František Tumajer

Omezenost abstraktních procesů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 2, 196--211

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108353`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

OMEZENOST ABSTRAKTNÍCH PROCESŮ

FRANTIŠEK TUMAJER, Liberec

(Došlo dne 27. ledna 1969)

ÚVOD

V práci [2] studuje J. NAGY pomocí zobecněných ljapunovských funkcí různé typy stability množin vzhledem k abstraktním regulovaným procesům. V předložené práci se používá stejných metod ljapunovské teorie ke studiu vlastností omezenosti abstraktních procesů vzhledem k množinám. Pojem abstraktního procesu zavedl O. HÁJEK v práci [1]. Motivaci Hájkovy definice abstraktního procesu lze ukázat na následující úvaze.

Předpokládejme, že je dán fyzikální zákon, určující všechna možná chování dané množiny F individuálních fyzikálních systémů. Přitom chování daného individuálního systému je popsáno jeho stavovými souřadnicemi v různých časových okamžicích. Skutečnost, že nějaký individuální fyzikální systém z množiny F může mít v čase α stavovou souřadnici x a v čase $\beta \geqq \alpha$ stavovou souřadnici y, zapisujeme pomocí relace mezi dvojicemi (x, α) a (y, β). Ukazuje se, že je přirozené a užitečné požadovat, aby tato relace splňovala následující podmínky:

(i) V každém okamžiku každý individuální systém z F může mít nejvýše jednu stavovou souřadnici (tj. může být v nejvýše jednom stavu);

(ii) jestliže nějaký systém z F může mít v okamžiku α stavovou souřadnici x, v okamžiku $\beta \geqq \alpha$ stavovou souřadnici y a jestliže nějaký (případně jiný) systém z F může mít v čase β stavovou souřadnici y a v čase $\gamma \geqq \beta$ stavovou souřadnici z, pak musí v F existovat systém mající v čase α stavovou souřadnici x a v čase γ stavovou souřadnici z. Obráceně, jestliže nějaký systém z F má v čase α stavovou souřadnici x a v čase $\gamma \geqq \alpha$ stavovou souřadnici z, pak v každém čase $\beta \in \langle\alpha, \gamma\rangle$ musí mít tento systém nějakou stavovou souřadnici.

Tato právě popsaná relace mezi dvojicemi (x, α) a (y, β) tvoří základ definice abstraktního procesu, kterou uvádíme v první části této práce. V druhé části studujeme omezenost abstraktního procesu vzhledem k množině. V třetí části se pak studuje omezenost tzv. spojitého toku vzhledem k množině.

1. ABSTRAKTNÍ PROCESY

1.1 Celá práce je věnována studiu vlastností jistých relací mezi množinami. Připomeneme si proto nejdříve několik pojmů souvisících s pojmem relace a zavedeme označení, které budeme v dalším používat.

Relací r mezi množinami X a Y (v uvedeném pořadí) rozumíme podmnožinu kartézského součinu $Y \times X$. Je-li dvojice $(y, x) \in Y \times X$ v relaci r, budeme psát yrx místo $(y, x) \in r$. Je-li r relace mezi množinami X a Y, pak *inversní relací* k relaci r rozumíme relaci r^{-1} mezi Y a X takovou, že $xr^{-1}y$ právě když yrx. Je-li r relací mezi X a X, říkáme také, že r je relací na X. Identickou relací na X rozumíme relaci 1_X takovou, že $y\, 1_X x$ právě když $y = x$. Je-li r relace mezi X a Y, s relace mezi Y a Z, pak $s \circ r$ značí relaci mezi X a Z takovou, že $zs \circ rx$ právě když existuje $y \in Y$ takové, že zsy a yrx. Relace r mezi X a Y se nazývá parciálním zobrazením X do Y (a zapisuje se $r : X \to Y$) právě když platí $r \circ r^{-1} \subset 1_Y$. Pro danou relaci r mezi X a Y bude domain r značit množinu těch $x \in X$, k nimž existuje alespoň jedno $y \in Y$ takové, že yrx. Parciální zobrazení $r : X \to Y$ budeme nazývat zobrazením právě když domain $r = X$.

Dále budeme studovat některé vlastnosti relace p na $P \times R$, kde P je abstraktní množina a R je neprázdná podmnožina množiny R^1 všech reálných čísel, uspořádaná přirozeným uspořádáním $\leqq$. O relaci p předpokládáme, že splňuje následující podmínku

$$(y, \beta)\, p(x, \alpha) \Rightarrow \beta \geqq \alpha \quad \text{v} \quad R\,. \tag{1}$$

Zřejmě relace p definuje jednoznačně systém relací na P

$$\{{}_\beta p_\alpha : \beta \geqq \alpha \text{ v } R\}$$

předpisem

$$y\, {}_\beta p_\alpha x \Leftrightarrow (y, \beta)\, p(x, \alpha)\,, \tag{2}$$

a také obráceně každý takový systém relací ${}_\beta p_\alpha$ s $\beta \geqq \alpha$ v R definuje pomocí vztahu (2) jednoznačně relaci p na $P \times R$. V dalším budeme používat oba tyto zápisy relace p podle toho, který bude v dané situaci vhodnější.

Nakonec ještě zavedeme další označení. Je-li p relace na $P \times R$, pak

$$E = \text{domain } p\,;$$
$$D = \{(\vartheta, x, \alpha) \in R \times P \times R : (y, \vartheta)\, p(x, \alpha) \text{ pro nějaké } y \in P\}\,;$$
$${}_\vartheta p_\alpha x = \{y \in P : y\, {}_\vartheta p_\alpha x\}\,.$$

V následujících úvahách bude hrát důležitou roli zobrazení

$$\varepsilon : E \to (-\infty, +\infty\rangle : \varepsilon(x, \alpha) = \sup\{\beta \in R : (\beta, x, \alpha) \in D\}\,.$$

Pomocí právě zavedených pojmů a označení vyslovíme následující definici.

1.2 Definice. Říkáme, že p je *proces na P nad R* právě když P je množina, $R \subset R^1$, p je relace na $P \times R$ vyhovující podmínce 1.1(1) a mající následující dvě vlastnosti

(i) ${}_\alpha p_\alpha \subset 1_P$,

(ii) ${}_\gamma p_\beta \circ {}_\beta p_\alpha = {}_\gamma p_\alpha$ pro všechna $\gamma \geqq \beta \geqq \alpha$ v R.

Říkáme, že proces p je *lokální* resp. *globální* právě když pro každé $(x, \alpha) \in E$ platí $\varepsilon(x, \alpha) > \alpha$, resp. $\varepsilon(x, \alpha) = +\infty$.

Jako základní interpretaci definice 1.2 uvedeme následující příklad.

1.3. Příklad. Nechť je dána soustava diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\vartheta} = f(x, \vartheta) \tag{1}$$

v n-rozměrném eukleidovském prostoru R^n, kde $f : E \to R^n$ je spojité zobrazení otevřené podmnožiny E prostoru R^{n+1}. Řešení rovnice (1) jsou parciální zobrazení $s : R^1 \to R^n$ taková, že domain s je interval v R^1, buď degenerovaný nebo takový, že platí

$$\frac{\mathrm{d}s(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} = f(s(\vartheta), \vartheta) \quad \text{pro všechna} \quad \vartheta \in \text{domain } s\,.$$

K diferenciální rovnici (1) můžeme přiřadit proces p v R^n tímto způsobem: definujeme $y\,{}_\beta p_\alpha x$ právě když $x, y \in R^n$, $\alpha \leqq \beta$ v R^1 a existuje řešení rovnice (1) nabývající hodnotu x v bodě α a y v β.

1.4 Definice. Nechť p je proces na P nad R. Říkáme, že s je *řešením* procesu p právě když

(i) $s : R \to P$,

(ii) domain s je interval v R,

(iii) $(s(\vartheta), \vartheta)\; p(s(\alpha), \alpha)$ platí pro všechna $\vartheta \geqq \alpha$ v domain s.

1.5 Definice. Nechť p je proces na P nad R. Říkáme, že p je *úplný vzhledem k řešením* právě když ke každé dvojici $(x, \alpha), (y, \beta) \in E$, $(y, \beta)\; p(x, \alpha)$ existuje řešení s takové, že $s(\alpha) = x$, $s(\beta) = y$.

1.6 Poznámka. Je-li s řešením procesu p, $\alpha \in$ domain s, pak říkáme, že s prochází bodem (x, α), nebo také, že s prochází bodem x v α, právě když $s(\alpha) = x$.

1.7 Definice. Nechť p je proces na P nad R. Říkáme, že p *připouští periodu* $\tau \in R^1$ právě když pro všechna $\beta \geqq \alpha$ v R platí

$${}_{\beta-\tau}p_{\alpha-\tau} = {}_\beta p_\alpha = {}_{\beta+\tau}p_{\alpha+\tau}\,.$$

1.8 Definice. Nechť p je proces na P nad R. Říkáme, že p má *jednoznačnost* právě když každá relace ${}_\beta p_\alpha$ je parciálním zobrazením $P \to P$. Proces p na P nad R nazýváme *lokálním tokem* (*globálním tokem*) právě když p je lokálním (globálním) procesem s jednoznačností.

1.9 Poznámka. V dalších částech této práce budeme používat jistých zobecnění metod ljapunovské teorie z diferenciálních rovnic ke studiu omezenosti abstraktních procesů. Je vidět, že každý proces p na P nad R definuje na odpovídajícím E částečné uspořádání předpisem

$$(y, \beta) \succ (x, \alpha) \Leftrightarrow (y, \beta)\, p(x, \alpha)\,.$$

Je tedy přirozené vyslovit následující definici.

1.10 Definice. Nechť p je proces na P nad R. Parciální zobrazení

$$V : E \to R^1$$

nazýváme *ljapunovskou funkcí* procesu p právě když je V nezáporné a nerostoucí podél p, tj. právě když ze vztahů

$$(y, \beta), (x, \alpha) \in \text{domain } V,\ (y, \beta)\, p(x, \alpha) \Rightarrow 0 \leqq V(y, \beta) \leqq V(x, \alpha)\,.$$

2. OMEZENOST PROCESU p VZHLEDEM K MNOŽINĚ m

2.1 Označení. V dalším textu budou symboly R^0, R^+, J značit po řadě následující množiny: $\langle 0, +\infty)$, $(0, +\infty)$, $\langle 1, +\infty)$. V celé další části práce předpokládáme, že je dán proces p na P nad R, neprázdná množina

(1) $$m \subset P \times R$$

a zobrazení

(2) $$g : P \times R \to R^0$$

tak, že platí

(3) $$g(x, \alpha) = 0 \Leftrightarrow (x, \alpha) \in m\,.$$

2.2 Definice. Říkáme, že p je *omezený* vzhledem k m právě když existuje zobrazení

(1) $$\varphi : E \to J$$

takové, že platí

(2) $$(\vartheta, x, \alpha) \in D\,,\ (z, \vartheta)\, p(x, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha)\,.$$

2.3 Věta. *p je omezený vzhledem k m právě když existují zobrazení*

(1) $$V : E \to R^0,\ a : J \to J,\ a \text{ je rostoucí},\ a(v) \to +\infty \text{ pro } v \to +\infty,$$

mající následující vlastnosti:

(i) *V je ljapunovská funkce,*

(ii) $(x, \alpha) \in E,\ g(x, \alpha) \in J \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, \alpha)$.

Důkaz. Nechť p je omezený. Definujme zobrazení

(2) $$V : E \to R^0 : V(x, \alpha) = \sup \{g(z, \vartheta) : (z, \vartheta)\ p(x, \alpha)\},$$

(3) $$a : J \to J : a(v) = v.$$

Nyní dokážeme, že zobrazení (2) a (3) mají vlastnosti (i) a (ii).

Ad (i): Nechť je dáno $(x, \alpha) \in E$. Podle definice 2.2 ze vztahů $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $(z, \vartheta)\ p(x, \alpha)$ plyne $g(z, \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha)$, takže V je předpisem (2) skutečně definováno. Dále pro $(y, \beta)\ p(x, \alpha)$ a každé (z, ϑ) takové, že $(z, \vartheta)\ p(y, \beta)$ platí také $(z, \vartheta)\ p(x, \alpha)$, takže

$$V(y, \beta) = \sup \{g(z, \vartheta) : (z, \vartheta)\ p(y, \beta)\} \leqq$$
$$\leqq \sup \{g(z, \vartheta) : (z, \vartheta)\ p(x, \alpha)\} = V(x, \alpha).$$

Je tedy V ljapunovskou funkcí.

Ad (ii): Zřejmě platí

$$g(x, \alpha) \in \{g(z, \vartheta) : (z, \vartheta)\ p(x, \alpha)\}$$

a tedy $g(x, \alpha) \leqq V(x, \alpha)$.

Nechť existují zobrazení (1) mající vlastnosti (i) a (ii). Nechť je dáno $(x, \alpha) \in E$. Definujme zobrazení φ z 2.2(1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varphi(x, \alpha)) \geqq V(x, \alpha).$$

Nyní se snadno ukáže, že pro každé $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $(z, \vartheta)\ p(x, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in J$ platí

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, \vartheta) \leqq V(x, \alpha) \leqq a(\varphi(x, \alpha)),$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha)$. Je tedy p omezený vzhledem k m.

2.4 Definice. Říkáme, že p je *asymptoticky omezený* vzhledem k m právě když p je omezený vzhledem k m a existují

(1) $$\varkappa \in J$$

a zobrazení

(2) $$T : E \to R^+.$$

takové, že platí

(3) $$(\vartheta, x, \alpha) \in D\,, \quad \vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha)\,, \quad (z, \vartheta)\, p(x, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa\,.$$

2.5 Věta. *p je asymptoticky omezený vzhledem k m právě když existují zobrazení* 2.3(1) *s vlastnostmi* 2.3(i) a 2.3(ii) *a zobrazení $T_0 : E \to R^+$, $\varkappa_0 \in J$ takové. že platí*

(iii) $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $\vartheta \geqq \alpha + T_0(x, \alpha)$, $(z, \vartheta)\, p(x, \alpha) \Rightarrow V(z, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Důkaz. Nechť p je asymptoticky omezený. Pak podle věty 2.3 existují zobrazení 2.3(1) s vlastnostmi 2.3(i) a 2.3(ii). Zvolme v (iii) za $\varkappa_0 \in J$ konstantu $\varkappa$ z 2.4 a definujme zobrazení $T_0 : E \to R^+ : T_0(x, \alpha) = T(x, \alpha)$, kde T je zobrazení z 2.4. Pak podle 2.4(3) pro každé $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $(z, \vartheta)\, p(x, \alpha)$, $\vartheta \geqq \alpha + T_0(x, \alpha)$ platí $g(z, \vartheta) \leqq \leqq \varkappa_0$ a tedy vzhledem k 2.3(2) je také $V(z, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Nechť existují zobrazení 2.3(1) s vlasnostmi 2.3(i) a 2.3(ii), $\varkappa_0 \in J$ a zobrazení T_0 mající vlastnost (iii). Z vlastností 2.3(i) a 2.3(ii) vyplývá podle věty 2.3, že p je omezený vzhledem k m. Definujme konstantu $\varkappa$ z 2.4(1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0$$

a za zobrazení T z 2.4(2) zvolme zobrazení T_0 z (iii). Pak pro každé $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $\vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$, $(z, \vartheta)\, p(x, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in J$ platí

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, \vartheta) \leqq \varkappa_0 \leqq a(\varkappa)\,,$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.6 Věta. *Nechť p je globální a úplný vzhledem k řešením. Nechť existují zobrazení* 2.3(1) *s vlastnostmi* 2.3(i) *a* 2.3(ii), *zobrazení $c : J \to R^+$ zdola omezené na každém konečném podintervalu intervalu J kladnou konstantou a konstanty $\varkappa_0$, $\varkappa_1 \in J$ s následujícími vlastnostmi:*

(iii) $(x, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \varkappa_1 \Rightarrow V(x, \alpha) \leqq \varkappa_0$,

(iv) *pro každé řešení s procesu p a všechna α, $\vartheta \in$* domain s, $\alpha \leqq \vartheta$ *platí*

$$V(s(\vartheta), \vartheta) - V(s(\alpha), \alpha) \leqq -\int_\alpha^\vartheta c(g(s(v), v))\, \mathrm{d}v\,,$$

kdykoliv je $c(g(s(v), v))$ definováno pro všechna $v \in \langle \alpha, \vartheta \rangle$, $v \in R$.

Potom je p asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Z vlastností 2.3(i) a 2.3(ii) zobrazení 2.3(1) vyplývá podle věty 2.3, že p je omezený vzhledem k m. Volme $\varkappa$ z 2.4(1) tak, aby platil vztah

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0\,.$$

Nechť je dáno $(x, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \varkappa_1$ a předpokládejme, že existuje $(\beta, x, \alpha) \in D$, $(z, \beta)\, p(x, \alpha)$ takové, že platí $g(z, \beta) > \varkappa$. Pak je

$$a(\varkappa) < a(g(z, \beta)) \leqq V(z, \beta) \leqq V(x, \alpha) \leqq \varkappa_0,$$

odkud plyne $a(\varkappa) < \varkappa_0$, což je spor s volbou konstanty $\varkappa$. Nechť je nyní $(x, \alpha) \in E$, $\varkappa_1 < g(x, \alpha)$. Předpokládejme, že pro nějaké $(y, \beta)\, p(x, \alpha)$ existuje řešení s procesu p procházející body (x, α), (y, β), že pro všechna $\alpha \leqq \vartheta \in R$ platí

$$\varkappa_1 < g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha),$$

kde φ je zobrazení z definice 2.2. Položme

$$\lambda(x, \alpha) = \inf \{c(v) : \varkappa_1 \leqq v \leqq \varphi(x, \alpha)\}.$$

Pak je

$$V(s(\vartheta), \vartheta) \leqq V(s(\alpha), \alpha) - \int_\alpha^\vartheta c(g(s(v), v))\, \mathrm{d}v \leqq V(x, \alpha) - \lambda(x, \alpha)(\vartheta - \alpha).$$

Odtud plyne, že pro $\vartheta > \alpha + V(x, \alpha)/\lambda(x, \alpha)$, $\vartheta \in R$ je $V(s(\vartheta), \vartheta) < 0$, což je spor s definicí zobrazení V. Existuje tedy $\gamma \leqq \alpha + 1 + V(x, \alpha)/\lambda(x, \alpha)$ takové, že $g(s(\gamma), \gamma) \leqq \leqq \varkappa_1$, takže platí

$$(\vartheta, s(\gamma), \gamma) \in D, \quad (z, \vartheta)\, p(s(\gamma), \gamma) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa.$$

Definujeme-li zobrazení T z 2.4(2) předpisem

$$T(x, \alpha) = 1 + \frac{V(x, \alpha)}{\lambda(x, \alpha)},$$

dostáváme odtud, že pro $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $\vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$, $(z, \vartheta)\, p(x, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.7 Definice. Říkáme, že p je *stejně omezený* vzhledem k m právě když existuje zobrazení

(1) $$\zeta : R \times J \to J$$

takové, že platí

(2) $$(\vartheta, x, \alpha) \in D, \quad g(x, \alpha) \leqq \omega, \quad (z, \vartheta)\, p(x, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, \omega).$$

2.8 Věta. *p je stejně omezený vzhledem k m právě když existují zobrazení*

(1) $V : E \to R^0$, $\zeta_0 : R \times J \to J$, *$a : J \to J$, a rostoucí, $a(\omega) \to +\infty$ pro $\omega \to +\infty$,*

mající následující vlastnosti:

(i) *V je ljapunovská funkce,*

(ii) $(x, \alpha) \in E,\ g(x, \alpha) \leqq \omega \Rightarrow V(x, \alpha) \leqq \zeta_0(\alpha, \omega)$,

(iii) $(x, \alpha) \in E,\ g(x, \alpha) \in J \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, \alpha)$.

Důkaz. Nechť p je stejně omezený. Definujme zobrazení $V : E \to R^0$ vztahem 2.3(2), zobrazení

(2) $$\zeta_0 : R \times J \to J : \zeta_0(\alpha, \omega) = \zeta(\alpha, \omega)\,,$$

(3) $$a : J \to J : a(\omega) = \omega\,.$$

Nyní dokážeme, že zobrazení V, (2) a (3) mají vlastnosti (i) až (iii). Zobrazení V a (3) mají zřejmě podle 2.3 ad(i) a 2.3 ad(ii) vlastnosti (i) a (iii). Podle 2.7(2) ze vztahů $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $(z, \vartheta)\, p(x, \alpha)$, $g(x, \alpha) \in J$ plyne $g(z, \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, g(x, \alpha))$, takže $V(x, \alpha)$ je předpisem 2.3(2) skutečně definováno a má vlastnost (ii).

Nechť existují zobrazení (1) s vlastnostmi (i) až (iii). Definujme zobrazení ζ z 2.7(1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\zeta(\alpha, \omega)) \geqq \zeta_0(\alpha, \omega)\,.$$

Pak ze vztahů $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $(z, \vartheta)\, p(x, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in J$ dostáváme

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, \vartheta) \leqq V(x, \alpha) \leqq \zeta_0(\alpha, \omega) \leqq a(\zeta(\alpha, \omega))\,,$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, \omega)$. Je tedy p stejně omezený vzhledem k m.

2.9 Definice. Říkáme, že p je *stejně asymptoticky omezený* vzhledem k m **právě** když p je stejně omezený vzhledem k m a existují

(1) $$\varkappa \in J$$

a zobrazení

(2) $$T : R \times J \to R^+$$

takové, že platí

(3) $$(\vartheta, x, \alpha) \in D\,, \quad g(x, \alpha) \leqq \omega\,, \quad \vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)\,,$$
$$(z, \vartheta)\, p(x, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa\,.$$

2.10 Věta. *p je stejně asymptoticky omezený vzhledem k m právě když existují zobrazení* 2.8(1) *s vlastnostmi* 2.8(i) *až* 2.8(iii) *a zobrazení*

(1) $$T_0 : R \times J \to R^+\,, \quad \varkappa_0 \in J$$

takové, že platí

(iv) $(\vartheta, x, \alpha) \in D,\ g(x, \alpha) \leqq \omega,\ \vartheta \geqq \alpha + T_0(\alpha, \omega),\ (z, \vartheta)\, p(x, \alpha) \Rightarrow V(z, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Důkaz. Nechť p je stejně asymptoticky omezený. Pak podle věty 2.8 existují zobrazení 2.8(1) s vlastnostmi 2.8(i) až 2.8(iii). Zvolme v (1) za $\varkappa_0 \in J$ konstantu $\varkappa$ z definice 2.9 a zobrazení $T_0 : R \times J \to R^+$ definujme předpisem

$$T_0(\alpha, \omega) = T(\alpha, \omega),$$

kde T je zobrazení z 2.9. Pak podle 2.9(3) pro každé $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $(z, \vartheta)\ p(x, \alpha)$, $\vartheta \geqq \alpha + T_0(\alpha, \omega)$ platí $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa_0$ a tedy vzhledem k 2.3(2) je $V(z, \vartheta) \leqq \varkappa_0$. Odtud plyne, že zobrazení V má také vlastnost (iv).

Nechť existují zobrazení 2.8(1) s vlastnostmi 2.8(i) až 2.8(iii) a (1) mající vlastnost (iv). Z vlastností 2.8(i) až 2.8(iii) vyplývá podle věty 2.8, že p je stejně omezený vzhledem k m. Definujme konstantu $\varkappa$ z 2.9(1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0$$

a za zobrazení T z 2.9(2) zvolme zobrazení T_0 z (1). Pak pro každé $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $\vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)$, $(z, \vartheta)\ p(x, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in J$ platí

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, \vartheta) \leqq \varkappa_0 \leqq a(\varkappa),$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.11 Věta. *Nechť p je globální a úplný vzhledem k řešením. Nechť existují zobrazení 2.8(1) s vlastnostmi 2.8(i) až 2.8(iii), zobrazení $c : J \to R^+$ zdola omezené na každém konečném podintervalu intervalu J kladnou konstantou a konstanty $\varkappa_0, \varkappa_1 \in \in J$ s následujícími vlastnostmi:*

(iv) $(x, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \varkappa_1 \Rightarrow V(x, \alpha) \leqq \varkappa_0$,

(v) *pro každé řešení s procesu p a všechna $\alpha, \vartheta \in$ domain s, $\alpha \leqq \vartheta$ platí*

$$V(s(\vartheta), \vartheta) - V(s(\alpha), \alpha) \leqq -\int_\alpha^\vartheta c(g(s(v), v))\, dv,$$

kdykoliv je $c(g(s(v), v))$ definováno pro všechna $v \in \langle \alpha, \vartheta \rangle$, $v \in R$.

Potom je p stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Z vlastností 2.8(i) až 2.8(iii) zobrazení 2.8(1) vyplývá podle věty 2.8, že p je stejně omezený vzhledem k m. Nechť ζ je zobrazení z definice 2.7. Položme

$$\lambda(\alpha, \omega) = \inf \{c(v) : \varkappa_1 \leqq v \leqq \zeta(\alpha, \omega)\}.$$

Definujme zobrazení T z 2.9(2) předpisem

$$T(\alpha, \omega) = 1 + \frac{\zeta_0(\alpha, \omega)}{\lambda(\alpha, \omega)},$$

konstantu $\varkappa$ z 2.9(1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0$$

a ukažme, že takto definované $\varkappa$ a T vyhovují definici 2.9. Nechť je dáno $(x, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$. Je-li $g(x, \alpha) \leqq \varkappa_1$, ukážeme stejným způsobem jako v důkazu věty 2.6, že platí

$$(\vartheta, x, \alpha) \in D\,, \quad (z, \vartheta)\, p(x, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa\,.$$

Nechť je tedy $\varkappa_1 < g(x, \alpha) \leqq \omega$ a předpokládejme, že pro nějaké $(y, \beta)\, p(x, \alpha)$, $\beta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)$ platí vztah $g(y, \beta) > \varkappa$. Nechť s je řešení procesu p procházející body (x, α) a (y, β). Je-li $\varkappa_1 < g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, \omega)$ pro všechna $\vartheta \in \langle\alpha, \beta\rangle$, $\vartheta \in R$, pak pomocí 2.11(v) a 2.8(ii) dostáváme vztah

$$V(y, \beta) \leqq V(x, \alpha) - \int_\alpha^\beta c(g(s(v), v))\, \mathrm{d}v \leqq \zeta_0(\alpha, \omega) - \lambda(\alpha, \omega)\, T(\alpha, \omega) < 0\,,$$

což je ve sporu s definicí zobrazení V.

Existuje-li $\gamma \in \langle\alpha, \beta\rangle$ takové, že $g(s(\gamma), \gamma) \leqq \varkappa_1$, plyne ze vztahu $(y, \beta)\, p(s(\gamma), \gamma)$ nerovnost $g(y, \beta) \leqq \varkappa$, což je spor s naším předpokladem. Odtud dostáváme, že pro každé $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $\vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)$, $(z, \vartheta)\, p(x, \alpha)$ platí $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.12 Definice. Říkáme, že p je *stejnoměrně omezený* vzhledem k m právě když existuje zobrazení

(1) $$\xi : J \to J$$

takové, že platí

(2) $$(\vartheta, x, \alpha) \in D\,, \quad g(x, \alpha) \leqq \psi\,, \quad (z, \vartheta)\, p(x, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \xi(\psi)\,.$$

2.13 Věta. *p je stejnoměrně omezený vzhledem k m právě když existují zobrazení*

(1) *$V : E \to R^0$, $a : J \to J$, a rostoucí, $a(\psi) \to +\infty$ pro $\psi \to +\infty$, $b : R^0 \to J$, b neklesající,*

s následujícími vlastnostmi:

(i) *V je ljapunovská funkce,*

(ii) *$(x, \alpha) \in E, g(x, \alpha) \in J \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, \alpha)$ a $(x, \alpha) \in E \Rightarrow V(x, \alpha) \leqq b(g(x, \alpha))$.*

Důkaz. Nechť p je stejnoměrně omezený. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zobrazení ξ z definice 2.12 je rostoucí. Definujme zobrazení $V : E \to R^0$ předpisem 2.3(2). Odtud a z 2.12(2) plyne, že zobrazení V je tímto předpisem skutečně definováno a má vlastnost (i). Definujme zobrazení a, b z (1) vztahy

$$a(\psi) = \psi\,, \quad b(\psi) = \xi(\psi)\,, \quad b(\psi) = \xi(1) \quad \text{pro} \quad \psi \in \langle 0, 1\rangle\,.$$

Nechť je dáno $(x, \alpha) \in E$. Ze vztahu 2.12(2) plyne $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \in J$, $(z, \vartheta)\, p(x, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \xi(g(x, \alpha))$, takže také $V(x, \alpha) \leqq \xi(g(x, \alpha))$. Zřejmě platí $g(x, \alpha) \leqq V(x, \alpha)$ a tedy zobrazení (1) mají vlastnost (ii).

Nechť existují zobrazení (1) s vlastnostmi (i) a (ii). Definujme zobrazení ξ z 2.12(1) tak, aby platilo

$$a(\xi(\psi)) \geqq b(\psi).$$

Pak ze vztahů $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$, $(z, \vartheta)\, p(x, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in J$ dostáváme

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, \vartheta) \leqq V(x, \alpha) \leqq b(\psi) \leqq a(\xi(\psi)),$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \xi(\psi)$. Je tedy p stejnoměrně omezený vzhledem k m.

2.14 Poznámka. Nechť proces p připouští periodu $\tau > 0$ a nechť zobrazení g z 2.1(2) je periodické v druhé proměnné s periodou τ. Je-li p stejně omezený vzhledem k m a existuje-li zobrazení $\mu : J \to J$ takové, že $\mu(\omega) \geqq \zeta(\alpha, \omega)$ pro všechna $\alpha \in \langle 0, \tau \rangle$, $\alpha \in R$, $\omega \in J$ a nějaké ζ vyhovující definici 2.7, pak platí:

(i) p je stejnoměrně omezený vzhledem k m,

(ii) existuje ljapunovská funkce V periodická v poslední proměnné s periodou τ a mající vlastnost 2.13(ii).

2.15 Definice. Říkáme, že p je *stejnoměrně asymptoticky omezený* vzhledem k m právě když p je stejnoměrně omezený vzhledem k m a existují

$$\varkappa \in J \tag{1}$$

a zobrazení

$$T : J \to R^+ \tag{2}$$

takové, že platí

$$(\vartheta, x, \alpha) \in D, \quad g(x, \alpha) \leqq \psi, \quad \vartheta \geqq \alpha + T(\psi), \tag{3}$$
$$(z, \vartheta)\, p(x, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa.$$

2.16 Věta. *p je stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m právě když existují zobrazení* 2.13(1) *s vlastnostmi* 2.13(i), 2.13(ii) *a zobrazení*

$$T_0 : J \to R^+, \quad \varkappa_0 \in J \tag{1}$$

takové, že platí

(iii) $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$, $\vartheta \geqq \alpha + T_0(\psi)$, $(z, \vartheta)\, p(x, \alpha) \Rightarrow V(z, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Důkaz. Nechť p je stejnoměrně asymptoticky omezený. Pak podle věty 2.13

existují zobrazení 2.13(1) s vlastnostmi 2.13(i) a 2.13(ii). Zvolme v (1) za $\varkappa_0 \in J$ konstantu $\varkappa$ z definice 2.15 a zobrazení $T_0 : J \to R^+$ definujme předpisem

$$T_0(\psi) = T(\psi)\,,$$

kde T je zobrazení z definice 2.15. Pak podle 2.15(3) pro každé $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$, $\vartheta \geqq \alpha + T_0(\psi)$, $(z, \vartheta)\, p(x, \alpha)$ platí $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa_0$, odkud vzhledem k 2.3(2) dostáváme $V(z, \vartheta) \leqq \varkappa_0$. Odtud plyne, že zobrazení V má také vlastnost (iii).

Nechť existují zobrazení 2.13(1) s vlastnostmi 2.13(i) a 2.13(ii) a (1) mající vlastnost (iii). Z vlastností 2.13(i) a 2.13(ii) vyplývá podle věty 2.13, že p je stejnoměrně omezený vzhledem k m. Definujme konstantu $\varkappa$ z 2.15(1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0$$

a za zobrazení T z 2.15(2) zvolme zobrazení T_0 z (1). Pak pro každé $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$, $\vartheta \geqq \alpha + T(\psi)$, $(z, \vartheta)\, p(x, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in J$ platí

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, \vartheta) \leqq \varkappa_0 \leqq a(\varkappa)\,,$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.17 Věta. *Nechť p je globální a úplný vzhledem k řešením. Nechť existují zobrazení* 2.13(1) *s vlastnostmi* 2.13(i) *a* 2.13(ii), *zobrazení c: $J \to R^+$ zdola omezené na každém konečném podintervalu intervalu J kladnou konstantou a mající následující vlastnost*

(iii) *pro každé řešení s procesu p a všechna α, $\vartheta \in$* domain *s, $\alpha \leqq \vartheta$ platí*

$$V(s(\vartheta), \vartheta) - V(s(\alpha), \alpha) \leqq - \int_\alpha^\vartheta c(g(s(v), v))\,\mathrm{d}v\,,$$

kdykoliv je $c(g(s(v), v))$ definováno pro všechna $v \in \langle \alpha, \vartheta \rangle$, $v \in R$.

Potom je p stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Z vlastností 2.13(i) a 2.13(ii) zobrazení 2.13(1) plyne podle věty 2.13, že p je stejnoměrně omezený vzhledem k m. Nechť ξ je zobrazení z definice 2.12 a nechť

$$\lambda(\psi) = \inf\{c(v) : 1 \leqq v \leqq \xi(\psi)\}\,.$$

Definujme nyní $\varkappa$ a T z definice 2.15 předpisem

$$\varkappa = \xi(1)\,, \quad T(\psi) = 1 + \frac{b(\psi)}{\lambda(\psi)}$$

a ukažme, že takto definované $\varkappa$ a T skutečně vyhovují 2.15. Nechť je dáno $(x, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$. Předpokládejme, že pro nějaké $(y, \beta)\, p(x, \alpha)$, $\beta \geqq \alpha + T(\psi)$ platí vztah

$g(y, \beta) > \varkappa$. Nechť s je řešení procesu p procházející body (x, α) a (y, β). Je-li $1 < g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \xi(\psi)$ pro všechna $\vartheta \in \langle\alpha, \beta\rangle$, $\vartheta \in R$, pak pomocí (iii) a 2.13(ii) dostáváme vztah

$$V(y, \beta) \leqq V(x, \alpha) - \int_\alpha^\beta c(g(s(v), v))\, \mathrm{d}v \leqq b(\psi) - \lambda(\psi)\, T(\psi) < 0\,,$$

což je ve sporu s definicí zobrazení V. Existuje-li $\gamma \in \langle\alpha, \beta\rangle$ takové, že $g(s(\gamma), \gamma) \leqq 1$, plyne ze vztahu $(y, \beta)\, p(s(\gamma), \gamma)$ nerovnost $g(y, \beta) \leqq \xi(1) = \varkappa$, což je spor s naším předpokladem. Odtud dostáváme, že pro každé $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$, $\vartheta \geqq \alpha + T(\psi)$, $(z, \vartheta)\, p(x, \alpha)$ platí $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m.

3. STEJNOMĚRNÁ OMEZENOST A STEJNOMĚRNÁ ASYMPTOTICKÁ OMEZENOST SPOJITÉHO TOKU

3.1 V této části budeme předpokládat, že P je metrický prostor s metrikou ϱ a zobrazení g z 2.1(2) definované předpisem

$$g(x, \alpha) = \inf\{\varrho(x, y) : (y, \alpha) \in m\}$$

je spojité na $P \times R^1$.

3.2 Definice. Říkáme, že tok p na P nad R^1 je *spojitý* právě když jsou řešení spojitá zobrazení.

3.3 Věta. *Spojitý tok p je stejnoměrně omezený vzhledem k m právě když existuje ljapunovská funkce V s následujícími vlastnostmi:*

(i) *existuje $\delta \in J$ takové, že*

$$\operatorname{domain} V = \{(x, \alpha) \in E : g(x, \alpha) \geqq \delta\}\,,$$

(ii) *existují rostoucí spojitá zobrazení $a, b : J \to J$, $\lim_{\psi \to +\infty} a(\psi) = +\infty$ taková, že platí*

$$(x, \alpha) \in \operatorname{domain} V \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, \alpha) \leqq b(g(x, \alpha))\,.$$

Důkaz. Nechť p je stejnoměrně omezený. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zobrazení ξ z definice 2.12 je rostoucí a spojité. Zvolme $\delta = \xi(1)$ a definujme parciální zobrazení $V : E \to R^+$ předpisem 2.3(2) pro $(x, \alpha) \in E$ s $g(x, \alpha) \geqq \delta$. Vlastnosti (i) a (ii) námi definovaného zobrazení potom vyplývají z první části důkazu věty 2.13. Stejně jako ve větě 2.13 se ukáže, že V je ljapunovskou funkcí.

Nechť existuje ljapunovská funkce V s vlastnostmi (i) a (ii). Nechť je dáno $\psi \geqq \delta$. Definujme zobrazení ξ z 2.12(1) tak, aby

$$a(\xi(\psi)) > b(\psi)$$

a předpokládejme, že existují bod $(x, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$ a $\gamma \in \langle \alpha, \varepsilon(x, \alpha))$ takové, že platí $g({}_\gamma p_\alpha x, \gamma) > \xi(\psi)$. Ze spojitosti potom vyplývá, že existují $\alpha \leqq \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma$, pro které platí

$$g({}_{\gamma_1}p_\alpha x, \gamma_1) = \psi\,, \quad g({}_{\gamma_2}p_\alpha x, \gamma_2) = \xi(\psi) \quad \text{a} \quad \psi < g({}_\vartheta p_\alpha x, \vartheta) < \xi(\psi) \quad \text{pro} \quad \vartheta \in (\gamma_1, \gamma_2)\,.$$

Pak je

$$a(g({}_{\gamma_2}p_\alpha x, \gamma_2)) = a(\xi(\psi)) \leqq V({}_{\gamma_2}p_\alpha x, \gamma_2) \leqq V({}_{\gamma_1}p_\alpha x, \gamma_1) \leqq b(g({}_{\gamma_1}p_\alpha x, \gamma_1)) = b(\psi)\,,$$

což je ve sporu s volbou čísla $\xi(\psi)$. Tím je věta dokázána.

3.4 Věta. *Spojitý globální tok p je stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m právě když existuje ljapunovská funkce V s vlastnostmi* 3.3(i), 3.3(ii) *a spojité zobrazení c*: $\langle \delta, +\infty) \to R^+$ *takové, že platí*

(iii) $(x, \alpha) \in \text{domain}\, V \Rightarrow V({}_\vartheta p_\alpha x, \vartheta) - V(x, \alpha) \leqq - \int_\alpha^\vartheta c(g({}_\nu p_\alpha x, \nu))\, d\nu$, *kdykoliv je* $c(g({}_\nu p_\alpha x, \nu))$ *definováno pro všechna* $\nu \in \langle \alpha, \vartheta \rangle$.

Důkaz. Nechť p je stejnoměrně asymptoticky omezený. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zobrazení ξ z 2.12 a T z definice 2.15 jsou rostoucí a spojitá. Zvolme $\sigma > 1$ a položme $\delta = \sigma\varkappa + 1$, kde $\varkappa$ je konstanta z 2.15. Definujme parciální zobrazení $V : E \to R^+$ předpisem

$$V(x, \alpha) = \sup \left\{ g({}_\vartheta p_\alpha x, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\, \sigma}{1 + \vartheta - \alpha} : \vartheta \geqq \alpha \right\}$$

pro $(x, \alpha) \in E$ s $g(x, \alpha) \geqq \delta$.

Snadno se ukáže, že platí

$$g(x, \alpha) \leqq V(x, \alpha) \leqq \sigma\xi(g(x, \alpha))\,. \tag{1}$$

Definujeme-li nyní zobrazení a předpisem $a(\psi) = \psi$ a b předpisem $b(\psi) = \sigma\xi(\psi)$, vyplývá z (1), že V má vlastnosti 3.3(i) a 3.3(ii). Nechť jsou dány $(x, \alpha), (y, \beta) \in$ $\in \text{domain}\, V$, $y = {}_\beta p_\alpha x$. Pak pro každé $z = {}_\vartheta p_\beta y$ platí také $z = {}_\vartheta p_\alpha x$ a $(1 + (\vartheta - \alpha)\, \sigma) :$ $: (1 + \vartheta - \alpha) \geqq (1 + (\vartheta - \beta)\, \sigma)/(1 + \vartheta - \beta)$, takže

$$V(y, \beta) = \sup \left\{ g({}_\vartheta p_\beta y, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \beta)\, \sigma}{1 + \vartheta - \beta} : \vartheta \geqq \beta \right\} \leqq$$

$$\leqq \sup \left\{ g({}_\vartheta p_\alpha x, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\, \sigma}{1 + \vartheta - \alpha} : \vartheta \geqq \alpha \right\} = V(x, \alpha)\,.$$

Odtud plyne, že zobrazení V je ljapunovskou funkcí. Nechť je dáno $(x, \alpha) \in \text{domain}\, V$. Pak podle 2.15(3) pro všechna $\vartheta \geqq \alpha + T(g(x, \alpha))$ platí $g({}_\vartheta p_\alpha x, \vartheta) \leqq \varkappa$, takže

$$g({}_\vartheta p_\alpha x, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\, \sigma}{1 + \vartheta - \alpha} \leqq \sigma\varkappa < \sigma\varkappa + 1 \leqq g(x, \alpha) \leqq V(x, \alpha)\,.$$

Nyní ze spojitosti p a g vyplývá existence $\vartheta_0 \in \langle\alpha, \alpha + T(g(x, \alpha))\rangle$ takového, že

$$V(x, \alpha) = g({}_{\vartheta_0}p_\alpha x, \vartheta_0)\frac{1 + (\vartheta_0 - \alpha)\,\sigma}{1 + \vartheta_0 - \alpha}.$$

Označíme-li $y = {}_\beta p_\alpha x$ a $z = {}_\vartheta p_\beta y$, pak je

$$V(z, \vartheta) = g({}_{\gamma_0}p_\vartheta z, \gamma_0)\,\frac{1 + (\gamma_0 - \vartheta)\,\sigma}{1 + \gamma_0 - \vartheta} = g({}_{\gamma_0}p_\vartheta \circ {}_\vartheta p_\beta y, \gamma_0)\,\frac{1 + (\gamma_0 - \vartheta)\,\sigma}{1 + \gamma_0 - \vartheta} =$$

$$= g({}_{\gamma_0}p_\beta y, \gamma_0)\,\frac{1 + (\gamma_0 - \beta)\,\sigma}{1 + \gamma_0 - \beta}\left[1 - \frac{(\sigma - 1)(\vartheta - \beta)}{(1 + \gamma_0 - \vartheta)\,[1 + (\gamma_0 - \beta)\,\sigma]}\right] \leqq$$

$$\leqq V(y, \beta)\left[1 - \frac{(\sigma - 1)(\vartheta - \beta)}{(1 + \gamma_0 - \beta)\,[1 + (\gamma_0 - \beta)\,\sigma]}\right],$$

takže

$$\frac{V(z, \vartheta) - V(y, \beta)}{\vartheta - \beta} \leqq -(\sigma - 1)\,\frac{V(y; \beta)}{(1 + \gamma_0 - \vartheta)(1 + (\gamma_0 - \beta)\,\sigma)}.$$

Odtud a ze vztahů $0 \leqq \gamma_0 - \vartheta \leqq T(g(z, \vartheta))$, $0 < \gamma_0 - \beta \leqq T(g(z, \vartheta)) + (\vartheta - \beta)$ dostáváme nerovnost

$$(2)\quad \frac{V(z, \vartheta) - V(y, \beta)}{\vartheta - \beta} \leqq -\frac{(\sigma - 1)\,V(y, \beta)}{[1 + T(g(z, \vartheta))]\,[1 + \sigma T(g(z, \vartheta)) + \sigma(\vartheta - \beta)]} \leqq$$

$$\leqq -\frac{(\sigma - 1)\,g(y, \beta)}{[1 + T(g(z, \vartheta))]\,[1 + \sigma T(g(z, \vartheta)) + \sigma(\vartheta - \beta)]}.$$

Jelikož je $\lim_{\vartheta \to \beta+} g(z, \vartheta) = g(y, \beta)$ a zobrazení T je podle předpokladu spojité, vyplývá z (2) nerovnost

$$\limsup_{\vartheta \to \beta+} \frac{V({}_\vartheta p_\alpha x, \vartheta) - V({}_\beta p_\alpha x, \beta)}{\vartheta - \beta} \leqq \frac{-(\sigma - 1)\,g({}_\beta p_\alpha x, \beta)}{[1 + T(g({}_\beta p_\alpha x, \beta))]\,[1 + \sigma T(g({}_\beta p_\alpha x, \beta)]}.$$

Definujeme-li zobrazení c z (iii) předpisem

$$c(\psi) = \frac{(\sigma - 1)\,\psi}{[1 + T(\psi)]\,[1 + \sigma T(\psi)]}$$

vidíme, že ljapunovská funkce V má vlastnost (iii).

Nechť existuje ljapunovská funkce V s vlastnostmi 3.3(i), 3.3(ii) a (iii). Z vlastností 3.3(i) a 3.3(ii) vyplývá podle věty 3.3, že p je stejnoměrně omezený vzhledem k m. Nechť ξ je zobrazení z definice 2.12. Položme

$$\lambda(\psi) = \inf\{c(v) : \delta \leqq v \leqq \xi(\psi)\}.$$

Definujme nyní $\varkappa = \xi(\delta)$ a $T(\psi) = 1 + b(\psi)/\lambda(\psi)$ a ukažme, že takto definované $\varkappa$ a zobrazení T vyhovují definici 2.15. Nechť je dáno $(x, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$. Předpokládejme, že pro nějaké $\beta \geqq \alpha + T(\psi)$ platí vztah $g({}_\beta p_\alpha x, \beta)\rangle > \varkappa$. Je-li $\delta < g({}_\vartheta p_\alpha x, \vartheta) \leqq \xi(\psi)$ pro všechna $\vartheta \in \langle \alpha, \beta \rangle$, pak z (iii) plyne nerovnost

$$V({}_\beta p_\alpha x, \beta) \leqq V(x, \alpha) - \int_\alpha^\beta c(g({}_\nu p_\alpha x, \nu))\, d\nu \leqq b(\psi) - \lambda(\psi)\, T(\psi) < 0\,,$$

což je spor s definicí zobrazení V. Existuje-li $\gamma \in \langle \alpha, \beta \rangle$ takové, že $g({}_\gamma p_\alpha x, \gamma) \leqq \delta$, plyne ze vztahu ${}_\beta p_\alpha x = {}_\beta p_\gamma \circ {}_\gamma p_\alpha x$ nerovnost $g({}_\beta p_\alpha x, \beta) \leqq \xi(\delta) = \varkappa$, což je spor s naším předpokladem. Odtud dostáváme, že pro každé $(x, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$, $\vartheta \geqq \alpha + T(\psi)$ platí $g({}_\vartheta p_\alpha x, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m.

Literatura

[1] *Hájek O.:* Theory of processes I, Czech. Math. Journ. *17* (92), 1967, 159—199.

[2] *Nagy J.:* Liapunovs' direct method in abstract control processes, Čas. pěst. mat. *93*, 1968, 299—325.

[3] *Yoshizawa T.:* Ljapunov's function and boundedness of solutions, Funkcialaj Ekvacioj, *2*, 1959, 95—142, (ruský překlad: Функция Ляпунова и ограниченность решений, Математика 1965, 95—127).

Adresa autora: Liberec, Hálkova 6 (Vysoká škola strojní a textilní).

Summary

BOUNDEDNESS OF ABSTRACT PROCESSES

FRANTIŠEK TUMAJER, Liberec

The properties of boundedness both of abstract processes and of continuous flows are studied by means of method of Liapunov's theory. The notions of boundedness, asymptotical boundedness of the abstract process relatively to a set are introduced. The equi-and uniform variants of these notions are introduced as well. In the paper is shown that these properties can be totally characterized by means of generalized Liapunov's functions with certain additional properties.