Petr Mandl
Note sur les espaces compacts des mesures de probabilité

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 2, 133--140

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108388`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

NOTE SUR LES ESPACES COMPACTS DES MESURES DE PROBABILITÉ

PETR MANDL, Praha

(Reçu le 26 septembre 1958)

Dans ce travail la compacticité dans la topologie faible de l'espace des mesures de probabilité de Baire sur un espace topologique dénombrablement compact est démontrée. Une assertion analogue est prouvée pour les mesures de Borel. On donne une application de ces théorèmes à l'introduction des mesures dans les produits cartésiens.

J. H. BLAU [1] a étudié des espaces topologiques dont éléments sont les mesures régulières de Borel sur un espace donné topologique X et a posé la question si l'on peut généraliser le théorème de N. KRYLOV et N. BOGOLIOUBOV [4] que l'espace des mesures de probabilité sur un espace métrique compact est compact. La démonstration d'un théorème général de ce genre dans le travail [3] est incorrecte.

Dans le travail présent on démontre la compacticité de l'espace des mesures de probabilité de Baire sur un espace topologique dénombrablement compact et la compacticité de l'espace des mesures de prob. de Borel régulières, si l'espace considéré est de plus normal.

Introduisons d'abord les notions fondamentales. (Voir par ex. [5].) Si X est un espace topologique, on appelle les ensembles de Baire (de Borel) les élements de la plus petite σ-algèbre $\mathscr{B}_0(X)$ ($\mathscr{B}_1(X)$) contenant le système $\mathscr{G}_0(X)$ des ensembles de la forme $\{x : g(x) > 0\}$ où g est une fonction sur X continue (contenant le système $\mathscr{G}_1(X)$ des ensembles ouverts de X). Dénotons ensuite par $\mathscr{F}_0(X)$ ($\mathscr{F}_1(X)$) le système de tous les $X - G$, $G \in \mathscr{G}_0(X)$ ($G \in \mathscr{G}_1(X)$), par $\mathscr{S}(X)$ le système de toutes les fonctions continues, nonnégatives et bornées sur X. Soit encore $\mathscr{P}_0(X)$ le système de toutes les mesures de prob. sur $\mathscr{B}_0(X)$; $\mathscr{P}_1(X)$ le système de toutes les mesures de prob. régulières sur $\mathscr{B}_1(X)$.

Sur l'ensemble $\mathscr{P}_0(X)$ nous définissons la topologie W, sous laquelle le système complet des entourages de la mesure P_0 est formé par les intersections finies des entourages fondamentals

$$W(P_0, f, \varepsilon) = \{P \in \mathscr{P}_0(X) : |\int f \,\mathrm{d}P - \int f \,\mathrm{d}P_0| < \varepsilon\}$$

où $f \in \mathscr{S}(X)$, $\varepsilon > 0$.

Nous démontrons d'abord deux propriétés de l'espace $(\mathscr{P}_0(X), W)$.

Théorème 1. $(\mathscr{P}_0(X), W)$ *est un espace de Hausdorf.*

Démonstration. Soit $P_1 \neq P_2$. Il existe un $G \in \mathscr{G}_0(X)$ tel que $P_1(G) \neq P_2(G)$. Si

$$G = \{x : f(x) > 0\}\,, \quad f \in \mathscr{S}(X) \quad \text{et} \quad g_n = \min(nf, 1)\,.$$

on a

$$P_i(G) = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, \mathrm{d}P_i\,.$$

Il existe ainsi un N tel que

$$\left|\int g_N \, \mathrm{d}P_1 - \int g_N \, \mathrm{d}P_2\right| = \varepsilon > 0\,,$$

d'où pour $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$

$$W(P_1, g_N, \delta) \cap W(P_2, g_N, \delta) = 0\,.$$

Théorème 2. *La topologie W est identique avec la topologie O définie par les entourages fondamentals* $O(P_0, F, \varepsilon) = \{P \in \mathscr{P}_0(X) : P(F) < P_0(F) + \varepsilon\}$, *où* $F \in \mathscr{F}_0(X)$, $\varepsilon > 0$.

Démonstration. 1. Pour chaque $O(P_0, F, \varepsilon)$ il existe un $W(P_0, f, \delta)$ tel que $O(P_0, F, \varepsilon) \supset W(P_0, f, \delta)$. Soit $F = \{x \in X : g(x) = 0\}$, $g \in \mathscr{S}(X)$. Si $h_n = 1 - \min(ng, 1)$ on a pour $P \in \mathscr{P}_0(X)$

$$\int h_n \, \mathrm{d}P \geqq P(F) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int h_n \, \mathrm{d}P = P(F)\,.$$

Soit

$$\int h_N \, \mathrm{d}P_0 < P_0(F) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

On a pour

$$P \in W\left(P_0, h_N, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$P(F) \leqq \int h_N \, \mathrm{d}P < \int h_N \, \mathrm{d}P_0 + \frac{\varepsilon}{2} < P_0(F) + \varepsilon\,.$$

2. Pour chaque $W(P_0, f, \varepsilon)$ on peut trouver un entourage Ω de P_0 dans le sens de la topologie O tel que $\Omega \subset W(P_0, f, \varepsilon)$. Soit $h \in \mathscr{S}(X)$, $\alpha < \beta$ deux nombres réels. Dénotons

$$H = \{x : h(x) = \alpha\} \cup \{x : h(x) = \beta\}\,,$$
$$G = \{x : \alpha < h(x) < \beta\}\,, \quad F_1 = X - G\,, \quad F_2 = G \cup H\,.$$

Si nous posons

$$g_1 = \max\{0, h(x) - \alpha\}\,, \quad g_2 = \max\{0, \beta - h(x)\}\,,$$
$$f_1 = \min\{g_1, g_2\}\,, \quad f_2 = \max\{0, \alpha - h(x), h(x) - \beta\}\,,$$

nous avons $F_k = \{x : f_k(x) = 0\} \in \mathscr{F}_0(X)$ où $k = 1, 2$. Si $P_0 \in \mathscr{P}_0(X)$, $P_0(H) = 0$, on a

$$P \in O(P_0, F_1, \delta) \cap O(P_0, F_2, \delta) \Rightarrow |P(G) - P_0(G)| < \delta .$$

Nous avons

$$P \in O(P_0, F_1, \delta) \Rightarrow P(F_1) < P_0(F_1) + \delta \Rightarrow P(G) > P_0(G) - \delta$$

et

$$P \in O(P_0, F_2, \delta) \Rightarrow P(G) \leqq P(F_2) < P_0(F_2) + \delta = P_0(G) + \delta .$$

Si maintenant

$$y_0 < \inf f < y_1 < y_2 < \ldots < y_{r-1} < \sup f = M < y_r ,$$

$$\max y_i - y_{i-1} < \frac{\varepsilon}{4} , \quad P_0(f(x) = y_i) = 0 , \quad G_i = \{x : y_{i-1} < f < y_i\} ,$$

nous trouvons les entourages Ω_i dans la topologie O de la mesure P_0 pour lesquels

$$P \in \Omega_i \Rightarrow |P(G_i) - P_0(G_i)| < \delta = \frac{\varepsilon}{4Mr} .$$

L'existence de tels entourages vient d'être démontrée. Si $\Omega = \bigcap_{i=1}^{r} \Omega_i$, il est pour $P \in \Omega$

$$1 - r\delta = P_0(\cup G_i) - r\delta = \Sigma(P_0(G_i) - \delta) \leqq \Sigma P(G_i) = P(\cup G_i) .$$

Ainsi

$$P(X - \cup G_i) \leqq r\delta , \quad |\Sigma y_{i-1} P_0(G_i) - \Sigma y_{i-1} P(G_i)| < Mr\delta$$

et

$$\left| \int_{\cup G_i} f \,\mathrm{d}P - \Sigma y_{i-1} P(G_i) \right| < \frac{\varepsilon}{4} .$$

Parce qu'il est $\int_{X - \cup G_i} f \,\mathrm{d}P_0 = 0$, nous avons

$$\left| \int f \,\mathrm{d}P - \int f \,\mathrm{d}P_0 \right| \leqq \left| \int_{X - \cup G_i} f \,\mathrm{d}P \right| + \left| \int_{\cup G_i} f \,\mathrm{d}P - \Sigma y_{i-1} P(G_i) \right| +$$

$$+ |\Sigma y_{i-1} P(G_i) - \Sigma y_{i-1} P_0(G_i)| + \left| \Sigma y_{i-1} P_0(G_i) - \int_{\cup G_i} f \,\mathrm{d}P_0 \right| \leqq$$

$$\leqq Mr\delta + \frac{\varepsilon}{4} + Mr\delta + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon .$$

Ainsi

$$P \in \Omega \Rightarrow P \in W(P_0, f, \varepsilon) .$$

Dans ce qui suit en étudiant l'espace $(\mathscr{P}_0(X), W)$ nous nous servirons des entourages fondamentals de la topologie O. Sur l'ensemble $\mathscr{P}_1(X)$ nous définissons la topologie O, c'est à dire que le système complet d'entourages de l'élément P_0 de $\mathscr{P}_1(X)$ est formé par les interse ctions finies des ensembles $O(P_0, F, \varepsilon) = \{P \in \mathscr{P}_1(X) : P(F) < P_0(F) + \varepsilon\}$ où $\varepsilon > 0$, $F \in \mathscr{F}_1(X)$.

Théorème 3. *Dans le cas où X est un espace normal, l'espace $(\mathscr{P}_1(X), O)$ est un sousespace de l'espace $(\mathscr{P}_0(X), W)$.*

Démonstration. Si $G \supset F$, $G \in \mathscr{G}_1(X)$, $F \in \mathscr{F}_1(X)$ il existe un $F_0 \in \mathscr{F}_0(X)$ tel que $G \supset F_0 \supset F$. Nous nous convainquons de cela si nous séparons $X - G$ et F par une fonction continue. Nous voyons ainsi que la probabilité $P_0 \in \mathscr{P}_1(X)$ est déterminée par ses valeurs sur $\mathscr{F}_0(X)$ et nous la pouvons identifier avec l'élément de $\mathscr{P}_0(X)$ correspondant. Parce que $P_0(F) = \inf_{G \supset F} P_0(G)$ nous pouvons atteindre que $P_0(F_0) < P_0(F) + \frac{\varepsilon}{2}$ et de cela il suit que $O\left(P_0, F_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset$ $\subset O(P_0, F, \varepsilon)$. Si nous faisons l'usage du théorème 2 nous trouvons que la topologie de l'espace $(\mathscr{P}_1(X), O)$ est la topologie relative de l'ensemble $\mathscr{P}_1(X)$ dans l'espace $(\mathscr{P}_0(X), W)$.

Il suit du théorème 3 que dans le cas de X normal, les théorèmes 1 et 2 sont valables pour l'espace $(\mathscr{P}_1(X), O)$, ce que sont les résultats contenus dans le travail [1] d'où nous avons aussi repris avec une petite modification une partie de la démonstration du théorème 2.

Théorème 4. *Si X est un espace normal, $\mathscr{P}_1(X)$ est un ensemble dense dans $(\mathscr{P}_0(X), W)$.*

Démonstration. Soit $P_0 \in \mathscr{P}_0(X)$, $\Omega = \bigcap_{i=1}^{n} O(P_0, F_i, \varepsilon)$, $F_i \in \mathscr{F}_0(X)$. Formons le système de toutes les intersections $H_\alpha = H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$ où $H_i = F_i$ ou $X - F_i$. Dans le cas où $H_\alpha \neq 0$ choisisons un $x_\alpha \in H_\alpha$ et posons

$$P(\{x_\alpha\}) = P_0(H_\alpha)\,, \quad P(A) = \sum_{x_\alpha \in A} P(\{x_\alpha\})\,, \quad A \in \mathscr{B}_1(X)\,.$$

On a évidemment $P \in \mathscr{P}_1(X)$ et $P(F_i) = P_0(F_i)$. Ainsi $P \in \Omega$.

Rappelons encore une propriété des systèmes centrés des ensembles.

Lemme. *Soit C un système maximal centré des sousensembles de l'ensemble M, f une fonction sur M, prennant les valeurs dans l'ensemble M_1. Le système centré C_1 de tous les $A \subset M_1$ pour lesquels $f(B) \subset A$ pour un $B \in C$ quelconque est maximal.*

Démonstration. Que $Y \subset M_1$ ait la propriété $A \in C_1 \Rightarrow Y \cap A \neq 0$; il faut être $M_1 - Y$ non $\in C_1$, ainsi $f^{-1}(M_1 - Y)$ non $\in C$. De la maximalité de C suit l'existence d'un $B \in C$ pour lequel

$$B \subset M - f^{-1}(M_1 - Y) = f^{-1}(Y)$$

d'où $f(B) \subset Y$ c'est à dire $Y \in C_1$.

Théorème 5. *Dans le cas où X est un espace dénombrablement compact, l'espace $(\mathscr{P}_0(X), W)$ est compact. Si X est dénombrablement compact et normal, aussi $(\mathscr{P}_1(X), O)$ est compact.*

Remarque. Sous les conditions données les deux espaces considérés sont des espaces de Hausdorf.

Démonstration. Parce que la démonstration des deux assertions du théorème est la même, nous supprimons les indexes 0 et 1 chez les symbols introduits. Pour démontrer la compacticité de $\mathscr{P}(X)$ nous démontrons que à chaque système maximal centré $\mathscr{C}$ des sousensembles de $\mathscr{P}(X)$ il existe un $P_0 \in \mathscr{P}(X)$ tel que chaque entourage de P_0 appartient à $\mathscr{C}$. Soit $\mathscr{C}$ un tel système. Pour $R \in \mathscr{C}$, $F \in \mathscr{F}(X)$ nous dénotons

$$R(F) = \{P(F) : P \in R\} \subset \langle 0, 1 \rangle\,, \quad \mathscr{C}(F) = \{R(F) : R \in \mathscr{C}\}\,.$$

D'après le lemme $\mathscr{C}(F)$ forme une base d'un système maximal centré $\mathscr{C}^*(F)$ dans $\langle 0, 1\rangle$. Soit $\Pi(F)$ le nombre (unique) dont système d'entourage est une partie de $\mathscr{C}^*(F)$. Nous démontrons que $\Pi(F)$ est le volume sur $\mathscr{F}(X)$. Nous dénotons par $\Omega(x, \varepsilon)$ les ε-entourages dans $\langle 0, 1\rangle$. On a évidemment

1. $\Pi(0) = 0$,
2. $\Pi(F) \geqq 0$,
3. $\Pi(F_1 \cup F_2) \leqq \Pi(F_1) + \Pi(F_2)$. Soit $\Pi(F_1) + \Pi(F_2) + \varepsilon = \Pi(F_1 \cup F_2)$, $\varepsilon > 0$. On peut trouver

$$R_1 \in \mathscr{C} \quad \text{tel que} \quad R_1(F_1) \subset \Omega\left(\Pi(F_1), \frac{\varepsilon}{3}\right),$$

$$R_2 \in \mathscr{C} \quad \text{tel que} \quad R_2(F_2) \subset \Omega\left(\Pi(F_2), \frac{\varepsilon}{3}\right),$$

$$R_3 \in \mathscr{C} \quad \text{tel que} \quad R_3(F_1 \cup F_2) \subset \Omega\left(\Pi(F_1 \cup F_2), \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Ainsi $P \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow$

$$P(F_1 \cup F_2) \leqq P(F_1) + P(F_2) \leqq \Pi(F_1) + \Pi(F_2) + \frac{2}{3}\,\varepsilon = \Pi(F_1 \cup F_2) - \frac{\varepsilon}{3}$$

et

$$P \in R_3 \Rightarrow P(F_1 \cup F_2) > \Pi(F_1 \cup F_2) - \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

De cela il suit que $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = 0$ et c'est une contradiction.

4. $F_1 \cap F_2 = 0 \Rightarrow \Pi(F_1 \cup F_2) = \Pi(F_1) + \Pi(F_2)$. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons l'entourage $\Omega(\Pi_1(F_1) + \Pi(F_2), \varepsilon)$. Il existe $R_1 \in \mathscr{C}$ et $R_2 \in \mathscr{C}$ tel que

$$R_1(F_1) \subset \Omega\left(\Pi(F_1), \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad R_2(F_2) \subset \Omega\left(\Pi(F_2), \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

d'où $R_1 \cap R_2(F_1 \cap F_2) \subset \Omega(\Pi(F_1) + \Pi(F_2), \varepsilon)$. C'est à dire que le système d'entourages du point $\Pi(F_1) + \Pi(F_2)$ appartient à $\mathscr{C}^*(F_1 \cup F_2)$. Parce que le point avec cette propriété est unique, nous avons $\Pi(F_1) + \Pi(F_2) = \Pi(F_1 \cup F_2)$.

Maintenant au moyen de volume Π nous définissons sur les sousensembles de X la mesure extérieure Π^*. Posons pour $G \in \mathscr{G}(X)$

$$\Pi_*(G) = \sup \{\Pi(F) : F \subset G,\ F \in \mathscr{F}(X)\}$$

et pour $A \subset X$

$$\Pi^*(A) = \inf \{\Pi_*(G) : G \supset A,\ G \in \mathscr{G}(X)\} .$$

La mesure extérieure Π^* considérée comme une fonction sur $\mathscr{B}(X)$ appartient à $\mathscr{P}(X)$. Cela ce démontre par la même méthode comme dans [2], § 53, théorèmes 4 et 5.

On doit seulement remarquer que l'assertion suivante est valable: Si $G_1 \in \mathscr{G}_0(X)$, $G_2 \in \mathscr{G}_0(X)$, $F \in \mathscr{F}_0(X)$, $F \subset G_1 \cup G_2$ ils existent $F_1 \in \mathscr{F}_0(X)$, $F_2 \in \mathscr{F}_0(X)$ tels que $F_k \subset G_k$, $F_1 \cup F_2 = F$. Parce que si l'on a

$$G_1 = \{x : g_1 > 0\}\,, \quad G_2 = \{x : g_2 > 0\}\,, \quad F = \{x : f = 0\}\,,$$

où $g_1, g_2, f \in \mathscr{S}(X)$, nous voyons facilement que la propriété désirée ont les ensembles

$$F_k = \{x : f + \max (g_1, g_2) - g_k = 0\}\,, \quad k = 1, 2\,.$$

Considérons l'entourage $O(\Pi^*, F, \varepsilon)$ de la mesure Π^*. Pour $G \supset F$, $G \in \mathscr{G}(X)$ il est $\Pi(F) \leqq \Pi_*(G)$ et donc

$$\Pi^*(F) = \inf \{\Pi_*(G),\ G \supset F\} \geqq \Pi(F)\,.$$

Il existe un $R \in \mathscr{C}$ tel que $R(F) \subset \Omega(\Pi(F), \varepsilon)$. De plus $P \in R \Rightarrow P(F) < \Pi^*(F) + \varepsilon$. Ainsi $R \subset O(\Pi^*, F, \varepsilon)$. Si maintenant $O = \bigcap_{i=1}^{n} O_i(\Pi^*, F_i, \varepsilon_i)$ et $R_i \subset O_i$, on a $\bigcap_{i=1}^{n} R_i \in \mathscr{C}$ et donc $O \in \mathscr{C}$. Par cela la compacticité de $\mathscr{P}(X)$ est démontrée.

Comme la conséquence de nos considérations on peut obtenir l'assertion sur le prolongement unique de la mesure de Baire à la mesure de Borel dans les espaces normaux dénombrablement compacts ([5]). Des théorèmes 1, 4, 5 il suit que dans ce cas $(\mathscr{P}_1(X), O)$ est un sousespace compact et dense de l'espace de Hausdorf $(\mathscr{P}_0(X), W)$ et donc idéntique avec cet espace.

L'application aux processus stochastiques. Le mathématicien soviètique N. N. Čencov a fait observer M. Jiřina que la plus petite σ-algèbre $\mathscr{A}$ contenant les cylindres avec une base à dimension finie de produit cartésien $F = \mathop{\mathsf{X}}_{\tau \in T} \langle -\infty, \infty \rangle_\tau$ employée dans la théorie des processus stochastique sont les ensembles de Baire de l'espace compact F. Des théorèmes démontrés suit donc le théorème suivant:

Théorème 6. *Soit C un sousensemble de F fermé et que les répartitions à dimension finie des processus $(P_n, F, \mathscr{A})$ convergent vers les répartitions du processus*

$(P_0, F, \mathscr{A})$. *Si l'on peut construire les processus* $(P_n, F, \mathscr{A})$ *sur l'ensemble* C, *on peut construire aussi* $(P_0, F, \mathscr{A})$ *sur* C.

Démonstration. Sous la construction de processus $(P, F, \mathscr{A})$ sur l'ensemble C on comprend la construction d'un tel processus $X_t(\omega)$ sur un espace mesurable $(\boldsymbol{P}, \Omega, \mathscr{D})$ que $\boldsymbol{P}(\omega : X_t(\omega) \in C) = 1$ et les répartition à dimension finie de $X_t(\omega)$ et de $(P, F, \mathscr{A})$ sont identiques. Pour cela, comme il est connu, il faut et il suffit que la mesure extérieure P^* de C soit égale à un.

De la normalité de F et de la remarque aprés le théorème 5 il suit qu'il existe un prolongement unique de P à la mesure régulière $\bar{P}$ sur les ensembles boréliens de l'espace F. Par le même raisonement comme dans la démonstration du théorème 3 nous obtenons que $\bar{P}(C) = P^*(C)$. De la compacticité de l'espace des mesures de prob. boreliennes sur F il suit que la suite des prolongements boreliens $\bar{P}_n$ de mesures de Baire P_n a un point d'accumulation $\bar{\Pi}$ dans le sens de la topologie O. S'il était $\bar{\Pi} \neq \bar{P}_0$ ces deux mesures devraient differer déjà dans la répartition d'un ensemble quelconque fini de coordonnées. Si nous appliquons sur ces répartitions les théorèmes démontrés nous voyons qu'il existe l'entourage $O_1 = \bigcap O(\bar{P}_0, C_i, \varepsilon_i)$ de la mesure $\bar{P}_0$ et l'entourage $O_2 = \bigcap O(\bar{\Pi}, K_i, \delta_i)$ de la mesure $\bar{\Pi}$ tels que $O_1 \cap O_2 = 0$ et C_i et K_i sont des cylindres fermés avec la base à dimension finie. De la convergence des répartitions à dimension finie des mesures $\bar{P}_n$ vers $\bar{P}_0$ il suit que l'entourage O_2 contient seulement un nombre fini de $\bar{P}_n$. C'est une contradiction et donc $\bar{P}_0$ est le point unique d'accumulation de la suite $\bar{P}_n$. Mais cela signifie que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\bar{P}_{n_\varepsilon} \in O(\bar{P}_0, C, \varepsilon)$. Donc

$$1 = \bar{P}_{n_\varepsilon}(C) \leqq \bar{P}_0(C) + \varepsilon \quad \text{d'où} \quad P_0^*(C) = \bar{P}_0(C) = 1\,.$$

D'ici nous voyons qu'on peut construire $(P_0, F, \mathscr{A})$ sur C.

Littérature

[1] *J. H. Blau*: The Space of Measures on a Given Set. Fundamenta mathematicae XXXVIII, 1951, 23—34.

[2] *P. R. Halmos*: Measure Theory, New York 1950.

[3] *Takesi Isiwata*: The Space of Measures on a Countably Compact T_1-space. Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku Vol. *5*, 1957, 281—285.

[4] *N. Kryloff, N. Bogoliouboff*: La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire. Annals of Mathematics *38*, 1937, 65—113.

[5] *Jan Mařík*: Baireova a Borelova míra. Časopis pro pěst. mat. *81*, 1956, 431—450.

Výtah

POZNÁMKA O KOMPAKTNÍCH PROSTORECH PRAVDĚPODOBNOSTNÍCH MĚR

PETR MANDL, Praha

V práci jsou studovány prostor Baireových pravděpodobnostních měr na topologickém prostoru X a prostor Borelových pravděpod. měr v případě, že X je normální. V prostorech měr se uvažuje topologie O zavedená J. H. BLAUEM [1], která je v tomto případě totožná se slabou topologií. Je-li X spočetně kompaktní, je ukázáno, že oba prostory jsou kompaktní. Jako důsledek vyplyne známá věta o jednoznačném rozšíření Baireovy míry na Borelovu ve spočetně kompaktních normálních prostorech. Uvedena též aplikace vět o kompaktnosti na zavádění měr do kartézského součinu.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ О КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

ПЕТР МАНДЛ (Petr Mandl), Прага

В работе изучаются пространство вероятностных мер Бэра на топологическом пространстве X и пространство вероятностных мер Бореля в случае, когда X нормально. В пространствах мер рассматривается топология O, введенная И. Г. Блау [1], которая в этом случае совпадает со слабой топологией. Показано, что если X счетно компактно, то оба пространства компактны. В виде следствия получаем известную теорему об однозначном расширении меры Бэра на меру Бореля в счетно компактных нормальных пространствах. Приводится также применение теорем о компактности к введению мер в декартово произведение.