Časopis pro pěstování matematiky

Josef Škrášek

Život a dílo profesora Matyáše Lercha (K stému výročí jeho narození)

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 85 (1960), No. 2, 228–240

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108373`

# ŽIVOT A DÍLO PROFESORA MATYÁŠE LERCHA

*(K stému výročí jeho narození)*

JOSEF ŠKRÁŠEK, Brno

Dne 20. února 1960 bylo tomu 100 let, co se v Milínově u města Sušice v jižních Čechách narodil jeden z největších českých matematiků, první profesor matematiky na Masarykově universitě MATYÁŠ LERCH. Při té příležitosti chceme zde věnovati několik vzpomínek pozoruhodnému životu a dílu tohoto vynikajícího vědce. Vzhledem k tomu, že v tomto časopise vyšly již dříve dva obsažné články o životě Lerchově, a to jednak v r. 1923 článek z péra prof. K. ČUPRA (viz [2]), jednak velmi podrobný životopis od doc. L. FRANKA (viz [4]), omezíme se zde jen na stručné vylíčení životních osudů Lerchových, abychom mohli více místa věnovat bohatému jeho vědeckému odkazu.

**I. Životní osudy M. Lercha** byly hned na počátku jeho životní dráhy poznamenány tragickou událostí, která měla veliký vliv na celý další jeho život: V šestém roce svého věku utrpěl tak těžký úraz na levé noze, že i po vyléčení mohl chodit pouze pomocí jedné berly. Proto teprve v 9 letech vstoupil do obecné školy v Sušici, kam se mezitím jeho rodiče přestěhovali. V letech 1874—1877 navštěvoval tamtéž měšťanskou školu, kde se pod vedením odb. učitele EMILA SEIFERTA (otce profesora dr. LAD. SEIFERTA) brzy začalo projevovat jeho nevšední nadání pro matematiku. Protože Lerchovi rodiče byli velmi chudí (otec jeho byl zprvu zemědělským dělníkem a později drobným zemědělcem), mohli jen s největšími obtížemi vydržovat svého syna na studiích, když po dokončení měšťanské školy přešel po mimořádně úspěšné přijímací zkoušce hned do V. tř. reál. gymnasia v Plzni. Po dvou letech odešel na reálku v Rakovníce, kde r. 1880 maturoval. Již na střední škole patřil mezi nejlepší žáky a věnoval všechen svůj volný čas, který mu po kondicích zbýval, soukromému studiu matematiky. Po maturitě se dvacetiletý Lerch zapsal na České vysoké škole technické v Praze jako řádný posluchač inženýrského stavitelství. Chtěl totiž po absolutoriu tříletého studia složit zkoušku učitelské spůsobilosti pro střední školy, neboť v té době bylo možno získat tuto aprobaci po studiích ať už na universitě či na technice. Jeho učiteli matematiky byli EDUARD WEYR (1852—1903) a GABRIEL BLAŽEK (1842—1910), geometrie pak vedle Ed. Weyra FRANT. TILŠER (1825 až 1913). Protože své veškeré úsilí věnoval studiu, nechtěje se zdržovat ani kondicemi, vedlo se mu v té době dosti špatně. Žil jen z malých podpor, které dostával z veřejných fondů a nadací. Když pak ke konci studia zjistil, že pro svou tělesnou vadu neobdrží lékařského vysvědčení potřebného k žádosti o aprobaci, rozhodl se pro akademickou dráhu a věnoval se pouze studiu matematiky. Proto se ve stud. roce 1882/83 dal zapsati též jako mimořádný posluchač na české universitě a zároveň na německé technice a navštěvoval přednášky prof. J. F.

Studničky (1836—1903) a na něm. technice přednášky Grünwaldovy. V tomto období již uveřejnil, jednak v *Časopise pro pěstování matematiky a fysiky*, jednak ve *Zprávách Kr. Čes. Společnosti nauk*, celkem 6 prací převážně z geometrie, které sice ještě nestačily k tomu, aby založily jeho vědeckou slávu, avšak zato upozornily na jeho rozvíjející se talent. V důsledku toho také obdržel státní stipendium ve výši 800 zlatých, aby mohl ve stud. roce 1884/85 pokračovat ve studiích matematiky na universitě berlínské. Tam jeho učiteli matematiky vedle J. L. Fuchse (1833—1902) byl slavný K. Weierstrass (1815 až 1897) a vynikající L. Kronecker (1823—1891), který měl na další vědeckou činnost Lerchovu značný vliv. Tam také poznal Lerch osobně několik mladých nadějných matematiků, mezi nimiž i ruskou matematičku S. Kovalevskou (1850—1891).

Po návratu z Berlína do Prahy se Lerch r. 1886 habilitoval a stal se soukromým docentem matematiky na České vysoké škole technické v Praze, kde kromě toho až do r. 1892 suploval za prof. G. Blažka, jenž byl v té době poslancem říšské rady. Soukromá docentura tenkráte sama o sobě nebyla honorována a proto Lerch byl zároveň asistentem u prof. Ed. Weyra (v letech 1885/89 a 1887/88) a pak u prof. G. Blažka (v letech 1888/89 až 1895/96). V tomto období uveřejnil Lerch více než 110 vědeckých prací, tedy průměrně 1 práci měsíčně, které mu rychle získaly věhlas ve světě. Práce tyto uveřejňoval téměř ve všech odborných časopisech domácích a v předních časopisech zahraničních, a to především francouzských, dále německých, v časopise italském, švédském, portugalském, chorvatském a jinde. Když jej r. 1893 jmenovaly jak Král. čes. společnost nauk, tak Česká Akademie věd a umění svým mimořádným členem, zdálo se, že není daleká doba, kdy se mu dostane přiměřeného místa na české universitě nebo technice. Lerch sám na to spoléhal, ale po uplynutí desetileté asistentské služby byl nakonec rád, když mu bylo v r. 1896 nabídnuto místo profesora na universitě ve švýcarském Fribourgu. Stalo se tak zásluhou vynikajícího francouzského matematika Ch. Hermitea (1822—1901), který si Lercha velmi vážil, napsav o něm v jednom dopise Th. J. Stieltjesovi (1856—1895): „Il est extrêmement ingénieux et je fais grand cas de son talent...“ (*Corresp. d'Hermite et de Stieltjes*, II (1905), 326). Lerch, pro něhož uvedená nabídka znamenala vyřešení jeho existenční otázky, místo přijal. Smlouva zněla na 10 let a znamenala platově pro Lercha podstatné zlepšení (z 1400 K na 5000 frs, po roce dokonce 6000 frs, 1 fr se tehdy rovnal téměř 1 K).

Ve Fribourgu dosahuje Lerch svého zenitu. Nejenže za těchto desíti let publikoval nových 75 pojednání, nýbrž dostává se mu i uznání z míst opravdu povolaných: V r. 1900 se stává laureátem Velké ceny pařížské Akademie věd a je zároveň navržen za jejího člena. Přes tyto vynikající úspěchy necítí se však Lerch v cizině šťastným a neustále touží po tom, aby jako profesor na české universitě mohl vychovávat vědecký dorost matematický pro svou vlast. A tak když v r. 1906 vypršela jeho smlouva s universitou ve Fribourgu a když se současně šťastnou shodou okolností uprázdnilo místo profesora matematiky na české technice v Brně, která nedlouho předtím v r. 1899 byla založena, neváhá ani na okamžik a vrací se do své vlasti, aby nastoupil místo, které si už dávno předtím zasloužil. Spolu s ním se vrací i jeho 23letá neteř Růžena Sejpková, která mu za jeho pobytu ve Švýcarsku po 9 let velmi pečlivě vedla domácnost. I po návratu do vlasti, když se Lerch usadil v Brně (bydlil na Úvoze č. 62), ,,dovedla tato vzácná žena svému strýci, a od 13. ledna 1921 svému manželi, jehož nároky na hygienu a stravu zabíhaly do pedanterií, vytvořiti takové prostředí, že nebylo se mu — ani za nejkrutějších válečných let — zcela o nic starati a že se mohl věnovati jen a jen své práci" (Čupr [2], str. 309).

Teprve nyní se Lerchovi dostává zaslouženého uznání i ve vlasti. V r. 1907 byl zvolen čestným členem Jednoty českých matematiků a fysiků, r. 1908 byl promován na čestného doktora filosofie pražské university a r. 1910/11 byl zvolen za rektora brněnské české techniky (funkce se však ze zdravotních důvodů vzdal). Za svého čtrnáctiletého působení na brněnské technice (od r. 1906 do r. 1920) uveřejnil asi 30 prací, tedy sice méně nežli v předešlých obdobích, avšak některé jeho práce byly značně rozsáhlé (až o 150 str.) a jiné vycházely na pokračování. Kromě toho připravoval pro vydání 2 knihy (jednu o polynomech Bernoulliových, druhou o funkcích eliptických).

V r. 1920 byl Lerch jmenován řádným profesorem matematiky na nově zřízené Masarykově universitě v Brně. A když brzy poté jej r. 1921 jmenovala Česká Akademie věd svým řádným členem (mimořádným byl již od r. 1893), cítil se i přes svou těžkou chorobu konečně spokojeným. ,,Vrhl se s nadšením do nové práce, do budování matematického ústavu a jeho knihovny, do níž převedl i část své knihovny vlastní. Jeho spokojenost zvyšovalo vědomí, že též na universitě měl štěstí na asistenta, že v dr. O. Borůvkovi našel znamenitého spolupracovníka a opravdovou oporu ústavu" (Frank, [4], str. 137). Avšak zatím neúprosně hlodala na jeho zdraví těžká choroba, cukrovka, která mu nedopřála, aby mohl dokončit nedokončené práce, zvláště pak obě zmíněné knihy, a aby mohl v klidu stáří pohlédnout s uspokojením na své veliké životní dílo. Když totiž po skončení prvního stud. roku 1921/22 na universitě odejel na prázdniny do Sušice a tam se při koupání v řece Otavě nachladil, tu jeho organismus podlomený touto těžkou chorobou nemá dosti sil, aby se ubránil (insulinu se v tehdejší lékařské praxi ještě nepoužívalo). Dostává zápal plic a necelý den po svém onemocnění dne 3. srpna 1922 profesor Matyáš Lerch umírá.

Dne 20. února 1960 byla za účasti představitelů našich vysokých škol, vědy, průmyslu a veřejného života uspořádána na přírodovědecké fakultě v Brně oslava stých narozenin prof. M. Lercha. Slavnost vyvrcholila odhalením pamětní desky Lerchovy na budově matematických a fysikálních ústavů, kde Lerch poslední dva roky svého života působil.

Na konec je třeba zmíniti se aspoň několika slovy o osobních vlastnostech Lerchových. Zmíněná již tělesná vada, která na něm lpěla jako těžký okov po celý život, těžké sociální poměry, jimiž se musil dlouho probíjet, těžká choroba, které se po dlouhá léta bránil velmi úzkostlivým dbáním o hygienu, dobře věda, že každá infekce by mohla být přímým ohrožením jeho života, zneuznání, jehož se mu zprvu dostávalo ve vlasti, a zajisté i stísněné kulturní poměry českého národa pod panstvím Habsburků, to vše zvyšovalo jeho nervovou sensibilitu a působilo na jeho povahu, některými jeho současníky málo chápanou. Svým založením byl Lerch povahy přímé a spravedlivé, těžko snášel příkoří a nemilosrdně stíhal každou polovičatost a malost, s níž se v životě setkal. Jeho sarkasmu a břitkého vtipu nebyly ušetřeny mnohy ani osoby velmi vlivné. Tím si často odcizoval i ty, kteří mu byli zprvu nakloněni. Výstižným příkladem břitkosti jeho kritiky je např. recense Čuříkových „*Základů vyšší matematiky*" uveřejněná v tomto Časopise, *46* (1916), str. 52—59. O jeho sporu s německým matematikem A. Pringsheimem se ještě zmíním v další části tohoto článku.

Celkově vystihl osobnost Lerchovu jeho dlouholetý asistent na brněnské technice prof. K. Čupr slovy: „*Osud se vymstil na Lerchovi jaksepatří. Geniálního ducha připoutal k churavému tělu zmrzačenému na levé noze a člověka tak nestejnoměrně vypraveného k životnímu boji postavil do poměrů chuďoučkých a nepatrných; životní běh Lerchův skutečně může být uváděn jako příklad vítězného boje ducha nad nepříznivými do krajní míry materielními poměry*". (Viz [2], str. 306.)

**II. Lerchovo vědecké dílo** obsahuje celkem 238 vědeckých prací, kromě drobnějších článků, řešených problémů a předložených úloh uveřejňovaných v pařížských časopisech *L'Intermédiaire des mathématiciens* (v l. 1894 až 1919) a *L'Enseignement mathématique* (v l. 1905 až 1907). Úplný seznam Lerchových prací jsem uveřejnil v práci [5], citované na konci tohoto článku. (Protože pro nedostatek místa není možno uvádět zde názvy všech Lerchových prací, o nichž budu mluvit, budu je stručně značit písmenem S a jejich pořadovým číslem ze zmíněného Seznamu [5].)

Lerchovy práce vyšly v 33 různých odborných časopisech nebo sbornících domácích i zahraničních. Z nich je asi polovina psána česky (celkem 118), 80 francouzsky, 34 německy, 3 chorvatsky, 2 polsky a 1 portugalsky. Podle oborů se týká matematické analysy asi 150 prací, teorie čísel 30, geometrie 15, aritmetiky a dalších témat práce zbývající.

Lerchovo vědecké dílo bylo systematicky studováno po několik let pod vedením prof. dr. O. Borůvky v jeho „Semináři pro studium díla M. Lercha" na přírodovědecké fakultě v Brně, a to v letech 1945/46 až 1948/49. Tento seminář byl v r. 1952/53 obnoven a konal se v rámci činnosti tehdejšího ústředního ústavu matematického a pak (po zřízení ČSAV) v rámci ÚM ČSAV, a to až do r. 1955/56. Výsledkem této činnosti jsou práce [4] až [7] uvedené na konci tohoto článku. Zbývá ještě zhodnotit Lerchovy práce z teorie čísel a práce obsahu geometrického, kterýžto úkol převzal jednak prof. dr. K. KOUTSKÝ společně s doc. dr. J. KOPŘIVOU, jednak prof. dr. J. SRB.

A. Těžiště Lerchova díla spočívá v **matematické analyse,** jíž se týká 150 Lerchových prací. Jejich rozborem se zabývá obsáhlé pojednání [6], jež v r. 1957 publikoval prof. dr. O. Borůvka společně s dr. J. ČERMÁKEM, doc. dr. L. Frankem a dr. V. RADOCHOVOU. Lerchovy práce z matematické analysy se týkají hlavně těchto témat: a) Teorie nekonečných řad, b) obecné teorie funkcí, c) teorie funkce gamma, d) teorie funkcí eliptických, e) integrálního počtu. Všimněme si nyní aspoň některých výsledků, jichž Lerch v jednotlivých těchto oborech dosáhl.

a) Teorií nekonečných řad se zabývá asi 50 Lerchových prací, které vyšly v letech 1885 až 1920. Mezi nimi význačné místo zaujímají práce o malmsténovských řadách, a to: S 28, S 82, S 91, S 95, S 101, S 144, S 148, S 151, S 155, S 156, S 169, S 204, S 223 a S 234. Obecná teorie těchto řad je podrobně vyložena v pojednáních S 82, S 91 a S 101, která vyšla v Rozpravách Č. A. v r. 1892 až 1894. Řadou malmsténovskou rozumí Lerch řadu tvaru

$$Ml(v, w, u, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}}{[(w+n)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}}.$$

Do teorie těchto řad patří např. známá Riemannova funkce $\zeta(s)$, řady Appelovy a řady Lipschitzovy tvaru

$$\mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2nx\pi i}}{(w+n)^s},$$

které první studovali C. J. MALMSTÉN a R. LIPSCHITZ a jimiž se Lerch zabýval v práci S 28. Speciálním případem Lipschitzovy řady jsou řady

$$R(w, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^s}, \quad L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi n x i}}{n^s},$$

jejichž vlastnosti studuje Lerch v pracích S 101, S 144, S 155 a S 204. Ve všech těchto pracích odvozuje řadu zcela nových výsledků, jiné již známé výsledky (např. Lipschitzovy a Malmsténovy) dokazuje novým jednodušším způsobem a uvádí je v souvislost se vztahy vystupujícími v teorii funkce gamma.

Zajímavých výsledků dosáhl Lerch při řešení problému, který mu předložil Ch. Hermite: Nalézti derivaci Kummerovy řady a podobných řad trigonometrických, pro něž tehdy známá pravidla vedla k řadám divergentním. Lerch tento problém s úspěchem vyřešil v pracích S 101, S 105, S 116 a S 124. Tak např. pro Kummerovu řadu dostal v práci S 101 tento proslulý *Lerchův vzorec*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(2k+1)v\pi \,.\, \ln\frac{k}{k+1} = [\ln 2\pi - \Gamma'(1)]\sin v\pi + \frac{\pi}{2}\cos v\pi + \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}\sin v\pi$$
$$\text{pro} \quad 0 < v < 1.$$

Kromě toho odvodil v těchto pracích několik obecných vět o derivaci jistých trigonometrických řad. Jsou-li $c_n$ libovolná reálná čísla, jde hlavně o derivaci řad s obecným členem tvaru

$$\frac{c_n}{n} \sin 2n\pi x\,, \quad \frac{c_n}{n} \cos 2n\pi x\,, \quad \frac{2c_n}{2n-1} \sin (2n-1)\,\pi x\,,$$

$$\frac{2c_n}{2n-1} \cos (2n-1)\,\pi x\,, \quad \frac{c_n}{u+n} \sin 2(u+n)\,\pi x\,, \quad \text{apod.}$$

Další skupinu prací o nekonečných řadách tvoří práce, které uveřejnil Lerch na začátku své vědecké dráhy a jež se týkají základních vlastností nekonečných řad, jako např. kriteria podílového, odmocninového a Raabeova. Jde o práce S 13, S 19, S 21, S 56 a S 70, které hrály důležitou roli v prvním Lerchově sporu s německým matematikem A. Pringsheimem. Spor tento vznikl, když A. Pringsheim ve své práci „*Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern*" (*Math. Annalen 35* (1890), 297—394) nazval Lerchův příklad konvergentní řady $\Sigma u_n$, u níž hromadné body posloupnosti $\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\}$ jsou $\delta$ a $\infty$, kde $0 < \delta < 1$, uveřejněný v práci S 13 a S 21, monstrosním a nevhodným. Lerch se právem proti tomu ohradil v pracích S 56 a S 70, kde uvádí, že jeho příklad patří k nejjednodušším, které uvedenou otázku dobře ilustrují a přitom mohou být použity i v elementárních přednáškách. (Podrobnější výklad Lerchova sporu s Pringsheimem najde čtenář v článku doc. L. Franka, uveřejněném v práci [6], str. 532—536.)

Ze zbývajících prací o nekonečných řadách se aspoň zmiňme o práci S 163, jíž si Lerch velmi cenil a která také byla obsahem jeho nástupní přednášky na Masarykově universitě v Brně, a dále o práci S 162, která vyšla r. 1900 znovu francouzsky (viz S 168). Lerch v ní dokázal zajímavou větu o trigonometrických řadách, která je v matematické literatuře často neprávem připisována Pringsheimovi (např. L. Tonelli, *Serie trigonometriche,* Bologna 1927), který ji sice též objevil, ale o rok později nežli Lerch.

b) Obecnou teorií funkcí se Lerch zabývá asi ve 20 pojednáních, z nichž většina vznikla v letech 1886 až 1896. Jejich obsahem jsou hlavně tato témata: Teorie funkcí vytvořujících, konstrukce spojitých funkcí nemajících derivaci, rozvinutelnost funkcí v Taylorovu řadu a konstrukce funkcí s omezeným existenčním oborem. Nejznámějšími pracemi této skupiny jsou pojednání S 73 a S 180, jednající o vytvořujících funkcích. Jsou to funkce definované integrály tvaru

$$J(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\,\varphi(x)\,dx\,, \quad \text{kde } a \text{ je kompl. číslo}\,.$$

Přitom se funkce $\varphi(x)$, uvedená v integrandu, nazývá *určující*. Těmito funkcemi po P. S. Laplaceovi se zabýval též norský matematik N. H. Abel. Vzhledem k tomu také práce S 180 vyšla v *Acta math.* r. 1903, v čísle věnovaném památce

Abelově u příležitosti stého výročí jeho narození. V uvedených pracích Lerch první rozřešil otázku, kdy k dané vytvořující funkci $J(a)$ existuje jediná určující funkce $\varphi(x)$. Jeho věta, která se i ve světové literatuře uvádí dnes pod názvem *Lerchova věta*, zní:

*Určující funkce $\varphi$ se mohou při dané vytvořující funkci $J$ navzájem lišit nanejvýš o funkci $N(x)$, pro niž při proměnném $x$ identicky platí*

$$\int_0^x N(t)\,dt = 0\,.$$

Odtud je ihned patrno, že jde-li o spojité určující funkce $\varphi(x)$, je $N(x)$ identicky rovna nule, a tudíž funkce $\varphi$ je určena jednoznačně. K důkazu této věty používá Lerch věty Weierstrassovy o aproximaci spojité funkce posloupností polynomů. Uvedená Lerchova věta našla uplatnění ve známé Laplaceově transformaci. (Viz G. Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Berlin 1937, str. 35 a 405.)

Je známo, že K. Weierstrass první sestrojil a uveřejnil (v r. 1875) příklad spojité funkce nemající v žádném bodě derivaci. Poznamenejme, že již před Weierstrassem v r. 1830 sestrojil příklad podobné funkce náš B. Bolzano, avšak jeho výsledek zůstal v rukopise a byl objeven v pozůstalosti Bolzanově až v r. 1922. Také Lerch se touto otázkou zabýval v pracích S 15, S 23 a S 43 a sestrojil několik příkladů spojitých funkcí bez derivace. Jednou z nich je např. funkce

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n!\,\pi x}{n!} \quad \text{pro } x \in (-\infty, +\infty)\,,$$

o níž Lerch v práci S 15 dokázal, že nemá derivaci v žádném $x = \frac{a}{q!}$, kde $a$, $q > 0$ jsou celá čísla. V práci S 23 pak poznamenává, že Bouquet ve svých přednáškách na Sorbonně dokázal, že tato funkce nemá derivace v žádném bodě.

O rozvinutelnosti funkcí v Taylorovu řadu uvažoval Lerch v pracích S 43, S 136 a S 166. Ukazuje v nich, že např. funkce

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos a^n x}{n!}\,, \qquad \text{kde } a \text{ je liché}\,,$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2a^n \pi x}{n!}\,, \quad \text{kde } a > 1 \text{ je celé}\,,$$

mají sice derivace všech řádů, ale nedají se rozvinout v Taylorovu řadu v okolí žádného bodu.

Teorii funkcí s omezeným existenčním oborem jsou věnovány práce S 15, S 33, S 44, S 66, S 136, S 157, S 206 a S 214. O téže otázce jednal také A. Pringsheim v *Math. Annalen*, sv. 42 a 44 o 5 let později nežli Lerch. Tam také uvedl několik Lerchových výsledků, aniž jej citoval. To dalo Lerchovi podnět k tomu, aby si s ním vyrovnal několikadejší účet. Tak se rozpoutal druhý spor Lerchův s Pringsheimem, při němž se role soupeřů vyměnily, neboť nyní se bránil Pringsheim. Spor byl nejprve veden v něm. časopisech *Monatshefte* 8 (1897), 377—382; 9 (1898), 46, a *Math. Annalen* 50 (1898), 442—461, později pak ve švédském čas. *Acta math.* 22 (1899), 371—378; 24 (1901), 245. Zakončil jej r. 1901 diplomaticky redaktor čas. *Acta math.* G. MITTAG-LEFFLER tím, že si telegraficky na Lerchovi vyžádal povolení k otištění jeho práce S 193 poctěné Velkou cenou pařížské Akademie věd a zároveň mu poslal dopis, kde praví: „*J'ai été forcé de publier une réclamation de M. Pringsheim. J'espère que cette réclamation vous laisse aussi tranquille que moi. La meilleure réponse est de se taire, je trouve.*" (Čupr, [2], 312.) Podrobné vylíčení i tohoto druhého Lerchova sporu s Pringsheimem lze čísti v článku doc. dr. L. Franka v práci [6] na str. 536—538.

c) Teorii funkce gamma věnoval Lerch přes 50 svých prací, jejichž rozborem se zabývá prof. O. Borůvka v práci [6], kde o nich píše: „Lerchův přínos k teorii funkce gamma po stránce obsahové je dán objevem mnoha nových vlastností funkce gamma a jiných prvků této teorie (logaritmus funkce gamma, logaritmická derivace, Prymovy funkce $P$, $Q$, Eulerova konstanta, neúplná funkce beta). Objevené vlastnosti se týkají vyjádření zmíněných prvků a jim blízkých útvarů nejrozmanitějšími způsoby (integrály, mocninnými, trigonometrickými nebo jinými řadami, řetězovými zlomky), zpravidla za účelem poznání jejich funkční povahy či možnosti výhodných numerických výpočtů, nebo se týkají souvislosti s jinými teoriemi (malmsténovské řady, eliptické a besselovské funkce). Z těchto výkonů je třeba zvláště vyzvednout objev souvislostí mezi funkcí gamma a malmsténovskými řadami, jejichž teorii Lerch založil a vybudoval, který umožňuje nejkratší a nejpohodlnější cestu do samého středu teorie funkce gamma. Rovněž základního významu jsou Lerchovy výsledky o Prymově funkci $Q$, které představují vrcholné výkony v tomto oboru." (Viz [6], 457.)

Všimněme si nyní aspoň některých důležitějších Lerchových výsledků z teorie funkce gamma. Poznamenejme hned předem, že i jeho výsledky rázu metodického zasluhují velké pozornosti vzhledem k tomu, že se v nich obráží bohatá Lerchova zkušenost v používání klasických metod funkce komplexní proměnné na konkretní případy a v popisu nových metodických principů, jako je např. princip nejrychlejší konvergence a zavedení parametru při vyšetřování meromorfních funkcí.

Důležitou prací je pojednání S 98, kde jsou odvozeny dvě nová asymptotická vyjádření absolutní hodnoty funkce gamma. Jedno z nich je dáno vzorcem

$$|\Gamma(\xi + i\eta)| = \frac{\Gamma(\xi + 1)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \sqrt{\frac{\pi\eta}{\sinh \pi\eta}} \cdot \varphi(\eta) ,$$

kde $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \neq \eta$ (reálné), $1 < \varphi(\eta) < \sqrt{1 + \eta^2}$.

Kromě toho odvozuje Lerch v této práci novou charakteristickou vlastnost funkce gamma, která se ukázala výhodnou při mnohých aplikacích. Vzhledem k tomu si této práce Lerch velmi cenil. (Viz S 98, na str. 241.) Vlastnost ta je vyjádřena větou:

*Je-li $F(z)$ jednoznačná analytická funkce, jež nemá jiných singularit kromě pólů prvního řádu v bodech $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$, která hoví diferenční rovnici $F(z+1) = z \,.\, F(z)$ a pro $0 \leqq \xi \leqq 1$ a dosti velká $|\eta|$ splňuje nerovnost*

$$|F(\xi + i\eta)| \leqq A \,.\, |\xi + i\eta|^p \,.\, e^{\alpha\pi|\eta|}\,,$$

*přičemž $A$, $p$, $\alpha$ jsou libov. kladné konst., $\alpha < \frac{3}{2}$, pak podíl $F(z) : \Gamma(z)$ je konstantní.*

Lerch používá této věty např. k důkazu známého Gaussova multiplikativního theorému a k odvození integrálního vyjádření funkce gamma z jejího vyjádření součinového. Po stránce didaktické byla tato věta předstižena teprve po 30 letech, když totiž r. 1931 odvodil E. Artin (v práci *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*) novou charakteristickou vlastnost funkce gamma, logaritmickou konvexitu, pomocí níž byla vybudována teorie popisující základní vlastnosti funkce gamma, výborně vyhovující účelům didaktickým.

Bohatá novými výsledky je práce S 101. V ní odvodil Lerch důležité vztahy mezi malmsténovskými řadami a funkcí gamma, jejíž vlastnosti lze tímto způsobem pohodlně studovat. Zajímavý je např. Lerchův vzorec pro speciální malmsténovskou řadu

$$R(a, u, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[(a+n)^2 + u^2]^s}\,,$$

jenž zní

$$\ln \Gamma(a + iu) \,.\, \Gamma(a - iu) = \ln 2\pi + D_{s=0}\, R(a, u, s)\,.$$

Zajímavou drobnůstkou z okruhu Lerchových úvah o logaritmu funkce gamma je odvození Raabeova vzorce

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x + u)\, \mathrm{d}x = u(\ln u - 1) + \tfrac{1}{2} \ln 2\pi \quad (\text{pro } u > 0)\,.$$

Lerch tento vzorec odvodil několika způsoby, z nichž způsob uvedený v pracích S 34, S 48, S 98 (substitucí $t = u + x$ a derivováním podle $u$) byl tak elegantní, že jej Ch. Hermite přejal do svých přednášek na Sorbonně (uvádí jej slovy: „*Voici pour y parvenir la méthode ingénieuse et élegante de M. Matyas Lerch*", Cours de Ch. Hermite, str. 129), prof. F. G. Texeira jej uveřejnil ve své učebnici integrálního počtu (Curso de Analyse Infinitesimal, II, Porto 1892) a také prof. K. Petr v 1. vyd. Integrálního počtu (str. 399, zatímco v 2. vyd. z r. 1931 je příslušný odstavec vynechán).

Z dalších Lerchových výsledků z teorie funkce gamma se aspoň zmiňme o vztazích, které se týkají Binetovy funkce a jejího zobecnění (práce S 96, S 98, S 104), logaritmické derivace funkce gamma, jež vyplynuly z jeho již zmíněných vět o derivování řady Kummerovy a jí příbuzných řad trigonometrických (S 118, S 125, S 137), a integrállogaritmu.

Velmi významné jsou výsledky jeho studií Prymových funkcí $P$, $Q$ definovaných vzorci

$$P(s, \omega) = \int_0^\omega e^{-x} x^{s-1}\, dx\,, \quad Q(s, \omega) = \int_\omega^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx\,.$$

Zatímco Lerchův přínos k teorii funkce $P$ je převážně rázu metodického, dosahuje při studiu funkci $Q$ vskutku vynikajících úspěchů, takže se o nich Ch. Hermite ve svém dopise Stieltjesovi (Corresp. d'Hermite et de Stieltjes, I, 304) velmi pochvalně vyslovil. Tyto výsledky se nalézají v pracích S 48, S 191 a S 195, jež obsahují kromě toho mnoho výsledků o integrállogaritmu a Krampově transcendentě $L$.

Také známé Eulerově konstantě $C$, definované obvykle jedním ze vzorců

$$C = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n\right), \quad C = -\Gamma'(1)\,,$$

věnoval Lerch značnou pozornost (v pracích S 131, S 132, S 134, S 151 a S 154) a odvodil pro ni mnoho zajímavých vztahů.

Třebaže Lerchovy práce o funkci gamma představují nejvýznamnější část Lerchova díla z oboru matematické analysy a současně důležitou složku světové tvorby, ,,nelze říci, že by tyto Lerchovy výkony, přes pokročilý časový odstup, zatím došly náležitého rozšíření ve světové literatuře. Je pravda, že jsou disertace a vědecká díla starší i moderní (Godefroy, Hermite-Stieltjes, Nielsen, Whittaker-Watson), které uvádějí Lerchovy výsledky na významných místech, často s nemalou chválou jeho talentu. Avšak rovněž je pravda, že v těchto případech jde o nepatrný zlomek Lerchových výkonů a že Lerchův význam v teorii funkce gamma unikl i kompetentním odborníkům někdy naprosto. V *Encylopädie der mathematischen Wissenschaften* z let 1899—1916, ve stati o omezených integrálech, v níž je zahrnuta též funkce gamma, z péra G. Brunela, je Lerch citován málo a na místech spíše podřadných. Poznání Lerchova významu v plném rozsahu je věcí budoucnosti. Můžeme-li z některých známek usuzovat na oživení činnosti na tomto úseku klasické analysy, předvídáme rostoucí význam Lerchova díla v širokém měřítku v budoucnosti nedaleké". (Borůvka [6], str. 458.)

d) Teorií eliptických funkcí se Lerch zabývá asi v 25 pojednáních, z nichž poslední práce S 237 s názvem *Eliptické funkce* vyšla až po smrti Lerchově v r. 1923. K tisku ji připravil prof. O. Borůvka z rukopisné pozůstalosti Lerchovy, který chystal o eliptických funkcích obšírnější učebnici, jejíž první díl práce S 237 představuje. Lerch v ní studuje systematicky vlastnosti eliptických funkcí sn, cn, dn a funkce theta. Přitom na několika příkladech ukazuje použití trigonometrických rozvojů těchto funkcí v teorii čísel. Dále v ní zavádí novou transformaci pro výpočet eliptických integrálů, jež se v daných případech lépe osvědčuje nežli obvyklá transformace Landenova.

Též ostatní Lerchovy práce o eliptických funkcích jsou většinou rázu metodického, což nepřekvapuje, uvážíme-li, že v Lerchově době byl rozvoj klasické teorie eliptických funkcí vlastně již dokončen. Největší pozornost věnuje Lerch ze základních eliptických funkcí funkci theta. Tak je tomu např. v pracích S 29, S 130 a jmenované již S 237, z nichž v první práci upozorňuje na nedostatky Gaussova důkazu jednoho vzorce pro funkci $\vartheta_1(v, \tau)$ a proto tento vzorec dokazuje novým způsobem, a to pomocí Weierstrassovy funkce $\sigma(u, \omega, \omega')$. V pracích S 41, S 65 a S 146 odvozuje novým způsobem některé rozvoje eliptických funkcí

$$\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_0(u)}, \quad \frac{\vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u)}, \quad \frac{\vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u) \, . \, \vartheta_1(x)},$$

již dříve odvozené C. G. J. JACOBIM, Hermitem a Kroneckerem.

Hlavní část Lerchova přínosu v teorii eliptických funkcí souvisí s Kroneckerovými výsledky uveřejněnými v práci „*Zur Theorie der elliptischen Functionen*" (Sitzungsber. der preuss. Ak., 1883—1890). Těmto úvahám jsou věnovány práce S 90, S 97, S 115 a S 190. Tak např. v práci S 115 odvodil Lerch nové vzorce pro funkci

$$\Phi(u, w, v, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2imv\pi}}{(u+m)(1-e^{2\pi i(w+m\omega)})},$$

které patří mezi nejlepší Lerchovy výsledky z uvedeného okruhu otázek.

Nakonec se ještě zmiňme o Lerchově důkazu jedné limitní Kroneckerovy formule, jíž se zabýval Lerch v pracích S 97, S 110 a S 190. Tento důkaz, uvedený v práci S 97, je též citován v *Encyklop. der math. Wiss.*, II, 2, str. 33.

e) Integrálního počtu se týká asi 25 Lerchových prací, které však nepřinášejí podstatně nových výsledků. Většinou podává v nich Lerch pouze nové metody k vyčíslení a k transformaci již známých integrálů, příp. odvozuje zobecnění výsledků již známých. Třebaže jsou tyto výsledky převážně metodického rázu, jsou po mnohých stránkách velmi poučné, takže některé z nich přešly do světových učebnic, jako např. do Whittaker-Watsonovy, *A Course of Modern analysis*, Cambridge 1920, str. 279.

Poznamenejme ještě, že se Lerch v několika svých pracích (S 49, S 55, S 86, S 198 a S 200) zabývá též řešením jistých diferenciálních rovnic. Tak např. v pracích S 198 a 200 zdokonaluje metodu Heineovu pro řešení lineární rovnice

$$y'' + (2m \cos 2x + n)\, y = 0\,,$$

v níž se má parametr $n$ určit tak, aby jedno řešení bylo periodické. Zatím co Heine dovedl rovnici řešit jen pro malé hodnoty tohoto parametru, Lerch jeho metodu rozšiřuje i na parametr mnohem větší.

**B.** Kromě analysy dosáhl Lerch vynikajících úspěchů též v **teorii čísel.** Vždyť za číselněteoretickou práci „*Essai sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers*" obdržel r. 1900 Velkou cenu franc. Akademie. Práci tuto vydal dvakrát tiskem, a to v původním znění (S 199) v „*Mémoires présentés à l'Académie de Sc. 33* (1906), 2, pp. 1 až 244 a kromě toho poněkud upravenou a zkrácenou v *Acta math. 29* (1905), 333—424, *30* (1906), 203—293. V obou těchto pracích, jak je z nadpisu patrno, jedná Lerch o počtu tříd binárních forem kvadratických s celistvými koeficienty, kterýmžto problémem se zabývá Lerch ještě v dalších 14 pojednáních (S 117, S 135, S 138, S 140, S 141, S 172, S 179, S 182, S 193, S 208, S 217, S 219 a 220). Již v pracích S 117 a S 135 odvodil nové pozoruhodné výsledky pro počet tříd v případě záporného diskriminantu $-\Delta$. Z příslušného Lerchova vzorce

$$Cl(-\Delta) = \frac{\tau\sqrt{\Delta}}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu\pi x}{\nu}, \quad \text{kde} \quad 0 \leqq x < \frac{1}{\Delta},$$

lze pak celkem bez obtíží odvodit řady pro rychlý výpočet čísla $Cl(-\Delta)$, jak také Lerch v S 135 ukazuje. Podobnými úvahami se vyznačují i další dvě práce S 138 a S 140, uveřejněné r. 1898 v *Rozpravách Č. Akademie.* V práci S 199 poctěné Velkou cenou jednak shrnuje výsledky již dříve odvozené, jednak odvozuje mnoho nových pozoruhodných výsledků. Tak např. jedním z hlavních těchto výsledků je Lerchův vzorec pro počet tříd kvadratických forem s kladným diskriminantem, a to

$$Cl(D) \,.\, \ln E(D) = 2\sqrt{\frac{D}{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m} \int_{m\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2}\, dx + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \int_{\frac{m^2\pi}{Du}}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x},$$

kde $E(D)$ značí základní Pellovu jednotku k diskriminantu $D$. Později v práci S 179 Lerch podrobně ukázal, jak je možno tento výsledek upravit k praktickému výpočtu čísla $Cl(D)$.

Ze zbývajících 15 prací týkajících se teorie čísel se jich 5 zabývá Gaussovými součty (S 133, S 153, S 173, S 180 a S 184), Fermatovu kvocientu jsou věnovány práce S 196 a S 201, jiné (S 27, S 171, S 181, S 236) kvadratickým zbytkům a ostatní některým dalším otázkám. Přitom jsou v nich odvozeny novými metodami vedle již známých výsledků pozoruhodné výsledky nové. Tak např. v práci S 236, která vyšla r. 1923, tedy až po smrti Lerchově, péčí prof. O. Borůvky a prof. B. Hostinského, nachází nové vztahy pro kvadratické zbytky v souvislosti s teorií kvadratických forem o záporném diskriminantu. Přitom ukazuje, jak je možno těchto výsledků použít k řešení diofantických rovnic.

**C.** Různým otázkám z **geometrie** věnoval Lerch asi 15 prací, které pocházejí většinou z posledního údobí jeho vědecké činnosti, a to z let 1911 až 1918. Je však zajímavé, že práce S 10, kterou uveřejnil na začátku své vědecké dráhy r. 1885 a v níž zobecnil některé výsledky EMILA WEYRA z r. 1879, je ze všech jeho vědeckých prací z geometrie nejvíce citována (DERUYTS, ZEUTHEN). Lerch se po celý svůj život rád vracel ke geometrii, jak ostatně plyne i z toho, že ji přednášel nejen jako docent na technice v Praze po tři stud. roky, nýbrž i ve Fribourgu, třebaže tam geometrie náležela k učebnímu úvazku jiného profesora, Holanďana DANIELSE. Nejobsáhlejší Lerchovou prací z geometrie je pojednání S 228, uveřejněné v *Rozpravách Č. Ak.* r. 1917. Lerch v ní na 157 stranách jedná o plochách kotálnic kruhových a inversních plochách válců a kuželů a zároveň řeší celou řadu rozličných problémů z geometrie rovinné i prostorové s touto otázkou souvisících. Třebaže tyto úvahy jsou po mnohých stránkách zajímavé, nejsou zásadního významu.

**D.** Z ostatních oborů, jimiž se Lerch ve svých pracích zabýval, připomeňme **fysiku a fysikální chemii.** Fysikálními problémy se zabývají práce S 36, S 47, S 59, S 200, z nichž poslední, jednající o některých problémech vztahujících se k funkcím eliptického válce, je částí obsáhlejšího pojednání, které větším dílem zůstalo v rukopise, stejně jako větší pojednání o skládání sil. Práce S 238 z fysikální chemie je známa pouze ze 2 separátů a dosud se nepodařilo zjistit, kde a kdy vyšla.

Závěrem uvádím v chronologickém pořadí *bibliografii* o prof. M. Lerchovi:


[1] *K. Petr*: Matyáš Lerch, Almanach Čes. Akad. 1923, 116—138.

[2] *K. Čupr*: Prof. Matyáš Lerch, Čas. pro pěst. mat. a fys. *52* (1923), 301—313.

[3] *K. Čupr a K. Rychlík*: Seznam vědeckých prací † prof. Mat. Lercha, Čas. pro pěst. mat. *54* (1925), 140—151.

[4] *L. Frank*: O životě Matyáše Lercha, Čas. pro pěst. mat. *78* (1953), 119—137.

[5] *J. Škrášek*: Seznam prací prof. Matyáše Lercha, Čas. pro pěst. mat., *78* (1953), 139 až 148.

[6] *O. Borůvka a spolupracovníci*: Dílo Matyáše Lercha v oboru matematické analysy, Práce Brněnské zákl. Čsl. akad. věd, *29* (1957), 417—540.

[7] *O. Borůvka*: Mathias Lerch als Fortsetzer der Klassiker in der Theorie der Gammafunktion, Sammelband zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers, Akademie-Verlag, Berlin 1959, 78—86.

[8] *L. Frank*: Ke stému výročí narozenin Matyáše Lercha, Pokroky matematiky, fysiky a astronomie, *5* (1960).