Časopis pro pěstování matematiky

Milan Koman

Úloha o jisté množině nadrovin v E_n

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 2, 200--201

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108374

ÚLOHA O JISTÉ MNOŽINĚ NADROVIN V E_n

MILAN KOMAN, Praha

(Došlo dne 30. srpna 1959)

V článku je nalezena množina všech nadrovin v E_n, které mají od daných k bodů stálý, předem daný, součet vzdáleností.

1. Označení. Budiž dána v E_n libovolná soustava kartézských souřadnic. Nechť body A resp. B mají v této soustavě souřadnice $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ resp. $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$. Jsou-li α, β reálná čísla, potom symbolem $\alpha A + \beta B$ rozumíme (při dané soustavě souřadnic) uspořádanou n-tici $[\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \ldots, \alpha a_n + \beta b_n]$.

Označme V_k množinu všech uspořádaných k-tic $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k]$, kde $|\varepsilon_i| = 1$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$. Označme $\|\varepsilon\| = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i$.

Budiž dána v E_n množina A bodů $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Budiž $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k] \in V_k$. Potom označme

$$\mathsf{A}^\varepsilon = \underset{A_i \in \mathsf{A}}{\mathrm{E}} (\varepsilon_i = 1)\,, \quad \mathsf{A}_\varepsilon = \underset{A_i \in \mathsf{A}}{\mathrm{E}} (\varepsilon_i = -1)\,.$$

(Některá z množin A^ε, A_ε může být samozřejmě prázdná.)

2. Úmluva. Řekneme, že nadrovina ω odděluje množiny A^ε, A_ε, jestliže nastane některá z možností:

a) $\mathsf{A}^\varepsilon - \omega \neq \emptyset \neq \mathsf{A}_\varepsilon - \omega$ a množiny $\mathsf{A}^\varepsilon - \omega$, $\mathsf{A}_\varepsilon - \omega$ leží uvnitř navzájem opačných poloprostorů určených nadrovinou ω.

b) $\mathsf{A}^\varepsilon - \omega = \emptyset \neq \mathsf{A}_\varepsilon - \omega$ (resp. $\mathsf{A}^\varepsilon - \omega \neq \emptyset = \mathsf{A}_\varepsilon - \omega$) a množina $\mathsf{A}_\varepsilon - \omega$ (resp. $\mathsf{A}^\varepsilon - \omega$) leží uvnitř právě jednoho poloprostoru určeného nadrovinou ω.

c) $\mathsf{A}^\varepsilon - \omega = \emptyset = \mathsf{A}_\varepsilon - \omega$.

3. Pomocná věta. *Budiž dána v E_n libovolná soustava kartézských souřadnic a množina A bodů $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Budiž $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k] \in V_k$. Potom*

a) *Je-li $\|\varepsilon\| = 0$, pak $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i A_i$ je vektor, který nezávisí na volbě soustavy souřadnic;*

b) *Je-li* $\|\varepsilon\| \neq 0$, *pak* $\sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon\|} A_i$ *je bod, který nezávisí na volbě soustavy souřadnic.*

Věta je známá z analytické geometrie.

4. Označení. Budiž dána v $\mathbf{E}_n$ množina A bodů $A_1, A_2, \ldots, A_k$ a číslo $d > 0$. Dále budiž $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k] \in \mathbf{V}_k$. Potom

a) Je-li $\|\varepsilon\| = 0$, $|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i A_i| = m \geqq d$, značí $\mathsf{M}(\varepsilon, d)$ množinu všech nadrovin, které určují s vektorem $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i A_i$ odchylku α, kde $\sin \alpha = \frac{d}{m}$, a oddělují množiny A^ε, A_ε.

b) Je-li $\|\varepsilon\| = 0$, $|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i A_i| = m < d$, značí $\mathsf{M}(\varepsilon, d)$ množinu prázdnou.

c) Je-li $\|\varepsilon\| \neq 0$, značí $\mathsf{M}(\varepsilon, d)$ množinu všech tečných nadrovin kulové nadplochy $\varkappa \left(S \equiv \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon\|} A_i;\ r = \left|\frac{d}{\|\varepsilon\|}\right|\right)$, které oddělují množiny A^ε, A_ε.

5. **Věta.** *Budiž dána v* $\mathbf{E}_n$ *množina* A *bodů* $A_1, A_2, \ldots, A_k$. *Budiž* $d > 0$. *Potom množina všech nadrovin, které mají od bodů* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *stálý součet vzdáleností rovný* d, *je* $\bigcup_{\varepsilon \in \mathbf{V}_k} \mathsf{M}(\varepsilon, d)$.

Důkaz. Nechť $\omega \in \mathsf{M}(\varepsilon, d)$, kde $\varepsilon \in \mathbf{V}_k$. Zvolíme-li nadrovinu ω za souřadnicovou nadrovinu, ihned zjistíme, že ω má od bodů A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ součet vzdáleností rovný d.

Nechť naopak nadrovina ω má od bodů A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ součet vzdáleností d. Zvolme ω souřadnicovou nadrovinu. Nyní určíme $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k] \in \mathbf{V}_k$ takto: Jestliže leží bod A_i uvnitř kladného poloprostoru určeného nadrovinou ω, položíme $\varepsilon_i = 1$. V opačném případě položíme $\varepsilon_i = -1$. Odtud se ihned snadno zjistí, že $\omega \in \mathsf{M}(\varepsilon, d)$.