MIERY V KARTÉZSKYCH SÚČINOCH

IGOR KLUVÁNEK, Košice

(Došlo 20. ledna 1966)

V niektorých súvislostiach je zaujímavá nasledujúca otázka.

Dané sú merateľné priestory $(X, \mathscr{S})$ a $(Y, \mathscr{T})$ a funkcia λ na systéme $\mathscr{Q}$ všetkých množín tvaru $E \times F$, $E \in \mathscr{S}$, $F \in \mathscr{T}$. Predpokladáme, že $\lambda(E \times F)$ pri každom pevnom $F \in \mathscr{T}$ je spočetne aditívna na $\mathscr{S}$ ako funkcia E a pri každom $E \in \mathscr{S}$ je spočetne aditívna na $\mathscr{T}$ ako funkcia F. Otázka je, či je λ spočetne aditívna na $\mathscr{Q}$ ako funkcia $E \times F$.

V tomto článku je daná kladná odpoveď na túto otázku pre prípad, že sa jedná o systémy $\mathscr{S}$, $\mathscr{T}$ bairovských množín v lokálne kompaktných priestoroch X, Y a za ďalších predpokladov o regulárnosti pre prípad borelovských množín.

Terminológia z teórie miery je v súlade s [1].

V ďalšom X a Y sú lokálne kompaktné Hausdorffove priestory, $Z = X \times Y$. Ďalej $\mathscr{S}_0$, resp. $\mathscr{S}$ značí systém všetkých bairovských, resp. borelovských množín v X. Podobný význam má $\mathscr{T}_0$ a $\mathscr{T}$ v Y a $\mathscr{W}_0$ a $\mathscr{W}$ v Z.

Označme

$$\mathscr{Q}_0 = \{E \times F : E \in \mathscr{S}_0, F \in \mathscr{T}_0\}\,, \quad \mathscr{Q} = \{E \times F : E \in \mathscr{S}, F \in \mathscr{T}\}\,.$$

Ak λ je nejaká funkcia na $\mathscr{Q}_0$, pre ľubovoľnú $E \in \mathscr{S}_0$ znak $_E\lambda$ bude znamenať funkciu na $\mathscr{T}_0$ definovanú rovnosťou $_E\lambda(F) = \lambda(E \times F)$.

Podobne pre $F \in \mathscr{T}_0$ označíme λ_F funkciu na $\mathscr{S}_0$, pre ktorú $\lambda_F(E) = \lambda(E \times F)$.

Podobné definície prijímame i pre funkciu λ na $\mathscr{Q}$.

Ešte označíme $\mathscr{R}_0$, resp. $\mathscr{R}$ najmenší okruh množín, obsahujúci $\mathscr{Q}_0$, resp. $\mathscr{Q}$. Je známe [1; Theorem 33 E], že $\mathscr{R}_0$, resp. $\mathscr{R}$ pozostáva zo všetkých množín tvaru

(1) $$G = \bigcup_{i=1}^{k} E_i \times F_i\,,$$

kde $\{E_i \times F_i\}$ je konečný systém navzájom disjunktných množín z $\mathscr{Q}_0$, resp. $\mathscr{Q}$.

Ak λ je aditívna funkcia na $\mathscr{Q}_0$, resp. $\mathscr{Q}$, potom na $\mathscr{R}_0$, resp. $\mathscr{R}$ existuje práve jedna aditívna funkcia ν taká, že ν sa zhoduje s λ na $\mathcal{Q}_0$, resp. $\mathcal{Q}$. Funcia ν je definovaná rovnosťou

$$\nu(G) = \sum_{i=1}^{k} \lambda(E_i \times F_i), \tag{2}$$

pre každú množinu G vyjadrenú v tvare (1) [1; Exercise 8.5].

Veta 1. *Nech λ je funkcia na $\mathcal{Q}_0$ s vlastnosťami:*

(i) *Hodnoty λ sú nezáporné reálne čísla alebo ∞, pričom $\lambda(C \times D) < \infty$ pre ľubovoľné kompaktné $C \in \mathcal{S}_0$, $D \in \mathcal{T}_0$.*

(ii) *Pre každé $E \in \mathcal{S}_0$ je ${}_E\lambda$ σ-aditívna na $\mathcal{T}_0$.*

(iii) *Pre každé $F \in \mathcal{T}_0$ je λ_F σ-aditívna na $\mathcal{S}_0$.*

Potom je λ σ-aditívna na $\mathcal{Q}_0$.

Dôkaz. Ľahko sa zistí, že λ na $\mathcal{Q}_0$ je aditívna funkcia [1; Theorem 33 D, Exercise 75] a teda i funkcia ν definovaná rovnosťou (2) na $\mathcal{R}_0$ je aditívna .

Dokážeme tvrdenie:

(A) *Pre každú množinu $G \in \mathcal{R}_0$ takú, že $\nu(G) < \infty$, a $\varepsilon > 0$ existuje kompaktná množina $C \in \mathcal{R}_0$ a otvorená množina $U \in \mathcal{R}_0$ tak, že $C \subset G \subset U$ a $\nu(U - C) < \varepsilon$. Ak je $\nu(G) = \infty$, pre každé číslo K existuje kompaktná množina $C \in \mathcal{R}_0$ tak, že $C \subset G$ a $\nu(C) > K$.*

Je známe [1; Theorem 52G], že každá miera na $\mathcal{S}_0$ a $\mathcal{T}_0$ je regulárna, čiže platí (A), ak nahradíme $\mathcal{R}_0$ znakom $\mathcal{S}_0$, prípadne $\mathcal{T}_0$. (Pre ohraničené množiny z $\mathcal{S}_0$ prípadne $\mathcal{T}_0$ vyplýva (A) priamo z definície regulárnosti [1; § 52], pre neohraničené zo skutočnosti, že každá bairovská množina je súčtom postupnosti ohraničených bairovských množín.)

Predpokladajme najskôr, že $G = E \times F \in \mathcal{Q}_0$, $\nu(G) < \infty$. Z regulárnosti λ_F vyplýva, že existuje kompaktná množina $C_1 \in \mathcal{S}_0$ a otvorená množina $U_1 \in \mathcal{S}_0$ tak, že $C_1 \subset E \subset U_1$ a $\lambda_F(U_1 - C_1) = \lambda((U_1 - C_1) \times F) < \varepsilon/3$. Ďalej z regulárnosti ${}_{U_1}\lambda$ vyplýva existencia otvorenej množiny $U_2 \in \mathcal{T}_0$ takej, že $F \subset U_2$ a $\lambda(U_1 \times (U_2 - F)) < \varepsilon/3$. Konečne z regulárnosti ${}_{C_1}\lambda$ vyplýva existencia takej kompaktnej množiny $C_2 \in \mathcal{T}_0$, že $C_2 \subset F$ a $\lambda(C_1 \times (F - C_2)) < \varepsilon/3$.

Množina $C_1 \times C_2$ je kompaktná a patrí do $\mathcal{R}_0$, množina $U_1 \times U_2$ je otvorená a patrí do $\mathcal{R}_0$, ďalej $C_1 \times C_2 \subset G \subset U_1 \times U_2$ a $\nu((U_1 \times U_2) - (C_1 \times C_2)) = \lambda(U_1 \times (U_2 - F)) + \lambda((U_1 - C_1) \times F) + \lambda(C_1 \times (U_2 - F)) < \varepsilon$.

Ak teraz G je ľubovoľná množina tvaru (1), $\nu(G) < \infty$, pre každé $i = 1, 2, \dots, k$ nájdeme kompaktnú množinu $C^{(i)} \in \mathcal{R}_0$ a otvorenú množinu $U^{(i)} \in \mathcal{R}_0$ tak, aby bolo $C^{(i)} \subset E_i \times F_i \subset U^{(i)}$ a $\nu(U^{(i)} - C^{(i)}) < \varepsilon/k$. Potom bude $C = \bigcup_{i=1}^{k} C^{(i)}$ kompaktná, $U = \bigcup_{i=1}^{k} U^{(i)}$ otvorená, $C \subset G \subset U$; $C, U \in \mathcal{R}_0$ a $\nu(U - C) < \varepsilon$.

Časť tvrdenia (A) týkajúcu sa prípadu $\nu(G) = \infty$ dokážeme podobným postupom z definície regulárnosti ako časť pre prípad $\nu(G) < \infty$.

Z vlastnosti (A) a z aditívnosti ν na $\mathscr{R}_0$ vyplýva σ-aditívnosť na $\mathscr{R}$. To je obsahom vety Alexandrovovej dokázanej napr. v [2; III.5.13] pre prípad, že Z je kompaktný priestor. Ale dôkaz z [2] si vyžaduje iba triviálne úpravy, aby sa hodil i na náš lokálne kompaktný prípad.

Dôsledok 1. *Ak λ je funkcia spĺňajúca predpoklady vety* 1, *na $\mathscr{W}_0$ existuje jediná miera μ_0 a na $\mathscr{W}$ jediná regulárna miera μ taká, že pre $E \times F \in \mathscr{Q}_0$ je $\mu(E \times F) = \mu_0(E \times F) = \lambda(E \times F)$.*

Dôkaz. Funkcia ν je jediné aditívne rozšírenie λ na $\mathscr{R}_0$. Dokázali sme σ-aditívnosť funkcie ν na $\mathscr{R}_0$. Z klasických viet vyplýva (pozri [1; Theorem 13A]), že na σ-okruhu vytvorenom $\mathscr{R}_0$ existuje jediná miera μ_0, ktorá sa zhoduje s ν na $\mathscr{R}_0$. Tento σ-okruh je však $\mathscr{W}_0$ [1; Theorem 51E]. Ďalej bairovská miera μ_0 na $\mathscr{W}_0$ sa dá rozšíriť jediným spôsobom na regulárnu borelovskú mieru μ na $\mathscr{W}$ [1; Theorem 54D].

Dôsledok 2. *Nech λ je funkcia na $\mathscr{Q}$ s vlastnosťami*

(i) *Hodnoty λ sú nezáporné reálné čísla alebo ∞, pričom $\lambda(C \times D) < \infty$ pre kompaktné $C \in \mathscr{S}$, $D \in \mathscr{T}$.*

(ii) *Pre každé $E \in \mathscr{S}$ je ${}_E\lambda$ aditívna a regulárna na $\mathscr{T}$.*

(iii) *Pre každé $F \in \mathscr{T}$ je λ_F aditívna a regulárna na $\mathscr{S}$.*

Potom je λ σ-aditívna na $\mathscr{Q}$ a na $\mathscr{W}$ existuje jediná regulárna miera μ, ktorá sa zhoduje s λ na $\mathscr{Q}$.

Dôkaz. Keďže podľa Alexandrovovej vety z regulárnosti a aditívnosti vyplýva σ-aditívnosť, zúženie na $\mathscr{Q}_0$ (parciálna funkcia) λ_0 funkcie λ spĺňa predpoklady vety. Podľa dôsledku 1 existuje teda jediná regulárna miera μ na $\mathscr{W}$, ktorá sa zhoduje s λ_0 na $\mathscr{Q}_0$.

Nech $E \in \mathscr{S}_0$ je ľubovoľná množina. Ak pre $F \in \mathscr{T}$ položíme $\sigma(F) = \mu(E \times F)$, ľahko sa zistí, že σ je regulárna miera na $\mathscr{T}$, ďalej pre $F \in \mathscr{S}_0$ je $\mu(E \times F) = \lambda_0(E \times F) = \lambda(E \times F)$, čiže $\sigma(F) = {}_E\lambda(F)$, $F \in \mathscr{T}_0$. Keďže regulárne miery na $\mathscr{T}$, ktoré splývajú na $\mathscr{T}_0$, sú totožné [1; Theorem 52H], je $\sigma(F) = {}_E\lambda(F)$ pre $F \in \mathscr{T}$, čo znamená, že $\mu(E \times F) = \lambda(E \times F)$ pre $E \in \mathscr{S}_0$, $F \in \mathscr{T}$.

Teraz pre ľubovoľnú množinu $F \in \mathscr{T}$ uvažujeme o funkcii τ definovanej na $\mathscr{S}$ rovnosťou $\tau(E) = \mu(E \times F)$, $E \in \mathscr{S}$. Zasa je ľahké zistiť, že τ je regulárna na $\mathscr{S}$ a že $\tau(E) = \lambda_F(E)$ pre $E \in \mathscr{S}_0$. Odtiaľ už z jednoznačnosti regulárnej borelovskej miery dostaneme, že $\mu(E \times F) = \lambda(E \times F)$ pre $E \in \mathscr{S}$, $F \in \mathscr{T}$.

Pred vyslovením nasledujúcej vety pripomenieme, že komplexná σ-aditívna funkcia je regulárna, ak jej variácia je regulárna.

Veta 2. *Nech λ je funkcia na $\mathscr{Q}_0$ s vlastnosťami:*

(i) ***Hodnoty λ sú komplexné čísla a príslušná funkcia ν definovaná vzťahom** (2) **je na $\mathscr{R}_0$ ohraničená.***

(ii) *Pre každé $E \in \mathscr{S}_0$ je ${}_E\lambda$ σ-aditívna na $\mathscr{T}_0$.*

(iii) *Pre každé $F \in \mathscr{T}_0$ je λ_F σ-aditívna na $\mathscr{S}_0$.*

Potom je λ σ-aditívna na $\mathscr{Q}_0$ a na $\mathscr{W}_0$ existuje σ-aditívna funkcia μ_0, ktorá sa na $\mathscr{Q}_0$ zhoduje s λ a na $\mathscr{W}$ jediná regulárna σ-aditívna funkcia μ, ktorá sa na $\mathscr{Q}_0$ zhoduje s λ.

Dôkaz. Pretože ν je ohraničená a aditívna na $\mathscr{R}_0$, má na $\mathscr{R}_0$ ohraničenú variáciu $|\nu|$, ktorá je tiež aditívna [2; III. 1.6]. Ukážeme, že pre parciálnu funkciu z funkcie $|\nu|$ branú na $\mathscr{Q}_0$ (túto parciálnu funkciu značíme zasa $|\nu|$) sa splnia predpoklady vety 1.

Predpoklad (i) je zrejme splnený.

Ukážeme, že sa splnia i predpoklady (ii) a (iii). Budeme v ďalšom predpokladať, že ide o reálnu funkciu λ (tedy i ν), pretože môžeme odbaviť reálnu a imaginárnu časť zvlášť.

Nech $E \in \mathscr{S}_0$ je ľubovoľná množina. Nech $\{F_n\}$ je postupnosť disjunktných množín z $\mathscr{T}_0$ a nech $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Keďže $|\nu|$ je nezáporná a aditívna, pre $m = 1, 2, \ldots$ je $|\nu|(E \times F) \geqq \sum_{n=1}^{m} |\nu|(E \times F_n)$, odkiaľ $|\nu|(E \times F) \geqq \sum_{n=1}^{\infty} |\nu|(E \times F_n)$. Z druhej strany, nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Existuje $G \in \mathscr{R}_0$ tak, že $G \subset E \times F$ a $|\nu|(E \times F) - \varepsilon < |\nu(G)|$. Nech $G = \bigcup_{n=1}^{k} E'_i \times F'_1$ s disjunktnými $E'_i \times F'_i \in \mathscr{Q}_0$. Potom platí

$$|\nu|(E \times F) - \varepsilon < \left|\sum_{i=1}^{k} \lambda(E'_i \times F'_i)\right| \leqq \sum_{i=1}^{k} |\lambda(E'_i \times F'_i)| =$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \left|\lambda(E'_i \times ((\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \cap F'_i))\right| = \sum_{i=1}^{k} \left|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E'_i \times (F_n \cap F'_i))\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} |\lambda(E'_i \times (F_n \cap F'_i))| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |\nu|(E \times F_n).$$

Vzhľadom na to, že ε je ľubovoľné, máme $|\nu|(E \times F) = \sum_{n=1}^{\infty} |\nu|(E \times F_n)$. Tým je overený predpoklad (ii). Predpklad (iii) sa overí podobne.

Podľa dôsledku 1 existuje jediná regulárna miera $|\mu|$ na $\mathscr{W}$, ktorá sa na $\mathscr{R}_0$ shoduje s $|\nu|$. Keďže $|\nu|$ je ohraničená, je i $|\mu|$ ohraničená.

Zo systému $\mathscr{W}$ urobíme metrický priestor tak, že položíme $\varrho(G_1, G_2) = |\mu|(G_1 - G_2) + |\mu|(G_2 - G_1)$, pre $G_1, G_2 \in \mathscr{W}$ (a samozrejme stotožníme G_1, G_2, ak $\varrho(G_1, G_2) = 0$).

Z nerovnosti $|\nu(G)| \leqq |\nu|(G) = |\mu|(G)$ vyplýva, že ν je rovnomerne spojitá na podpriestore priestoru $\mathscr{W}$, ktorý predstavuje systém $\mathscr{R}_0$. Ďalej je známe, že $\mathscr{R}_0$ je hustá vo $\mathscr{W}_0$ [1; Theorem 13D] a tiež vo $\mathscr{W}$ (v skutočnosti ako množiny v metrickom priestore $\mathscr{W}$ a $\mathscr{W}_0$ splývajú). Dá sa teda ν rozšíriť a to jediným spôsobom na spojitú funkciu μ definovanú na $\mathscr{W}$. Z jej spojitosti sa ľahko odvodí, že je σ-aditívna a regulárna.

Dôsledok 3. *Nech λ je komplexná funkcia na $\mathscr{Q}$ s vlastnosťami:*

(i) *Príslušná funkcia v je na $\mathscr{R}$ ohraničená.*

(ii) *Pre každé $E \in \mathscr{S}$ je ${}_E\lambda$ na $\mathscr{T}$ aditívna a regulárna.*

(iii) *Pre každé $F \in \mathscr{T}$ je λ_F na $\mathscr{S}$ aditívna a regulárna.*

Potom je λ σ-aditívna na $\mathscr{Q}$ a na $\mathscr{W}$ existuje jediná regulárna σ-aditívna funkcia μ, ktorá sa shoduje s λ na $\mathscr{Q}$.

Dôkaz je podobný ako pre dôsledok 2, preto podrobnosti vynecháme.

Literatúra

[1] *Halmos P. R.:* Measure Theory. Van Nostrand, New York 1950.

[2] *Dunford N., Schwartz J. T.:* Linear Operators. Part I. General Theory. Interscience Publ. New York, London 1958.

Adresa autora: Košice, Nám. Februárového víťazstva 9 (Univerzita P. J. Šafárika).

Резюме

МЕРЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВ

ИГОРЬ КЛУВАНЕК (Igor Kluvánek), Кошице

Пусть X, Y – локально компактные хаусдорфовые пространства и пусть $Z = X \times Y$. Далее, пусть $\mathscr{Q}$ система всех множеств $G = E \times F$ где $E \subset X$, $F \subset Y$ борелевские множества.

Если λ такая функция на $\mathscr{Q}$ что $E \to \lambda(E \times F)$ является регулярной борелевской мерой в X для любого борелевского $F \subset Y$ и $F \to \lambda(E \times F)$ является регулярной борелевской мерой в X для любого борелевского множества $E \subset X$, то функция λ σ-аддтивна на $\mathscr{Q}$ и может быть продолжена до регулярной борелевской меры в Z.

Аналогичное утверждение имеет место при некотором условии тоже для функции λ не обьязательно неотрицательной.

Summary

MEASURES IN PRODUCT-SPACES

IGOR KLUVÁNEK, Košice

Let X and Y be locally compact Hausdorff spaces and let $Z = X \times Y$. Let $\mathcal{Q}$ be the system of all sets $G = E \times F$, where $E \subset X$, $F \subset Y$ are Borel sets.

Let λ be a real-valued function on $\mathcal{Q}$ such that, for every Borel set $F \subset Y$, $E \to \lambda(E \times F)$ is a regular Borel measure in X and, for every Borel set $E \subset X$, $F \to \lambda(E \times F)$ is a regular Borel measure in Y. Then λ is σ-additive on $\mathcal{Q}$ and can be extended to a regular Borel measure in Z.

Under a certain condition an analogous statement is true without the supposition that λ is positive.