Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

KOSÍNUSOVÁ VETA O SIMPLEXOCH V E_n

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 7. mája 1968)

Autor venuje túto prácu pamiatke svojej sestry VILMY TŮMOVEJ *rod.* BARTOŠOVEJ (1903—1940)

V práci [1] sú zovšeobecnené veta Pytagorova a vety Euklidove v pravouhlých trojuholníkoch, v práci [2] veta sínusová rovinnej trigonometrie pre simplexy v E_n, $n \geqq 2$. V tomto článku zovšeobecníme kosínusovú vetu[1]) rovinnej trigonometrie pre simplexy n-rozmerného euklidovského priestoru, $n \geqq 2$.

Majme simplex v E_n určený polpriestormi

$$(1) \qquad \boldsymbol{a}^{(i)}\boldsymbol{x} + b_i \geqq 0\,, \quad |\boldsymbol{a}^{(i)}| = 1\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n + 1$$

kde každá n-tica vektorov $\boldsymbol{a}^{(i)}$ sú lineárne nezávislé vektory. Dôležitú úlohu hrá determinant

$$(2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & \ldots, & a_n^{(1)}, & b_1 \\ a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}, & \ldots, & a_n^{(2)}, & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(n+1)}, & a_2^{(n+1)}, & \ldots, & a_n^{(n+1)}, & b_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Ak označíme B_i algebraický doplnok prvku b_i v tomto determinante, potom $\operatorname{sign} B_i = \operatorname{sign} \Delta$, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$[2]) a pre veľkosť obsahu steny V_i simplexu, ležiacej v rovine $\boldsymbol{a}^{(i)}\boldsymbol{x} + b_i = 0$ platí podľa vzťahu (13) v práci [4][3])

$$(3) \qquad V_i = \frac{1}{(n-1)!} \left| \frac{B_i \Delta^{n-1}}{B_1 B_2, \ldots, B_{n+1}} \right|, \quad i = 1, 2, \ldots, n + 1\,.$$

[1]) Zvanú tiež Carnotovou.

[2]) Pozri vzťah (6) v práci [3].

[3]) Na citovanou mieste z chyby tlače chýba exponent $n - 1$ základu Δ.

Lemma. *V simplexe, ktorý je prienikom polpriestorov* (1) *platí*

$$B_{n+1}^2 = B_1^2 + B_2^2 + \ldots + B_n^2 + 2 \sum_{\substack{i,k=1 \\ i<k}}^{n} |B_i|\,|B_k| \cos \varphi_{i,k} \tag{4}$$

kde $\varphi_{i,k}$ *je uhol stien* V_i *a* V_k. *Je to uhol vonkajších normál* $-\boldsymbol{a}_i$, $-\boldsymbol{a}_k$ *týchto stien.*

Obdobne platia aj vzťahy, ktoré zo (4) *plynú cyklickou zámenou indexov* $1, 2, \ldots, n+1$.

Dôkaz. V determinante (2) je

$$B_i = (-1)^{i+n-1} \begin{vmatrix} a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & \ldots, & a_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(i-1)}, & a_2^{(i-1)}, & \ldots, & a_n^{(i-1)} \\ a_1^{(i+1)}, & a_2^{(i+1)}, & \ldots, & a_n^{(i+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(n+1)}, & a_2^{(n+1)}, & \ldots, & a_n^{(n+1)} \end{vmatrix};$$

$$B_k = (-1)^{k+n-1} \begin{vmatrix} a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & \ldots, & a_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(k-1)}, & a_2^{(k-1)}, & \ldots, & a_n^{(k-1)} \\ a_1^{(k+1)}, & a_2^{(k+1)}, & \ldots, & a_n^{(k+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(n+1)}, & a_2^{(n+1)}, & \ldots, & a_n^{(n+1)} \end{vmatrix}.$$

Podľa multiplikačného teorému je potom

$$C_{ik} = B_i B_k = (-1)^{i+k} \,.$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^{(1)}\boldsymbol{a}^{(1)}, & \boldsymbol{a}^{(1)}\boldsymbol{a}^{(2)}, & \ldots, & \boldsymbol{a}^{(1)}\boldsymbol{a}^{(k-1)}, & \boldsymbol{a}^{(1)}\boldsymbol{a}^{(k+1)}, & \ldots, & \boldsymbol{a}^{(1)}\boldsymbol{a}^{(n+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{a}^{(i-1)}\boldsymbol{a}^{(1)}, & \boldsymbol{a}^{(i-1)}\boldsymbol{a}^{(2)}, & \ldots, & \boldsymbol{a}^{(i-1)}\boldsymbol{a}^{(k-1)}, & \boldsymbol{a}^{(i-1)}\boldsymbol{a}^{(k+1)}, & \ldots, & \boldsymbol{a}^{(i-1)}\boldsymbol{a}^{(n+1)} \\ \boldsymbol{a}^{(i+1)}\boldsymbol{a}^{(1)}, & \boldsymbol{a}^{(i+1)}\boldsymbol{a}^{(2)}, & \ldots, & \boldsymbol{a}^{(i+1)}\boldsymbol{a}^{(k-1)}, & \boldsymbol{a}^{(i+1)}\boldsymbol{a}^{(k+1)}, & \ldots, & \boldsymbol{a}^{(i+1)}\boldsymbol{a}^{(n+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{a}^{(n+1)}\boldsymbol{a}^{(1)}, & \boldsymbol{a}^{(n+1)}\boldsymbol{a}^{(2)}, & \ldots, & \boldsymbol{a}^{(n+1)}\boldsymbol{a}^{(k-1)}, & \boldsymbol{a}^{(n+1)}\boldsymbol{a}^{(k+1)}, & \ldots, & \boldsymbol{a}^{(n+1)}\boldsymbol{a}^{(n+1)} \end{vmatrix}$$

a teda pre každé $i = 1, 2, \ldots, n+1$ platí

$$\sum_{k=1}^{n+1} B_i B_k \boldsymbol{a}^{(i)}\boldsymbol{a}^{(k)} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^{(1)}\boldsymbol{a}^{(1)}, & \ldots, & \boldsymbol{a}^{(1)}\boldsymbol{a}^{(n+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{a}^{(n+1)}\boldsymbol{a}^{(1)}, & \ldots, & \boldsymbol{a}^{(n+1)}\boldsymbol{a}^{(n+1)} \end{vmatrix} = G(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n+1}) \,. \tag{5}$$

Keďže vektory $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^{(n+1)}$ sú v E_n lineárne závislé, je Gramme-ov determinant (5) rovný nule.[4]) Rozviňme G podľa prvkov prvého, druhého atď. až $(n+1)$-ho riadku a výsledky sčítajme. Tak dostaneme

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad 0 = (n+1)\, G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = \\
= \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{a}^{(1)}B_1^2 \quad &+ \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{a}^{(2)}B_1B_2 \quad + \ldots + \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{a}^{(n+1)}B_1B_{n+1} + \\
+ \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{a}^{(1)}B_2B_1 \quad &+ \mathbf{a}_2^{(2)}\mathbf{a}_2^{(2)}B_2^2 \quad + \ldots + \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{a}^{(n+1)}B_2B_{n+1} + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
+ \mathbf{a}^{(n+1)}\mathbf{a}^{(1)}B_{n+1}B_1 &+ \mathbf{a}^{(n+1)}\mathbf{a}^{(2)}B_{n+1}B_2 + \ldots + \mathbf{a}^{(n+1)}\mathbf{a}^{(n+1)}B_{n+1}^2 \,.
\end{aligned}
$$

Hodnota každého riadku a každého stĺpca je tu G. Súčet členov v poslednom riadku a stĺpci je teda $2G - B_{n+1}^2 = -B_{n+1}^2$, lebo $G = 0$, $|\mathbf{a}^{(n+1)}| = 1$. Máme teda zo (6)

$$0 = B_1^2 + B_2^2 + \ldots + B_n^2 - B_{n+1}^2 + 2 \sum_{\substack{i,k=1 \\ i<k}}^{n} B_i B_k \mathbf{a}^{(i)}\mathbf{a}^{(k)}$$

a keďže $\operatorname{sign} B_i = \operatorname{sign} B_k$ a $\mathbf{a}^{(i)}\mathbf{a}^{(k)} = \cos \varphi_{i,k}$ vyplýva odtiaľ dokazovaný vzťah (4).

Vzťahy, ktoré vzniknú cyklickou zámenou indexov $1, 2, \ldots, n+1$ v (4) dostaneme, keď v (6) zvlášť sčítame členy v i-tom riadku a i-tom stĺpci, $i = 1, 2, \ldots, n$.

KOSÍNUSOVÁ VETA PRE SIMPLEXY

V simplexe, ktorý je prienikom polpriestorov (1) platí tzv. kosínusová veta

$$(7) \qquad V_{n+1}^2 = V_1^2 + V_2^2 + \ldots + V_n^2 + 2 \sum_{\substack{i,k=1 \\ i<k}}^{n} V_i V_k \cos \varphi_{i,k}$$

a obdobné vzťahy, ktoré vzniknú zo (7) cyklickou zámenou indexov $1, 2, \ldots, n+1$. Pritom V_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ sú $(n-1)$ dimenzionálne obsahy stien simplexu a $\varphi_{i,k}$ je uhol vonkajších normál stien V_i a V_k.

Dôkaz. Násobme (4) na oboch stranách výrazom

$$\left(\frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{\Delta^{n-1}}{B_1 B_2 \ldots B_{n+1}}\right)^2$$

a dostaneme dokazovaný vzťah (7) podľa vzorcov (3). Obdobne dostaneme vzťahy, ktoré plynú zo (7) cyklickou zámenou indexov.

Poznámka 1. Uhly $\varphi_{i,k}$ sú v E_2 výplnkovými uhlami vnútorných uhlov trojuholníka.

---

[4]) Pozri napr. [5] str. 203.

Poznámka 2. V pravouhlom symplexe, v ktorom vnútorný n-hranný uhol γ_{n+1} je pravý, sú všetky uhly $\varphi_{i,k}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, $i < k$, pravé a kosínusová veta (7) prejde v Pytagorovu (pozri prácu [1]).

Poznámka 3. Keďže $|B_i| = \sin \gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, kde γ_i sú vnútorné n-hranné uhly simplexu (pozri [2]), možno vzťahu (4) dať formu

$$\sin^2 \gamma_{n+1} = \sin^2 \gamma_1 + \sin^2 \gamma_2 + \ldots + \sin^2 \gamma_n + 2 \sum_{\substack{i,k=1 \\ i<k}}^{n} \sin \gamma_i \sin \gamma_k \cos \varphi_{i,k} .$$

Poznámka 4. Ak determinant (5) vyčíslime podľa prvkov i-tého riadku (alebo stĺpca), dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n+1} B_i B_k \boldsymbol{a}^{(i)} \boldsymbol{a}^{(k)} = 0 , \quad i = 1, 2, \ldots, n + 1 .$$

Obe strany tejto rovnosti násobiac výrazom

$$\left| \frac{1}{(n-1)!\, B_i} \cdot \frac{\Delta^{n-1}}{B_1 B_2 \ldots B_{n+1}} \right|$$

dostaneme podľa vzorcov (3)

$$\text{(8)} \qquad V_i + V_1 \cos \varphi_{1,i} + V_2 \cos \varphi_{2,i} + \ldots + V_{i-1} \cos \varphi_{i-1,i} + \\ + V_{i+1} \cos \varphi_{i+1,i} + \ldots + V_{n+1} \cos \varphi_{n+1,i} = 0$$

pre $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, čo je zovšeobecnenie vety o priemete rovinnej trigonometrie.

Poznámka 5. Ak v (6) zvlášť sčítame členy v prvých l riadkoch a prvých l stĺpcoch a zvlášť členy ostatné, dostaneme obdobne ako v dôkaze lemmy

$$- \left(B_1^2 + B_2^2 + \ldots + B_l^2 + 2 \sum_{i,k=1}^{l} B_i B_k \cos \varphi_{i,k}\right) + B_{l+1}^2 + B_{l+2}^2 + \ldots + B_{n+1}^2 + \\ + 2 \sum_{\substack{i,k=l+1 \\ i<k}}^{n+1} B_i B_k \cos \varphi_{i,k} = 0 ,$$

čo platí pre $l = 0, 1, 2, \ldots, n + 1$. Násobením tejto rovnosti výrazom

$$\left(\frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{\Delta^{n-1}}{B_1 B_2 \ldots B_{n+1}} \right)^2$$

dostaneme

$$V_1^2 + V_2^2 + \ldots + V_l^2 + 2 \sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{l} V_i V_k \cos \varphi_{i,k} = \tag{9}$$

$$= V_{l+1}^2 + V_{l+2}^2 \ldots + V_{n+1}^2 + 2 \sum_{\substack{i,k=l+1\\ i<k}}^{n+1} V_i V_k \cos \varphi_{i,k}$$

čo platí pre $l = 0, 1, 2, \ldots, n + 1$. Pri $l = 0$ ($l = n + 1$) je ľavá (pravá) strana (9) rovná nule.

Vzťah (9) možno dokázať aj obdobne ako kosínusovú vetu v E_2 z vety o priemete násobením (8) číslom V_i a utvorením výrazu $\sum_{i=1}^{l} V_i^2 - \sum_{i=l+1}^{n+1} V_i^2$, po úprave dostaneme (9).

Vzťah (9) je zovšeobecnením kosínovej vety (7), ktorá je v ňom obsažená pre $l = n$.

Kedže hodnota determinantu (5) sa transpozíciami riadkov a stĺpcov nemení (majúc hodnotu nulovú), platí (9) aj pre ľubovoľnú permutáciu množiny indexov.

Literatúra

[1] *Bartoš P.:* Euklidove vety v pravouhlých simplexoch, Časopis pro pěstování matematiky *93* (1968), str. 256—259.

[2] *Bartoš P.:* Sínusová veta o simplexoch v E_n. Tamže, *93* (1968), str. 273—277.

[3] *Bartoš P.:* Poznámka o určení simplexu rovinami a o parametrickom vyjadrení súradníc jeho bodov. Tamže, *90* (1965), str. 366—368.

[4] *Bartoš P.:* O jednej metóde určenia polomeru gule vpísanej a guli pripísaných simplexu v E_n a niektoré aplikácie. Tamže, *92* (1967), str. 8—15.

[5] *Гантмахер Ф. Р.:* Теория матриц, Гос. изд. тех. теор. лит. Москва, 1953.

Adresa autora: Bratislava, Sibírska 9.

Zusammenfassung

KOSINUSSÄTZE ÜBER SIMPLEXE IN E_n

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

In der Arbeit werden für Simplexe in E_n, $n \geqq 2$ ein zyklische Indexpermutationen zulassender Kosinussatz (7), ein Projektionssatz (8) und ein, beliebige Indexpermutationen zulassender, verallgemeinerter Kosinussatz (9) hergeleitet. Dabei sind V_i, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$ $(n - 1)$-dimensionale Flächeninhalte der Seiten des Simplexes und φ_{ik} ist der Winkel der äusseren Normalen der Seiten V_i und V_k.