinovej funkcii

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 92 (1967), No. 3, 262--266

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108405`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

# POZNÁMKA O HUSTOTE AKO MNOŽINOVEJ FUNKCII

BELOSLAV RIEČAN, Bratislava

(Došlo 27. júla 1965, prepracované 8. februára 1966)

V práci [1] vyšetroval N. F. G. MARTIN vlastnosti Lebesgueovej hustoty v danom bode na priamke ako množinovej funkcie. V tejto poznámke sú rozšírené Martinove výsledky v dvoch smeroch: 1. Pre symetrickú hustotu $\lim_{r \to 0+} m(E \cap c(x, r))/m(c(x, r))$, kde $c(x, r)$ je sféra v metrickom priestore so stredom v $x$ a polomerom $r$. 2. Lebesgueovu hustotu merateľných podmnožín euklidovského priestoru ľubovoľnej dimenzie.

Ďakujem prof. J. MAŘÍKOVI za cenné pripomienky, ktoré prispeli k zlepšeniu výsledkov.

**1. Definície a označenia.** $X$ je abstraktný priestor, $\mathscr{A}$ $\sigma$-algebra podmnožín $X$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{T}$ systémy podmnožín $X$, $\mathscr{K} \subset \mathscr{A}$, $m$ je konečne aditívna nezáporná funkcia na $\mathscr{A}$, konečná a kladná na $\mathscr{K}$.

**Definícia 1.** Postupnosť $\{E_n\}$ podmnožín $X$ konverguje (vzhľadom k $\mathscr{T}$), ak k ľubovoľnému $T \in \mathscr{T}$ existuje $N$ tak, že pre všetky $n > N$ je $E_n \subset T$. Pre ľubovoľné $E \in \mathscr{A}$ označme znakom $\bar{D}(E)$ suprémum množiny

$$\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{m(E \cap E_n)}{m(E_n)} : \{E_n\} \text{ konverguje, } E_n \in \mathscr{K}\right\},$$

znakom $\underline{D}(E)$ jej infímum. Stále budeme predpokladať, že existuje aspoň jedna konvergentná postupnosť.

**Definícia 2.** Znakom $\mathscr{D}$ budeme značiť systém všetkých $E \in \mathscr{A}$ pre ktoré $\underline{D}(E) = \bar{D}(E)$. Ak $E \in \mathscr{D}$, povieme, že $E$ má hustotu rovnú číslu $D(E) = \underline{D}(E) = \bar{D}(E)$.

**Definícia 3.** Znakom $\mathscr{M}$ budeme značiť systém všetkých $A \in \mathscr{A}$ spĺňajúcich pre ľubovoľné $E \in \mathscr{A}$ rovnosť $\bar{D}(E) = \bar{D}(E \cap A) + \bar{D}(E - A)$.

Príklad 1. Nech $X$ je metrický priestor, $\mathscr{A}$ systém všetkých borelovských množín, $b \in X$, $\mathscr{K} = \mathscr{T}$ je systém všetkých uzavretých gúľ so stredom v $b$. V tomto prípade nazveme $D(E)$ symetrickou hustotou množiny $E$ v bode $b$.

Príklad 2. Nech $X$ je euklidovský priestor, $\mathscr{A}$ systém všetkých lebesgueovsky merateľných množín, $b \in X$, $\mathscr{K}$ systém všetkých ohraničených intervalov do uzáverov ktorých patrí $b$, $\mathscr{T}$ je systém všetkých otvorených množín. Takto obdržanú hustotu budeme nazývať Lebesgueovou.

**2. Všeobecné tvrdenia. Lema 1.** *$A \in \mathscr{D}$ vtedy a len vtedy, keď $\bar{D}(A) + \bar{D}(X - A) = 1$.*

Dôkaz. Ak $A \in \mathscr{D}$, tak, ako ľahko nahliadneme, $X - A \in \mathscr{D}$ a platí $\bar{D}(A) + \bar{D}(X - A) = D(A) + D(X - A) = D(X) = 1$. K dôkazu opačnej implikácie si stačí uvedomiť vzťah $\underline{D}(A \cup B) \leqq \underline{D}(A) + \bar{D}(B)$. Ak je potom $B = X - A$, $\bar{D}(A) + \bar{D}(B) = 1$, je $\bar{D}(A) + \bar{D}(B) = 1 = \underline{D}(X) = \underline{D}(A \cup B)$ a teda $\bar{D}(A) = \underline{D}(A)$.

**Lema 2.** *$\bar{D}$ je nezáporná, subaditívna funkcia definovaná na systéme $\mathscr{A}$.*

Dôkaz. Prvé tvrdenie je zrejmé. Ak $A, A_i \in \mathscr{A}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, tak $m(J \cap A)/m(J) \leqq \sum_{i=1}^{n} m(J \cap A_i)/m(J)$ pre všetky $J \in \mathscr{K}$, teda $\bar{D}(A) \leqq \sum_{i=1}^{n} \bar{D}(A_i)$.

**Lema 3.** *$\mathscr{M} \subset \mathscr{D}$.*

Dôkaz. Nech $A \in \mathscr{M}$, položme $E = X$. Zrejme $1 = \bar{D}(X) = \bar{D}(X - A) + \bar{D}(A)$, teda podľa lemy 1 je $A \in \mathscr{D}$.

**Lema 4.** *$\mathscr{M}$ obsahuje systém všetkých $A \in \mathscr{D}$, pre ktoré je $D(A) = 1$, alebo $D(A) = 0$.*

Dôkaz. Ak $D(A) = 0$, tak $\bar{D}(E \cap A) = 0$ pre všetky $E \in \mathscr{A}$, teda $\bar{D}(E) \geqq \bar{D}(E - A) = \bar{D}(E - A) + \bar{D}(E \cap A) \geqq \bar{D}(E)$. Ak je $D(A) = 1$, tak $D(X - A) = 0$ a platí $\bar{D}(E) = \bar{D}(E - (X - A)) + \bar{D}(E \cap (X - A)) = \bar{D}(E \cap A) + \bar{D}(E - A)$.

**3. Symetrická hustota.** V ďalšom pre každé $r > 0$ je $C(r) \in \mathscr{A}$, $0 < m(C(r))$, pričom $\lim_{r \to 0+} m(C(r)) = 0$ a pre $0 < r < s$ je $C(r) \subset C(s)$. Položme $\mathscr{T} = \mathscr{K} = \{C(r) : r > 0\}$. Zrejme $\bar{D}(E) = \limsup_{r \to 0+} m(E \cap C(r))/m(C(r))$, $\underline{D}(E) = \liminf \ldots$, $D(E) = \lim \ldots$, ak tá limita existuje.

V celom 3. odstavci budeme predpokladať práve uvedenú špeciálnu voľbu systémov $\mathscr{K}$, $\mathscr{T}$. Všimnime si, že k dôkazu nasledujúcej lemy stačí predpokladať subaditívnosť množinovej funkcie $m$.

**Lema 5.** *Nech $A_i \in \mathscr{A}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Potom existujú také množiny $A'_i \in \mathscr{A}$, že $A'_i \subset A_i$, $\bar{D}(A'_i) = \bar{D}(A_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $\bar{D}(\bigcup_{i=1}^{k} A'_i) = \max_i \bar{D}(A_i)$.*

**Dôkaz.** Zvoľme ľubovoľné čísla $a_1^i, b_1^i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ tak, aby $a_1^1 > b_1^1 > a_1^2 > b_1^2 > \ldots > a_1^k > b_1^k$. Nech $n > 1$ a predpokladajme, že sme už definovali $a_i^j$ pre $i < n$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Určme teraz $a_n^j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ tak, aby platilo

$$b_{n-1}^k > a_n^1 > b_n^1 > a_n^2 > b_n^2 > \ldots > a_n^k > b_n^k > 0\,,$$

$$\frac{m(A_i \cap C(a_n^i))}{m(C(a_n^i))} > \bar{D}(A_i) - \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \ldots, k)\,,$$

$$\frac{m(C(a_n^1))}{m(C(b_{n-1}^k))} + \sum_{i=1}^{k} \frac{m(C(b_n^i))}{m(C(a_n^i))} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{m(C(a_n^{i+1}))}{m(C(b_n^i))} < \frac{1}{n}\,.$$

Tým sme definovali $a_n^i, b_n^i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ pre všetky $n$. Položme $A_i' = A_i \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (C(a_n^i) - C(b_n^i))\right)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Pre každé $n$ je zrejmé $C(b_n^i) \cup (A_i' \cap C(a_n^i)) \supset A_i \cap C(a_n^i)$. Je teda

$$\frac{m(A_i' \cap C(a_n^i))}{m(C(a_n^i))} \geqq \frac{m(A_i \cap C(a_n^i))}{m(C(a_n^i))} - \frac{m(C(b_n^i))}{m(C(a_n^i))}\,.$$

Odtiaľ vyplýva, že $\bar{D}(A_i') \geqq \bar{D}(A_i)$, teda $\bar{D}(A_i') = \bar{D}(A_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Pre každé $r > 0$ položme teraz $f(r) = m((\bigcup_{i=1}^{k} A_i') \cap C(r))/m(C(r))$. Ak je $0 < r \leqq b_n^{i-1}$, je zrejme $A_j' \cap C(r) \subset C(a_{n+1}^j)$ pre $j < i$ a $A_j' \cap C(r) \subset C(a_n^j)$ pre $j > i$. Ak je teda $b_n^i < r \leqq b_n^{i-1}$ $(i = 2, 3, \ldots, k)$, je

$$\begin{aligned} f(r) &\leqq \frac{m(A_i \cap C(r))}{m(C(r))} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m(C(a_{n+1}^j))}{m(C(b_n^i))} + \sum_{j=i+1}^{k} \frac{m(C(a_n^j))}{m(C(b_n^i))} \leqq \\ &\leqq \frac{m(A_i \cap C(r))}{m(C(r))} + \frac{m(C(a_{n+1}^1))}{m(C(b_n^k))} + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{m(C(a_{n+1}^j))}{m(C(b_{n+1}^{j-1}))} + \\ &+ \sum_{j=i+1}^{k} \frac{m(C(a_n^j))}{m(C(b_n^{j-1}))} \leqq \frac{m(A_i \cap (C(r))}{m(C(r))} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\,. \end{aligned}$$

Pre $b_n^1 < r \leqq b_{n-1}^k$ je

$$\begin{aligned} f(r) &\leqq \frac{m(A_1 \cap C(r))}{m(C(r))} + \sum_{j=2}^{k} \frac{m(C(a_n^j))}{m(C(b_n^1))} \leqq \frac{m(A_1 \cap C(r))}{m(C(r))} + \sum_{j=2}^{k} \frac{m(C(a_n^j))}{m(C(b_n^{j-1}))} < \\ &< \frac{m(A_1 \cap C(r))}{m(C(r))} + \frac{1}{n}\,. \end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva hneď, že $\bar{D}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i') = \limsup_{r \to 0+} f(r) \leqq \max_i \bar{D}(A_i)$. Pretože $\bar{D}(A_i) = \bar{D}(A_i')$, platí rovnosť.

**Veta 1.** *$\mathcal{M}$ je systém práve tých $E \in \mathcal{A}$ pre ktoré je $D(E) = 0$, alebo $D(E) = 1$.*

Dôkaz. Vzhľadom na lemy 3 a 4 stačí dokázať toto tvrdenie: Ak $0 < D(A) < 1$, tak existuje množina $E \in \mathcal{A}$, pre ktorú $\bar{D}(E) < \bar{D}(E \cap A) + \bar{D}(E - A)$.

Položme $A_1 = A$, $A_2 = X - A$, $E = A_1' \cup A_2'$, kde $A_1'$, $A_2'$ sú množiny z lemy 5. Podľa predpokladu je $D(A_1) > 0$, $D(A_2) > 0$, teda podľa lemy 5 je $\bar{D}(E - A) + \bar{D}(E \cap A) = \bar{D}(A_1') + \bar{D}(A_2') > \max(\bar{D}(A_1), \bar{D}(A_2)) = \bar{D}(E)$.

**Dôsledok.** *Nech $X$ je metrický priestor, $b \in X$, $C(r)$ uzavretá guľa so stredom v $b$ a polomerom $r$, $m$ je miera na systéme všetkých borelovských množín, kladná a konečná na systéme gúľ. Nech $\mathcal{M}$ je systém tých $A \in \mathcal{A}$, ktoré pre každé $E \in \mathcal{A}$ spĺňajú rovnosť $\bar{D}(E) = \bar{D}(E \cap A) + \bar{D}(E - A)$, pričom $\bar{D}(M)$ je horná symetrická hustota množiny $M$ v bode $b$. Potom $\mathcal{M}$ je systém práve tých $E \in \mathcal{A}$ pre ktoré existuje symetrická hustota $D(E)$ a je rovná 0, alebo 1.*

**4. Lebesgueova hustota.** $X$ je metrický priestor, $C(r)$ je uzavretá guľa o polomere $r$ so stredom v bode $b \in X$, $\mathcal{T} = \{C(r) : r > 0\}$, $\mathcal{K}$ je systém množín. Ďalej je daná množina $R \subset X$, ktorá spolu so systémom $\mathcal{K}$ spĺňa nasledujúce podmienky: Pre každé $E \in \mathcal{K}$, pre ktoré $m(E \cap R) > 0$ (resp. $m(E - R) > 0$), je $E \cap R \in \mathcal{K}$ (resp. $E - R \in \mathcal{K}$). Ku každému $r > 0$ existujú $E, F \in \mathcal{K}$ tak, že $E \cup F \subset C(r)$, $E \subset R$, $F \subset X - R$.

**Lema 6.** *Nech existuje $D(M)$. Potom $\bar{D}(M \cap R) = D(M) = \bar{D}(M - R)$.*

Dôkaz. Podľa predpokladu existujú $E_n \in \mathcal{K}$ tak, že $E_n \to b$, $E_n \subset R$. Odtiaľ ľahko vyplýva, že $D(M) \leqq \bar{D}(M \cap R)$; zrejme tu platí rovnosť. Podobne sa dokáže vzťah $\bar{D}(M - R) = D(M)$.

**Lema 7.** *Pre každé $M \in \mathcal{A}$ je $\bar{D}(M) = \max(\bar{D}(M \cap R), \bar{D}(M - R))$.*

Dôkaz. Zrejme $\max(\bar{D}(M \cap R), \bar{D}(M - R)) \leqq \bar{D}(M)$. Predpokladajme, že v predošlom vzťahu platí ostrá nerovnosť; odvodíme spor. Existuje číslo $c$, pre ktoré $\max(\bar{D}(M \cap R), \bar{D}(M - R)) < c < \bar{D}(M)$. Existuje $r > 0$ že pre všetky $E \in \mathcal{K}$ pre ktoré $E \subset C(r)$ je $m(M \cap R \cap E) \leqq c\, m(E)$. Majme také $E$. Ak je $m(E \cap R) > 0$, je podľa predpokladu $E \cap R \in \mathcal{K}$ a teda $m(M \cap E \cap R) = m((M \cap R) \cap (E \cap R)) \leqq \leqq c\, m(E \cap R)$; táto nerovnosť je zrejmá, ak platí $m(E \cap R) = 0$. Podobne sa dokáže vzťah $m(M \cap (E - R)) \leqq c\, m(E - R)$. Je teda $m(M \cap E) \leqq c\, m(E)$, takže $\bar{D}(M) \leqq \leqq c$, čo je spor.

**Lema 8.** *Nech $0 < D(A) < 1$. Položme $E = (A - R) \cup (R - A)$. Potom $\bar{D}(E \cap A) + \bar{D}(E - A) > \bar{D}(E)$.*

Dôkaz. Podľa lemy 6 je $\bar{D}(E \cap A) = \bar{D}(A - R) = D(A)$, $\bar{D}(E - A) = \bar{D}(R - A) = \bar{D}((X - A) \cap R) = D(X - A) = 1 - D(A)$, takže $\bar{D}(E \cap A) + \bar{D}(E -$

$- A) = 1$. Podľa lemy 7 je $\bar{D}(E) = \max(\bar{D}(E \cap R), \bar{D}(E - R)) = \max(\bar{D}(R - A), \bar{D}(A - R)) = \max(1 - D(A), D(A)) < 1$.

**Veta 2.** *$\mathcal{M}$ je systém práve tých množín $E \in \mathcal{A}$, pre ktoré je $D(E) = 0$, alebo $D(E) = 1$.*

Dôkaz. Vyplýva z liem 3, 4 a 8.

**Dôsledok.** *Nech $D(E)$ resp. $\bar{D}(E)$ je Lebesgueova hustota resp. horná hustota množiny $E$ v bode $b$, $\mathcal{M}$ systém množín $E \in \mathcal{A}$, ktoré spĺňajú rovnosť $\bar{D}(F) = \bar{D}(F \cap E) + \bar{D}(F - E)$ pri ľubovoľnom $F \in \mathcal{A}$. Potom $\mathcal{M}$ je systém práve tých $E \in \mathcal{A}$, ktorých Lebesgueova hustota existuje a rovná sa 0, alebo 1.*

Dôkaz. Vezmime systém $\mathcal{K}$ všetkých ohraničených intervalov do uzáverov ktorých patrí $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Ďalej položme $R = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1 \geqq b_1\}$.

### *Literatúra*

[1] *Martin N. F. G.*: Lebesgue density as a set function, Pacific J. of Math., 7 (1961), 699—704.

*Adresa autora:* Bratislava, Gottwaldovo nám. 2a, (Slovenská vysoká škola technická).

## Резюме

### ЗАМЕТКА О ПЛОТНОСТИ КАК О ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА

БЕЛОСЛАВ РИЕЧАН, (Beloslav Riečan), Братислава

Н. Ф. Г. Мартин изучал некоторые свойства плотности на прямой как функции множества. В настоящей статье распространяются результаты Мартина по двум направлениям: для симметрической плотности (теорема 1) и для плотности Лебега в евклидовом пространстве любой размерности (теорема 2).

## Summary

### NOTE ON THE DENSITY AS A SET FUNCTION

BELOSLAV RIEČAN, Bratislava

N. F. G. Martin has studied some properties of Lebesgue density on the line as a set function. In this article Martin's results are extended in two directions; for symmetric density (theorem 1) and for Lebesgue density in Euclidean space of any dimension (theorem 2).