Jan Mařík; Miloš Neubauer

O řadách s nezápornými členy

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 85 (1960), No. 2, 188–197

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108372`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

# O ŘADÁCH S NEZÁPORNÝMI ČLENY

JAN MAŘÍK A MILOŠ NEUBAUER, Praha

(Došlo dne 4. června 1959)

Vyšetřují se takové řady $\Sigma a_n$ s nezápornými členy, že pro každou divergentní řadu $\Sigma b_n$ s vlastností $b_n \searrow 0$ diverguje také řada $\Sigma \min(a_n, b_n)$.

**Označení.** $N$ je množina všech přirozených čísel; $\mathfrak{P}$ je množina všech posloupností $\{a_n\} = \{a_n\}_{n \in N}$, kde $a_n$ jsou (konečná) nezáporná čísla; $\Omega$ je množina všech omezených posloupností z $\mathfrak{P}$; $\mathfrak{K}$ je množina všech nerostoucích posloupností s limitou 0; $\mathfrak{K}_\infty$ je množina všech $\{b_n\} \in \mathfrak{K}$, pro něž $\sum\limits_{n \in N} b_n = \infty$.

Připomeňme: Je-li $\bigcup\limits_{r \in N} M_r = N$ a $\{a_n\} \in \mathfrak{P}$, je

$$\sum_{n \in N} a_n \leqq \sum_{r \in N} \sum_{n \in M_r} a_n ;$$

je-li mimo to sjednocení disjunktní, lze psát $=$ místo $\leqq$. — Jsou-li $0 = k_0 < < k_1 < k_2 < \ldots$ celá čísla, je-li $\{\beta_n\} \in \mathfrak{K}$ a $b_n = \beta_r$ pro $k_{r-1} < n \leqq k_r$, je také $\{b_n\} \in \mathfrak{K}$. — Pro každou posloupnost $\{a_n\} \in \mathfrak{K}$ platí vztahy

$$\sum_{n \in N} a_n = \infty \Leftrightarrow \sum_{n \in N} 2^n a_{2^n} = \infty , \quad \sum_{n \in N} a_n < \infty \Rightarrow n a_n \to 0 .$$

**Lemma 1.** *Je-li $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$, potom pro $q > 0$ také* $\left\{\min\left(\frac{1}{qn}, b_n\right)\right\} \in \mathfrak{K}_\infty$.

Důkaz. Položme $\beta(n) = b_n$, $\psi(n) = \min\left(\frac{1}{qn}, \beta(n)\right)$, $M = E\,[n; q^{-1} < 2^n\beta(2^n)]$. Je

$$\sum_{n \in N} 2^n \psi(2^n) = \sum_{n \in N} \min\left(\frac{1}{q}, 2^n \beta(2^n)\right) = S_1 + S_2 ,$$

kde

$$S_1 = \sum_{n \in M} \frac{1}{q}, \quad S_2 = \sum_{n \in N - M} 2^n \beta(2^n) ;$$

dále platí $\sum\limits_{n \in N} 2^n \beta(2^n) = \infty$. Je-li množina $M$ konečná, je tedy $S_2 = \infty$; je-li množina $M$ nekonečná, je zřejmě $S_1 = \infty$, takže v každém případě $\sum\limits_{n \in N} 2^n \psi(2^n) = = \infty$. Protože $\{\psi(n)\} \in \mathfrak{K}$, je také $\sum\limits_{n \in N} \psi(n) = \infty$ a tedy $\{\psi(n)\} \in \mathfrak{K}_\infty$.

**Lemma 2.** *Buď $\{k_r\}_{r\in N}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom je $\left\{\frac{k_r}{r}\right\} \in \Omega$, právě když pro každou posloupnost $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ platí $\sum_{r\in N} b_{k_r} = \infty$.*

Důkaz. Nechť napřed $\left\{\frac{k_r}{r}\right\} \in \Omega$; buď $q$ takové přirozené číslo, že $k_r \leqq rq$ pro všechna $r$. Je-li $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$, pak, ježto pro každé celé $j \geqq 0$ a každé $r \in N$ platí $b_{rq+j} \leqq b_{k_r}$, je

$$\sum_{n=q}^{\infty} b_n = \sum_{r\in N} \sum_{j=0}^{q-1} b_{rq+j} \leqq \sum_{r\in N} qb_{k_r},$$

takže $\sum_{r\in N} b_{k_r} = \infty$.

Nechť nyní $\left\{\frac{k_r}{r}\right\}$ non $\in \Omega$. Potom existuje taková rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{j_r\}_{r\in N}$, že

$$k_{j_{r+1}} \geqq 2k_{j_r}, \quad \frac{k_{j_{r+1}}}{j_{r+1}} \geqq (r+1) + \frac{k_{j_r}}{j_r}.$$

Položíme-li $j_0 = k_0 = 0$, potom pro $r \in N$ je jednak $k_{j_{r+1}} - k_{j_r} \geqq k_{j_r} - k_{j_{r-1}}$ a jednak $\frac{j_r - j_{r-1}}{k_{j_r} - k_{j_{r-1}}} \leqq \frac{1}{r}$, neboť pro $r > 1$ je

$$\frac{k_{j_r} - k_{j_{r-1}}}{j_r - j_{r-1}} \geqq \frac{k_{j_r} - k_{j_{r-1}}}{j_r} \geqq \frac{k_{j_r}}{j_r} - \frac{k_{j_{r-1}}}{j_{r-1}} \geqq r.$$

Položíme-li nyní $b_n = \frac{1}{r(k_{j_r} - k_{j_{r-1}})}$ pro $k_{j_{r-1}} < n \leqq k_{j_r}$, je předně $\{b_n\} \in \mathfrak{K}$, za druhé je

$$\sum_{n\in N} b_n = \sum_{r\in N} \sum_{k_{j_{r-1}} < n \leqq k_{j_r}} \frac{1}{r(k_{j_r} - k_{j_{r-1}})} = \sum_{r\in N} \frac{1}{r} = \infty,$$

za třetí pro $j_{r-1} < n \leqq j_r$ je $k_{j_{r-1}} < k_n \leqq k_{j_r}$, tedy $b_{k_n} = \frac{1}{r(k_{j_r} - k_{j_{r-1}})}$, takže

$$\sum_{n\in N} b_{k_n} = \sum_{r\in N} \sum_{j_{r-1} < n \leqq j_r} b_{k_n} = \sum_{r\in N} \frac{1}{r} \frac{j_r - j_{r-1}}{k_{j_r} - k_{j_{r-1}}} \leqq \sum_{r\in N} \frac{1}{r^2} < \infty.$$

**Definice.** Je-li $M \subset N$, $n$ celé $\geqq 0$, buď

$$S(M, n) = E[k \in M; k \leqq n];$$

$p(M, n)$ buď počet prvků množiny $S(M, n)$. Položme

$$h(M) = \limsup_{n\to\infty} \frac{p(M, n)}{n}; \quad d(M) = \liminf_{n\to\infty} \frac{p(M, n)}{n}.$$

Číslo $h(M)$ (resp. $d(M)$) nazveme *horní* (resp. *dolní*) *hustotou* množiny $M$. Zřejmě $h(M) + d(N - M) = 1$.

**Lemma 3.** *Nechť* $\{a_n\} \in \mathfrak{P}$ *a nechť pro každé* $q > 0$ *má množina*

$$V_q = E[n; qna_n < 1]$$

*horní hustotu* 1. *Potom existuje taková množina* $Q \subset N$, *že* $h(Q) = 1$, $\sum_{n \in Q} a_n < \infty$.

Důkaz. Zvolme napřed čísla $q_r \geqq 2$ tak, aby řada $\sum_{r \in N} \frac{\log q_r}{q_r}$ konvergovala. Protože $h(V_{q_r}) = 1$, existuje ke každému $r \in N$ nekonečně mnoho přirozených čísel $k$ takových, že $1 - \frac{1}{r} \leqq \frac{p(V_{q_r}, k)}{k} \leqq 1$. Existují tedy taková přirozená čísla $k_r$, že $1 < k_1 < k_2 < \ldots$, $\lim_{r \to \infty} \frac{p(V_{q_r}, k_r)}{k_r} = 1$. Definujme celá $j_r$ vztahem $\frac{k_r}{q_r} \leqq j_r < \frac{k_r}{q_r} + 1$; potom, ježto $q_r \geqq 2$, $k_r \geqq 2$, je

$$k_r \geqq k_r \left(\frac{1}{q_r} + \frac{1}{k_r}\right) = \frac{k_r}{q_r} + 1 > j_r .$$

Položme

$$Q_r = V_{q_r} \cap (j_r, k_r\rangle , \quad Q = \bigcup_{r \in N} Q_r .$$

Zřejmě

$$S(V_{q_r}, k_r) \subset \{1, \ldots, j_r\} \cup S(Q, k_r) ,$$
$$p(Q, k_r) \geqq p(V_{q_r}, k_r) - j_r ;$$

protože $\frac{j_r}{k_r} < \frac{1}{q_r} + \frac{1}{k_r}$, je $\lim_{r \to \infty} \frac{j_r}{k_r} = 0$ a tedy $\lim_{r \to \infty} \frac{p(Q, k_r)}{k_r} = 1$. Vidíme, že $h(Q) = 1$. Protože $Q_r \subset V_{q_r}$, je $a_n < \frac{1}{nq_r}$ pro každé $n \in Q_r$ a tedy

$$\sum_{n \in Q_r} a_n \leqq \frac{1}{q_r} \sum_{n=j_r+1}^{k_r} \frac{1}{n} < \frac{1}{q_r} \log \frac{k_r}{j_r} \leqq \frac{\log q_r}{q_r} ,$$

takže opravdu

$$\sum_{n \in Q} a_n \leqq \sum_{r \in N} \sum_{n \in Q_r} a_n < \infty .$$

**Lemma 4.** *Buď* $\{k_n\}$ *rostoucí posloupnost přirozených čísel; buď* $M$ *množina všech* $k_n$. *Potom* $d(M) = \liminf_{n \to \infty} \frac{n}{k_n}$, $h(M) = \limsup_{n \to \infty} \frac{n}{k_n}$.

Důkaz. Pišme $p(M, n) = p(n)$, takže při $p(n) > 0$ je $p(n)$ největší index $r$, pro který $k_r \leqq n$. Pro každé $n$ je tedy (klademe $k_0 = 0$) $k_{p(n)} \leqq n < k_{p(n)+1}$, $p(k_n) = n$; zřejmě $\lim_{n \to \infty} p(n) = \infty$. Ze vztahů $\limsup \frac{n}{k_n} = \limsup \frac{p(k_n)}{k_n} \leqq \leqq \limsup \frac{p(n)}{n} \leqq \limsup \frac{p(n)}{k_{p(n)}} \leqq \limsup \frac{n}{k_n}$ plyne nyní, že $\limsup \frac{n}{k_n} =$

$= \limsup \frac{p(n)}{n} = h(M)$; ze vztahů $\liminf \frac{n}{k_n} = \liminf \frac{n+1}{k_{n+1}} = \liminf \frac{n}{k_{n+1}} \leqq$ $\leqq \liminf \frac{p(n)}{k_{p(n)+1}} \leqq \liminf \frac{p(n)}{n} \leqq \liminf \frac{p(k_n)}{k_n} = \liminf \frac{n}{k_n}$ plyne podobně, že $\liminf \frac{n}{k_n} = d(M)$.

**Lemma 5.** *Nechť $M \subset N$. Potom je $d(M) > 0$, právě když pro každou posloupnost $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ platí $\sum_{n \in M} b_n = \infty$.*

(Plyne snadno z lemmat 2 a 4.)

**Označení.** $\mathfrak{M}$ je množina všech $\{a_n\} \in \mathfrak{P}$ takových, že $\sum_{n \in N} \min(a_n, b_n) = \infty$ pro každou $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$.

**Lemma 6.** *Nechť $\{a_n\} \in \mathfrak{M}$. Potom existuje $q$ tak, že množina $V_q$ z lemmatu 3 má horní hustotu menší než 1.*

Důkaz. Nechť $h(V_q) = 1$ pro všechna $q > 0$. Sestrojme množinu $Q$ podle lemmatu 3 a položme $M = N - Q$. Protože $d(M) = 0$, existuje podle lemmatu 5 taková posloupnost $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$, že $\sum_{n \in M} b_n < \infty$ a tedy

$$\sum_{n \in N} \min(a_n, b_n) \leqq \sum_{n \in Q} a_n + \sum_{n \in M} b_n < \infty ;$$

vidíme, že není $\{a_n\} \in \mathfrak{M}$.

**Věta 1.** *Posloupnost $\{a_n\} \in \mathfrak{P}$ patří do $\mathfrak{M}$, právě když existuje taková rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}$, že $\left\{\frac{k_n}{n}\right\} \in \Omega$, $a_{k_n} > 0$ $(n \in N)$, $\left\{\frac{1}{k_n a_{k_n}}\right\} \in \Omega$.*

Důkaz. Nechť taková posloupnost $\{k_n\}$ existuje; nechť $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$. Podle lemmatu 2 je $\sum_{n \in N} b_{k_n} = \infty$. Zřejmě je $\left\{\frac{k_n}{n} \frac{1}{k_n a_{k_n}}\right\} \in \Omega$, takže existuje $q > 0$ takové, že $\frac{1}{n a_{k_n}} < q$ neboli $a_{k_n} > \frac{1}{nq}$ $(n \in N)$. Podle lemmatu 1 je $\sum_{n \in N} \min(a_{k_n}, b_{k_n}) \geqq$ $\geqq \sum_{n \in N} \min\left(\frac{1}{qn}, b_{k_n}\right) = \infty$ a tím spíš $\sum_{n \in N} \min(a_n, b_n) = \infty$. Tedy je $\{a_n\} \in \mathfrak{M}$.

Nechť naopak $\{a_n\} \in \mathfrak{M}$. Podle lemmatu 6 existuje $q$ tak, že $h(V_q) < 1$; buďte $k_1 < k_2 < \dots$ všechna přirozená čísla, která nepatří do $V_q$ (je jich zřejmě nekonečně mnoho). Podle lemmatu 4 je $\limsup_{n \to \infty} \frac{k_n}{n} = \frac{1}{1 - h(V_q)}$, takže $\left\{\frac{k_n}{n}\right\} \in \Omega$; zřejmě $q a_{k_n} k_n \geqq 1$ pro všechna $n$ a tedy $a_{k_n} > 0$, $\left\{\frac{1}{k_n a_{k_n}}\right\} \in \Omega$.

**Věta 2.** *Nechť* $\{a_n\} \in \mathfrak{K}$. *Potom je* $\{a_n\} \in \mathfrak{M}$, *právě když* $a_n > 0$ $(n \in N)$, $\left\{\frac{1}{na_n}\right\} \in \Omega$.

Důkaz. Je-li $\left\{\frac{1}{na_n}\right\} \in \Omega$, je $\{a_n\} \in \mathfrak{M}$ podle věty 1. Je-li naopak $\{a_n\} \in \mathfrak{M}$, pak zřejmě $a_n > 0$ pro každé $n$ a je-li $\{k_n\}$ posloupnost z věty 1, existuje $q > 0$ tak, že

$$q > \frac{k_n}{n} \frac{1}{k_n a_{k_n}} = \frac{1}{na_{k_n}} \geqq \frac{1}{na_n} (n \in N) .$$

Poznámka 1. Podle věty 2 patří posloupnost $\{a_n\} \in \mathfrak{K}$ do $\mathfrak{M}$, právě když existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $a_n > \frac{\varepsilon}{n}$ pro všechna $n$. Větu 1 lze formulovat podle lemmatu 4 také takto: Posloupnost $\{a_n\} \in \mathfrak{P}$ patří do $\mathfrak{M}$, právě když existuje množina $M \subset N$ a číslo $\varepsilon > 0$ tak, že $d(M) > 0$ a že $a_n > \frac{\varepsilon}{n}$ pro každé $n \in M$. Zhruba řečeno: Vztah $\{a_n\} \in \mathfrak{M}$ znamená, že v posloupnosti $\{a_n\}$ lze nalézt hodně členů, které nejsou příliš malé.

Poznámka 2. Z předchozí poznámky plyne, že posloupnost $\{a_n\} \in \mathfrak{P}$ nepatří do $\mathfrak{M}$, právě když $d(E[n; na_n > \varepsilon]) = 0$ pro každé $\varepsilon > 0$. Podle toho nepatří do $\mathfrak{M}$ žádná posloupnost $\{a_n\} \in \mathfrak{P}$, pro kterou je $na_n \to 0$. Ježto existují posloupnosti $\{a_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ s vlastností $na_n \to 0$ $\left(\text{např. } a_n = \frac{1}{n \log (n + 1)}\right)$, může se stát, že $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$, ale $\sum_{n \in N} \min (a_n, b_n) < \infty$.

Poznámka 3. Ke každé posloupnosti $\{a_n\} \in \mathfrak{P} - \mathfrak{M}$ a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dokonce taková posloupnost $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ s vlastností $\sum_{n \in N} \min (a_n, b_n) < \infty$, že $b_n < \frac{\varepsilon}{n}$ pro $n \in N$. Je-li totiž $\{\beta_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$, $\sum_{n \in N} \min (a_n, \beta_n) < \infty$ a položíme-li $b_n = \min\left(\frac{\varepsilon}{2n}, \beta_n\right)$, pak podle lemmatu 1 je $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ a pro $n \in N$ je $\min (a_n, b_n) \leqq \leqq \min (a_n, \beta_n)$, $b_n < \frac{\varepsilon}{n}$.

**Označení.** $\mathfrak{S}$ je systém všech množin $M \subset N$, pro něž platí implikace

$$Q \subset N,\ d(Q) = 0 \Rightarrow d(Q \cup M) = 0.$$

Poznámka 4. Zřejmě $d(M) = 0$ pro každou množinu $M \in \mathfrak{S}$. Z příkladu 1 je však patrné, že ze vztahu $d(M) = 0$ neplyne $M \in \mathfrak{S}$. Je-li $M \subset N$, $Q \subset N$, platí $d(Q \cup M) \leqq d(Q) + h(M)$, takže do $\mathfrak{S}$ patří každá množina s nulovou horní hustotou. Příklad 2 ukazuje, že do $\mathfrak{S}$ patří také některé množiny $M$, pro něž $h(M) > 0$. Zřejmé jsou dále tyto implikace:

$$M_1 \subset M_2 \in \mathfrak{S} \Rightarrow M_1 \in \mathfrak{S}\ ; \quad M_1, M_2 \in \mathfrak{S} \Rightarrow M_1 \cup M_2 \in \mathfrak{S} .$$

Odtud vyplývá: Píšeme-li $\{a_n\} \sim \{\alpha_n\}$ pro $\{a_n\}, \{\alpha_n\} \in \mathfrak{P}$, právě když $E[n; a_n \neq \alpha_n] \in \mathfrak{S}$, je tento vztah transitivní. Z poznámky 2 vychází

$$\{a_n\} \in \mathfrak{M}\,, \quad \{a_n\} \sim \{\alpha_n\} \Rightarrow \{\alpha_n\} \in \mathfrak{M}\,.$$

**Věta 3.** *Nechť $\{a_n\} \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{M}$, $M \subset N$, $\sum_{n \in M} a_n < \infty$. Potom $h(M) = 0$.*

Důkaz. Buď množina $M$ nekonečná, $M = \{k_1, k_2, \ldots\}$, kde $k_1 < k_2 < \ldots$ Podle poznámky 1 existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\frac{\varepsilon}{k_n} < a_{k_n}$ pro všechna $n$. Protože $\sum_{n \in N} \frac{1}{k_n} < \infty$, $\frac{1}{k_1} > \frac{1}{k_2} > \ldots$, je $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{k_n} = 0$. Podle lemmatu 4 je $h(M) = 0$.

Poznámka 5. Z věty 3, z poznámky 4 a z lemmatu 1 plyne, že do $\mathfrak{S}$ patří každá množina $M \subset N$, pro kterou je $\sum_{n \in M} \frac{1}{n} < \infty$. Existenci množiny $M$, pro kterou je $h(M) = 0$, ale $\sum_{n \in M} \frac{1}{n} = \infty$, ukazuje tento příklad: Budiž $M$ množina všech přirozených čísel $k_r = [r \log r]$, kde $r = 2, 3, \ldots$ ($[c]$ je největší celé číslo $\leqq c$). Je $k_2 < k_3 < \ldots$, $\frac{k_r}{r} \to \infty$, tedy $h(M) = 0$, ale

$$\sum_{n \in M} \frac{1}{n} = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{k_r} \geqq \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r \log r} = \infty\,.$$

**Lemma 7.** *Budiž dána posloupnost $\{a_n\} \in \mathfrak{P} - \mathfrak{M}$ a množina $M \subset N$. Položme $a_n^{(M)} = a_n$ pro $n \in N - M$, $a_n^{(M)} = 1$ pro $n \in M$. Potom právě tehdy, když $\{a_n^{(M)}\} \in \mathfrak{P} - \mathfrak{M}$, existuje dokonce taková $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ s vlastností $\sum_{n \in N} \min(a_n, b_n) < \infty$, že $\sum_{n \in M} b_n < \infty$.*

Důkaz. Budiž $\{a_n^{(M)}\} \in \mathfrak{P} - \mathfrak{M}$. Pak existuje $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ s vlastností

$$\sum_{n \in N} \min(a_n^{(M)}, b_n) < \infty.$$

Potom je

$$\sum_{n \in M} \min(1, b_n) < \infty\,, \quad \sum_{n \in M} b_n < \infty\,,$$

$$\sum_{n \in N} \min(a_n, b_n) = \sum_{n \in M} \min(a_n, b_n) + \sum_{n \in N - M} \min(a_n^{(M)}, b) < \infty\,.$$

Nechť naopak existuje taková $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$, že $\sum_{n \in N} \min(a_n, b_n) < \infty$, $\sum_{n \in M} b_n < \infty$. Potom

$$\sum_{n \in N} \min(a_n^{(M)}, b_n) = \sum_{n \in M} \min(1, b_n) + \sum_{n \in N - M} \min(a_n, b_n) < \infty\,,$$

takže $\{a_n^{(M)}\} \in \mathfrak{P} - \mathfrak{M}$.

Poznámka 6. Je-li $\{a_n\} \in \mathfrak{P}$, $na_n \to 0$, $M \subset N$, $d(M) = 0$, pak už existuje $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ tak, že $\sum_{n \in N} \min(a_n, b_n) < \infty$, $\sum_{n \in M} b_n < \infty$. Podle poznámky 2 je totiž $\{a_n\} \in \mathfrak{P} - \mathfrak{M}$ a mimo to pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $E[n; na_n^{(M)} > \varepsilon] - M$ konečná; podle poznámky 2 je tedy $\{a_n^{(M)}\} \in \mathfrak{P} - \mathfrak{M}$.

**Věta 4.** *Právě tehdy, když $M \in \mathfrak{S}$, existuje ke každé posloupnosti $\{a_n\} \in \mathfrak{P} - \mathfrak{M}$ dokonce taková $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ s vlastností $\sum_{n \in N} \min(a_n, b_n) < \infty$, že $\sum_{n \in M} b_n < \infty$.*

Důkaz. Je-li $M \in \mathfrak{S}$ a $\{a_n\} \in \mathfrak{P} - \mathfrak{M}$, potom podle poznámky 4 posloupnost $\{a_n^{(M)}\}$ z lemmatu 7 není v $\mathfrak{M}$ a tedy podle tohoto lemmatu žádaná posloupnost $\{b_n\}$ existuje.

Nepatří-li množina $M \subset N$ do $\mathfrak{S}$, můžeme zvolit $Q \subset N$ tak, aby platilo $d(Q) = 0$, $d(M \cup Q) > 0$. Položíme-li $a_n = 1$ pro $n \in Q$, $a_n = 0$ pro $n \in N - Q$, je $E[n; na_n > \varepsilon] \subset Q$ pro každé $\varepsilon > 0$, tedy $\{a_n\} \in \mathfrak{P} - \mathfrak{M}$ podle poznámky 2. Kdyby existovala posloupnost $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ s vlastnostmi $\sum_{n \in N} \min(a_n, b_n) < \infty$, $\sum_{n \in M} b_n < \infty$, bylo by $\sum_{n \in Q} \min(1, b_n) < \infty$, $\sum_{n \in Q} b_n < \infty$, $\sum_{n \in M \cup Q} b_n < \infty$, což je podle lemmatu 5 ve sporu s předpokladem $d(M \cup Q) > 0$.

Poznámka 7. Je-li $\{k_n\}$ taková rostoucí posloupnost přirozených čísel, že $\frac{k_n}{n} \to \infty$, má podle lemmatu 4 množina $M$ všech $k_n$ horní hustotu 0 a patří tedy podle poznámky 4 do $\mathfrak{S}$. Z věty 4 plyne, že ke každé takové posloupnosti $\{k_n\}$ a ke každé $\{a_n\} \in \mathfrak{P} - \mathfrak{M}$ existuje dokonce taková $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ s vlastností $\sum_{n \in N} \min(a_n, b_n) < \infty$, že $\sum_{n \in N} b_{k_n} < \infty$.

Příklad 1. Nechť $k_r = r!$, $T_r = \{k_r + 1, \ldots, k_{r+1}\}$, $T = \bigcup_{r \in N} T_{2r}$. Potom $h(T) = 1$, $d(T) = 0$.

Důkaz. Je-li $r$ sudé, je $p(T, k_{r+1}) \geqq k_{r+1} - k_r$ a tedy $\frac{p(T, k_{r+1})}{k_{r+1}} \geqq 1 - \frac{1}{r+1}$, $h(T) = 1$. Stejně se dokáže vztah $h(N - T) = 1$. Tedy je $d(T) = 0$.

Příklad 2. Nechť $k_r = r!$, $m_r = \frac{1}{2}(k_r + k_{r+1})$, $M_r = \{m_r + 1, \ldots, k_{r+1}\}$ $(r = 2, 3, \ldots)$, $M = \bigcup_{r=2}^{\infty} M_r$. Potom $h(M) > 0$, ale $d(Q \cup M) = 0$ pro každou množinu $Q \subset N$, pro niž $d(Q) = 0$.

Důkaz. Je $p(M, k_{r+1}) \geqq p(M_r, k_{r+1}) = k_{r+1} - m_r = \frac{1}{2}(k_{r+1} - k_r) = \frac{1}{2} k_{r+1}\left(1 - \frac{1}{r+1}\right)$, tedy $h(M) \geqq \frac{1}{2}$.

Nechť nyní $P = Q \cup M$, $d(P) = 4\varepsilon > 0$. Existuje $n_0$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $\frac{p(P, n)}{n} > 3\varepsilon$. Zvolme $r_0$ tak, aby platilo $m_{r_0} > n_0$, $\varepsilon r_0 > 2$. Nechť

$n > m_{r_0}$. Existuje $r$ tak, že $m_r < n \leqq m_{r+1}$; zřejmě $r \geqq r_0$, tedy $m_r > n_0$. Protože $S(M, m_r) \subset \{1, \ldots, k_r\}$, $S(M, n) \subset \{1, \ldots, k_{r+1}\}$, je

$$p(P, m_r) \leqq p(Q, m_r) + k_r\,, \quad p(P, n) \leqq p(Q, n) + k_{r+1}\,.$$

Protože $m_r = \frac{1}{2}k_r(r + 2) > \frac{1}{2}k_{r+1}$, máme tedy

$$\frac{p(Q, m_r)}{m_r} \geqq \frac{p(P, m_r)}{m_r} - \frac{2}{r + 2} > 2\varepsilon\,,$$

$$\frac{p(Q, n)}{n} \geqq \frac{p(Q, m_r)}{m_r} \cdot \frac{m_r}{n} > 2\varepsilon \cdot \frac{k_{r+1}}{2n}\,.$$

Zároveň ovšem

$$\frac{p(Q, n)}{n} \geqq \frac{p(P, n)}{n} - \frac{k_{r+1}}{n} > 3\varepsilon - \frac{k_{r+1}}{n}\,.$$

Je-li $\dfrac{k_{r+1}}{2n} > \varepsilon$, je tudíž $\dfrac{p(Q, n)}{n} > 2\varepsilon^2$; je-li $\dfrac{k_{r+1}}{2n} \leqq \varepsilon$, je $\dfrac{p(Q, n)}{n} > 3\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon$, takže $d(Q) > 0$.


## Резюме

## РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík) и МИЛОШ НОЙБАУЕР (Miloš Neubauer), Прага

Пусть $N$ — множество всех натуральных чисел; $\mathfrak{P}$ — система всех последовательностей $\{a_n\}$ неотрицательных (конечных) чисел; $\Omega$ — система всех ограниченных последовательностей $\{a_n\} \in \mathfrak{P}$; $\mathfrak{K}$ — система всех $\{b_n\} \in \mathfrak{P}$, для которых $b_n \searrow 0$; $\mathfrak{K}_\infty$ — система всех $\{b_n\} \in \mathfrak{K}$ таких, что $\sum_{n \in N} b_n = \infty$.

**Лемма 1.** *Если $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$, то для каждого $q > 0$ также $\left\{\min\left(\frac{1}{qn}, b_n\right)\right\} \in \mathfrak{K}_\infty$.*

Очевидно, $\left\{\frac{1}{qn}\right\} \in \mathfrak{K}_\infty$. Теперь можно поставить вопрос, всегда ли для $\{a_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$, $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ имеет место также $\{\min(a_n, b_n)\} \in \mathfrak{K}_\infty$, или более общий вопрос, как характеризировать систему $\mathfrak{M}$ тех последовательностей $\{a_n\} \in \mathfrak{P}$, для которых $\sum_{n \in N} \min(a_n, b_n) = \infty$ при всех $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$. Ответ дается в следующих двух теоремах:

**Теорема 1.** *Последовательность $\{a_n\} \in \mathfrak{P}$ принадлежит к $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, если существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{k_n\}$ такая, что $\left\{\frac{k_n}{n}\right\} \in \Omega$, $a_{k_n} > 0$ $(n \in N)$, $\left\{\frac{1}{k_n a_{k_n}}\right\} \in \Omega$.*

**Теорема 2.** *Последовательность* $\{a_n\} \in \mathfrak{K}$ *принадлежит к* $\mathfrak{M}$ *тогда и только тогда, если* $a_n > 0$ $(n \in N)$, $\left\{\frac{1}{na_n}\right\} \in \Omega$.

Если положить, напр., $a_n = \frac{1}{n \log (n+1)}$, то видим, что $\{a_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ и что несмотря на это, существует такая последовательность $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$, что $\sum\limits_{n \in N} \min (a_n, b_n) < \infty$.

Кроме того мы занимаемся вопросом, как характеризировать систему $\mathfrak{S}$ тех множеств $M \subset N$, для которых справедлива следующая теорема:

**Теорема 4.** *Тогда и только тогда, если* $M \in \mathfrak{S}$, *существует для каждой последовательности* $\{a_n\} \in \mathfrak{P} - \mathfrak{M}$ *такая последовательность* $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ *со свойством* $\sum\limits_{n \in N} \min (a_n, b_n) < \infty$, *что* $\sum\limits_{n \in M} b_n < \infty$.

Если определить нижнюю плотность $d(M)$ и верхнюю плотность $h(M)$ множества $M \subset N$ по формулам

$$d(M) = \liminf_{n \to \infty} \frac{p(M, n)}{n}, \quad h(M) \quad \limsup_{n \to \infty} \frac{p(M, n)}{n},$$

где $p(M, n)$ обозначает число всех $m \in M$, для которых $m \leqq n$, то $\mathfrak{S}$ состоит из всех $M \subset N$ таких, что $d(M \cup Q) = 0$ для всякого $Q \subset N$ со свойством $d(Q) = 0$.

Работа закончена двумя приложениями. Приводится 1) множество $M_1$ такое, что $d(M_1) = 0$, $h(M_1) = 1$ (следовательно, $M_1$ non $\in \mathfrak{S}$), 2) множество $M_2 \in \mathfrak{S}$ такое, что $h(M_2) > 0$.

## Zusammenfassung

## REIHEN MIT NICHTNEGATIVEN GLIEDERN

Jan Mařík und Miloš Neubauer, Praha

Es bedeute: $N$ die Menge aller natürlichen Zahlen; $\mathfrak{P}$ die Menge aller Folgen $\{a_n\}$ nichtnegativer (endlicher) Zahlen; $\Omega$ bzw. $\mathfrak{K}$ die Menge aller $\{b_n\} \in \mathfrak{P}$, die beschränkt bzw. monoton gegen Null konvergent sind; $\mathfrak{K}_\infty$ die Menge aller $\{b_n\} \in \mathfrak{K}$ mit $\sum\limits_{n \in N} b_n = \infty$.

**Hilfssatz 1.** *Mit jeder Folge* $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ *gehört stets auch die Folge* $\left\{\min \left(\frac{1}{qn}, b_n\right)\right\}$ *für jedes* $q > 0$ *zu* $\mathfrak{K}_\infty$.

Diese Tatsache gibt zu der Frage Anlass: Sind $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ beide aus $\mathfrak{K}_\infty$, kann man behaupten, dass auch $\{\min (a_n, b_n)\}$ zu $\mathfrak{K}_\infty$ gehört? Allgemeiner:

Wie muss die Folge $\{a_n\} \in \mathfrak{P}$ beschaffen sein, damit die Reihe $\sum_{n \in N} \min(a_n, b_n)$ für jede Folge $\{b_n\}$ aus $\mathfrak{K}_\infty$ divergiert?

Bezeichnet man mit $\mathfrak{M}$ die Menge aller Folgen $\{a_n\}$ aus $\mathfrak{P}$, für die dies der Fall ist, so lautet die Antwort folgendermassen:

**Satz 1.** *Eine Folge $\{a_n\}$ aus $\mathfrak{P}$ gehört zu $\mathfrak{M}$ genau dann, wenn es eine wachsende Folge $\{k_n\}$ natürlicher Zahlen gibt derart, dass* $\left\{\frac{k_n}{n}\right\} \in \Omega$, $a_{k_n} > 0$ $(n \in N)$, $\left\{\frac{1}{k_n a_{k_n}}\right\} \in \Omega$ *ist.*

**Satz 2.** *Eine Folge $\{a_n\}$ aus $\mathfrak{K}$ gehört zu $\mathfrak{M}$ genau dann, wenn* $a_n > 0$ $(n \in N)$, $\left\{\frac{1}{n a_n}\right\} \in \Omega$ *ist.*

Setzen wir z. B. $a_n = \frac{1}{n \log(n+1)}$, so sehen wir, dass $\{a_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ ist und dass es trotzdem eine Folge $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ mit $\sum_{n \in N} \min(a_n, b_n) < \infty$ gibt.

Ausserdem wird die folgende Frage behandelt: Wie lässt sich die Klasse $\mathfrak{S}$ jener Untermengen $M \subset N$ charakterisieren, für die der folgende Satz gilt:

**Satz 4.** *Genau wenn $M$ zur Klasse $\mathfrak{S}$ gehört, lässt sich zu jeder Folge $\{a_n\}$ aus $\mathfrak{P} - \mathfrak{M}$ eine Folge $\{b_n\} \in \mathfrak{K}_\infty$ mit $\sum_{n \in N} \min(a_n, b_n) < \infty$ sogar derart bestimmen, dass $\sum_{n \in M} b_n < \infty$ ist.*

Führt man die untere bzw. obere Dichte von $M \subset N$ durch $d(M)$ bzw. $h(M) = \liminf_{n \to \infty}$ bzw. $\limsup_{n \to \infty} \frac{\text{Anzahl aller } r \leqq n \text{ von } M}{n}$ ein, so besteht $\mathfrak{S}$ aus genau allen denen $M \subset N$, für die das Folgende gilt: $Q \subset N$, $d(Q) = 0 \Rightarrow d(Q \cup M) = 0$.

Die Arbeit schliesst mit zwei Beispielen: 1. einer $M \subset N$, die trotz $d(M) = 0$ nicht zu $\mathfrak{S}$ gehört; 2. einer $M \subset N$, die trotz $M \in \mathfrak{S}$ eine positive obere Dichte besitzt.