Časopis pro pěstování matematiky

Miloslav Jůza

La substitution dans les intégrales de Riemann-Stieltjes

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 115 (1990), No. 2, 113--117

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108366`

LA SUBSTITUTION DANS LES INTÉGRALES DE RIEMANN-STIELTJES

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Reçu le 17 novembre 1987)

Summary. Dans ce travail, on prouve quelques théorèmes sur la substitution dans les intégrales de Riemann-Stieltjes. En règle générale, on ne prouve ces théorèmes que pour le cas où on peut transformer l'intégrale de Riemann-Stieltjes en intégrale de Riemann; toutefois, dans ce travail-ci, ils sont prouvés pour le cas général.

Keywords: Riemann-Stieltjes integral, integration by substitutions.

AMS Classification: 26A42.

L'intégrale de Riemann-Stieltjes est définie – comme on sait – de la façon suivante (voir par ex. [1], chap. X, § 7, [2], chap. VIII, § 6, [3], chap. XI, § 6, [4], définition 1):

Ayons des fonctions (réelles finies) f, g définies dans un intervalle $\langle a, b\rangle$. Ayons une partition

$$\mathscr{D}\colon\ a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b \tag{1}$$

de cet intervalle; désignons

$$|\mathscr{D}| = \max_{i=1,\ldots,n} (t_i - t_{i-1})\,.$$

Ayons n nombres

$$T = (\tau_1, \ldots, \tau_n)\,, \quad \text{pour lesquels} \quad \tau_i \in \langle t_{i-1}, t_i\rangle\,. \tag{2}$$

Désignons

$$\mathrm{S}(f, g; \mathscr{D}, T) = \sum_{i=1}^{n} f(\tau_1)\,(g(t_i) - g(t_{i-1}))\,. \tag{3}$$

S'il existe un nombre A tel que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|\mathrm{S}(f, g; \mathscr{D}, T) - A| < \varepsilon$$

pour toutes les partitions $\mathscr{D}$ avec $|\mathscr{D}| < \delta$ et pour tous les n nombres satisfaisants (2), le nombre A est appelé intégrale $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$.

Si f est bornée et $g(t) = t$, il s'agit de l'intégrale de Riemann. Si f est bornée et g possède la derivée continue, on peut convertir cette intégrale en une intégrale de Riemann.

Pour les intégrales de Riemann-Stieltjes on prouve le théorème sur l'intégration per partes, analogue au théorème correspondant sur les intégrales de Riemann:

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g + \int_a^b g\,\mathrm{d}f = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)\,;$$

s'il existe une des deux intégrales, la seconde existe aussi. Mais la généralisation du théorème sur la substitution n'est pas étudiée en règle générale. On étudie au plus les cas où l'intégrale de Riemann-Stieltjes peut être transformée en une intégrale de Riemann. C'est pourquoi nous allons étudier cette généralisation dans le travail présent.

Nous allons partir du

Théorème 1. *Soient f, g des fonctions continues sur $\langle a, b\rangle$, g avec la variation bornée sur $\langle a, b\rangle$, soit φ une fonction définie sur (c, d) et y ayant la dérivée bornée et soit $g(t) \in (c, d)$ pour tout $t \in \langle a, b\rangle$. Alors*[1]

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}(\varphi \circ g) = \int_a^b f(\varphi' \circ g)\,\mathrm{d}g\,, \tag{4}$$

s'il exists l'intégrale à droite.

Le théorème 1 est une conséquence facile du théorème suivant que nous allons prouver au lieu du théorème 1:

Théorème 2. *Soient f, g des fonctions continues sur $\langle a, b\rangle$, g avec la variation bornée sur $\langle a, b\rangle$, soit φ une fonction définie sur $\langle c, d\rangle$ et ayant la dérivée bornée sur (c, d) et soit $g(t) \in \langle c, d\rangle$ pour tout $t \in \langle a, b\rangle$. Une fonction ψ soit définie sur $\langle c, d\rangle$ et soit $\psi(x) = \varphi'(x)$ pour $x \in (c, d)$. Alors*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}(\varphi \circ g) = \int_a^b f(\psi \circ g)\,\mathrm{d}g\,, \tag{5}$$

s'il existe l'intégrale à droite.

Démonstration. Désignons $A = \int_a^b f(\psi \circ g)\,\mathrm{d}g$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un $\delta_1 > 0$ tel que

$$\left|A - \mathrm{S}(f(\psi \circ g), g; \mathscr{D}, T)\right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{si} \quad |\mathscr{D}| < \delta_1\,. \tag{6}$$

La fonction φ' est bornée sur (c, d), alors ψ est bornée sur $\langle c, d\rangle$, $|\psi(x)| \leqq M$ pour tout $x \in \langle c, d\rangle$. Soit V la variation de la fonction g sur $\langle a, b\rangle$ et posons $N = \max(1, MV)$. La fonction f étant continue sur $\langle a, b\rangle$, il existe un $\delta_2 > 0$ tel que

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon/2N \quad \text{si} \quad u \in \langle a, b\rangle\,, \quad v \in \langle a, b\rangle\,, \quad |u - v| < \delta_2\,. \tag{7}$$

Soit $\mathscr{D}$ la partition de l'intervalle $\langle a, b\rangle$ définie par (1) et soit T une suite de n

[1]) Nous désignons par $\varphi \circ g$ la fonction défine par

$$(\varphi \circ g)(t) = \varphi(g(t))\,.$$

nombres satisfaisant (2). Si $|\mathscr{D}| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, nous obtenons

$$\text{(8)} \qquad |S(f, \varphi \circ g; \mathscr{D}, T) - A| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\left(\varphi(g(t_i)) - \varphi(g(t_{i-1}))\right) - A\right| .$$

Pour chaque $i = 1, \ldots, n$ il existe un η_i entre $g(t_{i-1})$ et $g(t_i)$ tel que

$$\text{(9)} \qquad \varphi(g(t_i)) - \varphi(g(t_{i-1})) = \psi(\eta_i)\left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right).$$

Pour $g(t_i) \neq g(t_{i-1})$ cela découle du théorème des accroissements finis et de la relation $\psi(x) = \varphi'(x)$ pour $x \in (c, d)$. Si $g(t_i) = g(t_{i-1})$, alors les deux côtés de (9) sont zéro. La fonction g étant continue, il existe des nombres ξ_i tels que

$$\text{(10)} \qquad \eta_i = g(\xi_i), \quad a_{i-1} \leqq \xi_i \leqq a_i .$$

Étant $|\mathscr{D}| < \delta$, on a $t_i - t_{i-1} < \delta$, alors aussi $|\tau_i - \xi_i| < \delta \leqq \delta_2$, alors d'après (7) on a

$$\text{(11)} \qquad |f(\tau_i) - f(\xi_i)| < \varepsilon/2N, \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Désignons $\Xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Selon (8), (9), (10), (11) et (6) on obtient

$$\begin{aligned}
|S(f, \varphi \circ g; \mathscr{D}, T) - A| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\,\psi(\eta_i)\left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) - A\right| \leqq \\
&\leqq \left|\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\,\psi(g(\xi_i))\left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) - \right. \\
&\left. - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\psi(g(\xi_i))\left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right)\right| + \\
&+ \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\psi(g(\xi_i))\left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) - A\right| \leqq \\
&\leqq \sum_{i=1}^{n} |f(\tau_i) - f(\xi_i)| \cdot |\psi(g(\xi_i))| \cdot |g(t_i) - g(t_{i-1})| + \\
&+ |S(f(\psi \circ g), g; \mathscr{D}, \Xi) - A| < \frac{\varepsilon}{2N} \cdot M \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| + \\
&+ \varepsilon/2 \leqq \varepsilon\, MV/2N + \varepsilon/2 \leqq \varepsilon ,
\end{aligned}$$

ce qui signifie

$$A = \int_a^b f \,\mathrm{d}(\varphi \circ g) .$$

Remarque 1. On prouve aisément que l'intégrale à côté gauche de (4) toujours existe si les fonctions f, g, φ satisfont les conditions du théorème 1 (parce que φ satisfait ensuite la condition de Lipschitz et cela entraîne que $\varphi \circ g$ jouit de la variation bornée sur $\langle a, b\rangle$). Mais il est possible que, ces conditions étant remplies, l'intégrale à côté droite de (4) n'existe pas; cela est montré par

Exemple 1. Soit $f \equiv 1$, $g(t) = t$ et soit φ une fonction avec la dérivée bornée φ' sur $\langle a, b\rangle$ telle que φ' n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $\langle a, b\rangle$ (une telle fonction existe, voir [2], chap. V, § 5, page 146). Alors

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}(\varphi \circ g) = \varphi(b) - \varphi(a)\,,$$

mais

$$\int_a^b f(\varphi' \circ g)\,\mathrm{d}g = \int_a^b \varphi'$$

n'existe pas; les conditions du théorème 1 pour f, φ, g sont remplies.

Si nous supposons l'existence des deux intégrales dans (4), les suppositions du théorème 1 peuvent être beaucoup affaiblies. Cependent, on a

Théorème 3. *Ayons des fonctions* f, g *définies sur* $\langle a, b\rangle$, g *continue sur* $\langle a, b\rangle$, *soit* φ *une fonction dérivable sur* (c, d) *et soit* $g(t) \in (c, d)$ *pour chaque* $t \in \langle a,b\rangle$. *Alors* (4) *a lieu, si les deux intégrales existent.*

Démonstration. Parce que les deux intégrales dans (4) existent il suffit de construire une suite de partitions

$$\mathscr{D}_k\colon\ a = t_{k,0} < t_{k,1} < \ldots < t_{k,n_k} = b \tag{12}$$

telle que $\lim\limits_{k\to\infty} |\mathscr{D}_k| = 0$ et une suite T_k de systèmes finis de nombres réels pour lesquels on a

$$T_k = \{\tau_{k,1}, \ldots, \tau_{k,n_k}\}\,,\quad \tau_{k,i} \in \langle t_{k,i-1}, t_{k,i}\rangle\,, \tag{13}$$

$$\mathrm{S}(f, \varphi \circ g; \mathscr{D}_k, T_k) = \mathrm{S}(f(\varphi' \circ g), g; \mathscr{D}_k, T_k)\,. \tag{14}$$

Soit $\mathscr{D}_k$ une partition arbitraire (12) de l'intervalle $\langle a, b\rangle$ telle que $|\mathscr{D}_k| \leqq 1/k$. Il existe des nombres $\eta_{k,i}$ entre $g(t_{k,i-1})$, $g(t_{k,i})$ tels que

$$\varphi(g(t_{k,i})) - \varphi(g(t_{k,i-1})) = \varphi'(\eta_{k,i})\,(g(t_{k,i}) - g(t_{k,i-1}))\,.$$

La fonction g étant continue, il existe des nombres $\tau_{k,i}$, $a_{k,i-1} \leqq \tau_{k,i} \leqq a_{k,i}$, tels que $\eta_{k,i} = g(\tau_{k,i})$. Définissons T_k par (13) avec $\tau_{k,i}$ ainsi définis. Nous obtenons

$$\mathrm{S}(f(\varphi' \circ g), g; \mathscr{D}_k, T_k) = \sum_{i=1}^{n_k} f(\tau_{k,i})\,\varphi'(g(\tau_{k,i}))\,(g(t_{k,i}) - g(t_{k,i-1}))\,,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(f, \varphi\circ g; \mathscr{D}_k, T_k) &= \sum_{i=1}^{n_k} f(\tau_{k,i})\,(\varphi(g(t_{k,i})) - \varphi(g(t_{k,i-1}))) = \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} f(\tau_{k,i})\,\varphi'(\eta_{k,i})\,(g(t_{k,i}) - g(t_{k,i-1})) = \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} f(\tau_{k,i})\,\varphi'(g(\tau_{k,i}))\,(g(t_{k,i}) - g(t_{k,i-1}))\,,\end{aligned}$$

alors (14) a lieu.

L'hypothèse de la continuité de g dans le théorème 3 ne peut pas être omise, même si nous supposions que f est continue et que φ possède la dérivée continue. Cela certifie

Exemple 2. Soit $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 3$, $f \equiv 1$, $\varphi(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$, $g(t) = 2$ pour $t > 0$, $g(0) = 0$. Si nous désignons $\Phi(t) = \varphi(g(t))$, nous avons $\Phi(t) = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ pour $t > 0$, $\Phi(0) = 0$, $\varphi'(x) = 2x - x^2$, $\varphi'(g(t)) = 0$ pour $t \geqq 0$, alors

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}(\varphi \circ g) = \int_0^1 \mathrm{d}\Phi = \tfrac{4}{3},$$

$$\int_a^b f(\varphi' \circ g) \,\mathrm{d}g = \int_0^1 0 \,\mathrm{d}g = 0.$$

Si γ est un nombre réel et si nous posons $\varphi(x) = x^\gamma$, nous obtenons ce cas spécial du théorème 3 (le cas $\gamma = 0$ qui ne découle pas du théorème 3, est trivial):

Théorème 4. *Soient f, g des fonctions définies sur $\langle a, b\rangle$, g continue sur $\langle a, b\rangle$. Soit γ un nombre réel. Dans le cas $\gamma < 1$ soit $g(t) > 0$ pour tout $t \in \langle a, b\rangle$. Alors*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}(g^\gamma) = \gamma \int_a^b f g^{\gamma - 1} \,\mathrm{d}g, \tag{15}$$

si les deux intégrales existent.

Remarque 2. Les deux intégrales dans (15) existent toujours si f et g sont continues et g a la variation bornée dans $\langle a, b\rangle$.

Littérature

[1] *V. Jarník:* Integrální počet II. Nakladatelství ČSAV, Praha 1955.

[2] *И. П. Натансон:* Теория функций вещественной переменной. Госуд. изд. технико-теоретической литературы, Москва 1957.

[3] *R. Sikorski:* Funkcje rzeczywiste. Państwowe wydawnictwo naukowe. Warszawa 1958.

[4] *H. E. Bray:* Elementary properties of the Stieltjes integral. Annals of Mathematics, Second Series, vol. *20* (1918—1919), 177—186.

Souhrn

SUBSTITUCE V RIEMANN-STIELTJESOVÝCH INTEGRÁLECH

MILOSLAV JŮZA

V článku je odvozeno několik vět o substituci v Riemann-Stieltjesových integrálech. Tyto věty jsou zpravidla dokazovány jen pro případ, že se Riemann-Stieltjesův integrál dá převést na Riemannův, zde však jsou dokázány obecně.

Резюме

ПОДСТАНОВКА В ИНТЕГРАЛАХ РИМАНА-СТИЛТЬЕСА

MILOSLAV JŮZA

В статье доказывается несколько теорем о подстановках в интегралах Римана-Стилтьеса. Эти теоремы обычно доказываются только для случая, когда интеграл Римана-Стилтьеса можно перевести на интеграл Римана, но здесь они доказываются для общего случая.

L'adresse de l'auteur: Sasanková 2655, 106 00 Praha 10 - Záběhlice.