Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ПЛОСКОСТИ НА НЕКОТОРЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ОКРУЖНОСТЕЙ

ВАЦЛАВ ПОЛАК (Václav Polák) и МИЛАН СЕКАНИНА (Milan Sekanina), Брно

(Поступило в редакцию 25/7 1961 г.)

В работе исследуются разложения плоскости E_2 на топологические окружности из которых исключено определенное число точек, кроме того исследуются разложения, элементами которых являются прямые без конечного числа точек и разложение внутренности окружности.

Определение 1. Под *разложением* плоскости Эвклида E_2 понимаем такую систему Σ непустых подмножеств из E_2, что каждая точка из E_2 принадлежит точно одному множеству из Σ.

Определение 2. Под *топологической окружностей* понимаем подмножество из E_2 гомеоморфное к окружности.

Определение 3. Пусть l топологическая окружность, $L \subset l$ любое множество мощности n, $0 \leqq n \leqq 2^{\aleph_0}$. Тогда множество $k = l - L$ назовем *топологической окружностью типа* (n) (топологическая окружность является топологической окружностью типа (0)).

В последующем изложении предполагается, что в E_2 задана некоторая система прямоугольных координат. Через $\overline{M}$ обозначим замыкание множества $M \subset E_2$ в смысле метрики Эвклида. Через $I(k)$ обозначим внутренность топологической окружности k.

Теорема 1. *Не существует разложение плоскости, при котором все элементы разложения являются топологическими окружностями.*

Доказательство. Допустим, что такое разложение Σ существует. Пусть $k_1 \in \Sigma$ и $x_2, x_3, \ldots$ есть множество всех точек из E_2 с рациональными координатами лежащих внутри кривой k_1 т. е. в $I(k_1)$. Пусть $x_2 \in k_2 \in \Sigma$. Пусть x_{i_3} точка лежащая внутри k_2, имеющая наименьший индекс. Пусть $x_{i_3} \in k_3 \in \Sigma$. Вообще пусть определена окружность k_n и пусть $x_{i_{n+1}}$ точка лежащая внутри k_n имеющая наименьший индекс. После того пусть $x_{i_{n+1}} \in k_{n+1} \in \Sigma$. Множества $k_n \cup I(k_n)$ замкнутые и имеет место

$$k_1 \cup I(k_1) \supset k_2 \cup I(k_2) \supset \ldots \supset k_n \cup I(k_n) \supset \ldots .$$

В силу теоремы Кантора $\bigcap_n (k_n \cup I(k_n)) \neq \emptyset$.

Пусть $x \in \bigcap_n (k_n \cup I(k_n))$. Существует такая топологическая окружность $k \in \Sigma$, что $x \in k$. Пусть y точка имеющая рациональные координаты, $y \in I(k)$. Так как для всех n $k \cup I(k) \subsetneqq k_n \cup I(k_n)$, то существует такой индекс i, что $y = x_i$. Но это противоречие, ибо $x_i \notin k_{n+1} \cup I(k_{n+1})$ для всех n, начиная с некоторого индекса N. Итак покрытие Σ с приведенными свойствами не существует.

Теорема 2. *Пусть n кардинальное число, для которого $1 \leqq n \leqq 2^{\aleph_0}$. Тогда существует разложение плоскости, элементами которого являются топологические окружности типа* (n).

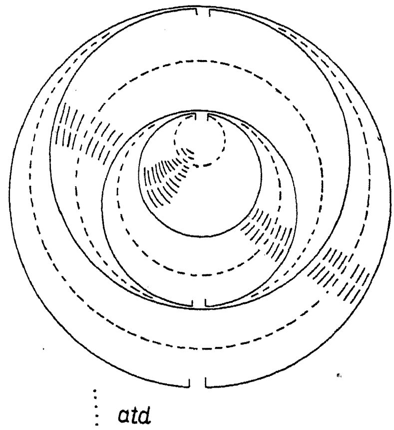

Рис. 1.

Доказательство. а) Пусть $n = 1$. Тогда пример такого разложения изображен на рисунке 1. Его элементами являются даже окружности, из которых исключена одна точка.

б) Пусть $2 \leqq n < \aleph_0$. Для простоты обозначения докажем теорему для $n = 3$. Доказательство для любого n совершенно аналогично.

Пусть $\delta > 0$. Треугольник имеющий вершины $(0, 0)$, $(-\frac{3}{4}\delta, 1)$, $(\frac{3}{4}\delta, 1)$ обозначим через T_1^1. Пусть $T^1_{c_1,\dots,c_k}$ означает треугольник имеющий вершины (a, n) (эту вершину в дальнейшем изложении будем называть нижней вершиной) и $(a - (3/4^n)\,\delta, n + 1)$, $(a + (3/4^n)\,\delta, n + 1)$. Тогда треугольник имеющий вершины

$$(a - (3/4^n)\,\delta, n + 1), \quad (a - (3/4^n)\,\delta - (3/4^{n+1})\,\delta, n + 2),$$
$$(a - 3/4^n + (3/4^{n+1})\,\delta, n + 2)$$

обозначим через $T^1_{c_1,\dots,c_k,1}$, треугольник имеющий вершины

$$(a, n + 1), \quad (a - (3/4^{n+1})\,\delta, n + 2), \quad (a + (3/4^{n+1})\,\delta, n + 2)$$

обозначим через $T^1_{c_1,\dots,c_k,2}$ и треугольник имеющий вершины

$$(a + (3/4^n)\,\delta, n + 1), \quad (a + (3/4^n)\,\delta - (3/4^{n+1})\,\delta, \; n + 2),$$
$$(a + (3/4^n)\,\delta + (3/4^{n+1})\,\delta, \; n + 2)$$

обозначим через $T^1_{c_1,\dots,c_k,3}$. Если за исходный взять треугольник T_1^1 и если определить вообще треугольник $T^1_{c_1,\dots,c_k}$ при помощи полной индукции, то получим при помощи приведенной конструкции систему $\mathscr{A}_1$ треугольников изображенную на рис. 2. При этом в последующем изложении соответствующий символ $T^1_{c_1,\dots,c_k}$ обозначает внутренность построенного треугольника. Его границу обозначим через $h(T^1_{c_1,\dots,c_k})$ и положим

$$\overline{T^1_{c_1,\dots,c_k}} = T^1_{c_1,\dots,c_k} \cup h(T^1_{c_1,\dots,c_k}).$$

Пусть $S_1^1, S_{11}^1, S_{12}^1, \ldots, S_{c_1,\ldots,c_n}^1, \ldots$ система всех связных компонент множества $E_2 - \bigcup \overline{T}$, где соединение разумеется через все $T \in \mathscr{A}_1$, причем обозначение выберем следующим образом: S_1^1 есть та компонента, на границе которой нахо-

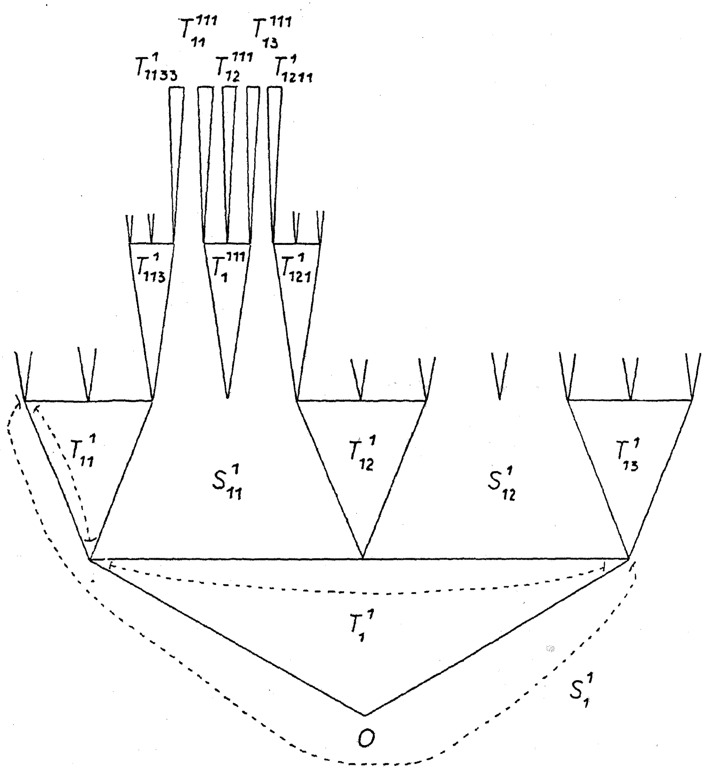

Рис. 2.

дится точка $(0, 0)$, $S_{c_1,\ldots,c_n}^1$ $(n \geqq 2)$ есть та компонента, граница которой имеет непустое пересечение с $h(T_{c_1,\ldots,c_n}^1)$ i $h(T_{c_1,\ldots,c_n+1}^1)$. Теперь образуем следующую последовательность π^1: Сначала упорядочим нижние индексы (т. е. последовательности $(c_1, \ldots, c_k)$ у треугольников $T_{c_1,\ldots,c_k}^1$) лексикографически (т. е. последовательность $(c_1, \ldots, c_k)$ предшествует $(c_1' \ldots, c_{k'}')$, если $k < k'$, или в случае $k = k'$ если $c_1 = c_1', \ldots, c_j = c_j', c_{j+1} < c_{j+1}'$ для подходящего j). Пусть первым членом последовательности π^1 является $T_1^1 \cup T_{11}^1 \cup S_1^1$. Предположим, что мы уже определили первых r членов последовательности π^1. Потом возьмем $T_{c_1,\ldots,c_k}^1$ с наименьшим индексом, который не выступает между первыми r членами. Тогда пусть $T_{c_1,\ldots,c_k}^1 \cup T_{c_1,\ldots,c_k,2}^1 \cup S_{c_1,\ldots,c_k,1}^1$ является $(r+1)$-вым членом последовательности π^1. Легко убедиться, что у членов такой последовательности будет каждое $T_{c_1,\ldots,c_k}^1$ встречатся точно один раз и каждое $S_{c_1,\ldots,c_k}^1$ не более чем один раз. Пусть $S_{c_1,\ldots,c_k}^1$ обозначает область, которая не встречается ни в одном члену последовательности π^1. Читатель легко убедится, что для каждого $S^1_{c_1,\ldots,c_k}$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $S^1_{c_1,\ldots,c_k}$ содержит множество U конгруэнтное с множеством точек, для координат которых имеет место $-\varepsilon \leqq x \leqq \varepsilon$, $y > 0$ (напр. для S^1_{11} можно взять $\varepsilon = \frac{1}{8}\delta$). Построим систему V треугольников, которую получим при помощи $\mathscr{A}_1$ заменой δ на ε и перемещением точки $(0, 0)$ на место точки $(c + (2 \,.\, 3/4^k)\,\delta, k + 1)$, где (c, k) есть нижняя точка треугольника $T^1_{c_1,\ldots,c_k}$. Система этих треугольников лежит в U и следовательно в $S^1_{c_1,\ldots,c_k}$. Обозначение будет аналогичное как у треугольников из $\mathscr{A}_1$, только с той разницей, что верхний индекс положим равный $(1; c_1, \ldots, c_k)$. Таким же образом обозначим связные компоненты дополнения к соединению замыканий треугольников из V относительно множества $S^1_{c_1,\ldots,c_k}$. При этом через $S_1^{1;c_1,\ldots,c_k}$ обозначим компоненту, имеющую на своей границе точку $(c + (2 \,.\, 3/4^k)\,\delta, k + 1)$. После того определим последовательность $\pi^{1;c_1,\ldots,c_k}$ тем же образом как мы определяли π^1. Обозначим соединение всех систем V для областей $S^1_{c_1,\ldots,c_k}$, которые не выступают в членах π^1 символом $\mathscr{A}_2$ и соединение последовательностей $\pi^{1;c_1,\ldots,c_k}$ символом π^2. Вообще, если определено $\mathscr{A}_n$, то $\mathscr{A}_{n+1}$ обозначает ту систему треугольников, которая получена при помощи $\mathscr{A}_n$ таким построением, каким была при помощи $\mathscr{A}_1$ определена $\mathscr{A}_2$. При этом каждому $\mathscr{A}_n$ сопоставлена система π^n множеств типа $T \cup T' \cup S$, где T и T' внутренности треугольников и S одна из образованных компонент. Если обозначим через P_n полуплоскость $\mathrm{E}((x, y);\ y \leqq n - 1)$, то

$$\mathrm{E}(x;\ x \in X \in \pi^k,\ k \leqq n) \supset P_n - \mathrm{E}(x\ ;\ x \in h(T),\ T \in \mathscr{A}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{A}_n)\,.$$

Оттуда следует

(i) $\mathrm{E}(x;\ x \in X \in \pi^k$ для некоторого $k) = \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}(x;\ x \in h(T),$ $T \in \mathscr{A}_k$ для некоторого $k)$.

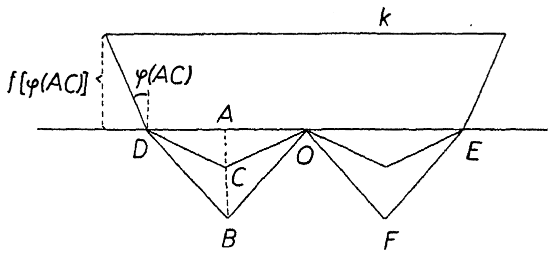

Рис. 3.

При этом области $T \cup T' \cup S$ попарно не пересекаются и гомеоморфны множеству $T_1 \cup T_2 \cup S$, которое определено следующим образом (см. рис. 3): T_1 внутренность треугольника BDO, $B = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $D = (-1, 0)$, $O = (0, 0)$, T_2 внутренность треугольника EFO, $E = (1, 0)$, $F = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, и S полуплоскость $\mathrm{E}((x, y);\ y > 0)$. Пусть A средняя точка отрезка DO. Отобразим точки открытого отрезка AB при помощи отоpажения φ на открытый интервал $(0, \frac{1}{2}\pi)$ так, чтобы $AC < AC_1 \Rightarrow \varphi(AC) < \varphi(AC_1)$ и пусть f возрастающее отображение интервала $(0, \frac{1}{2}\pi)$ на интервал $(0, \infty)$. Образуем кривые k так, как изображено на рисунке (кривая симметрична относительно оси y). Если исключим точки D, O, E из каждой из этих кривых, то получим топологические окружности типа (3), которые образуют разложение области $T_1 \cup T_2 \cup S$. Из гомеоморфизма вытекает, что тоже каждую область $X \in \pi^k$ можно разложить на топологические окружности типа (3), следовательно и $\mathrm{E}(x; x \in X \in \pi^k$ для некоторого $k)$.

Из периметра каждого треугольника из $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n$ исключим концевые точки и середину стороны, параллельной оси x. Этим разложим множественное соединение $\mathrm{E}(x;\ x \in h(T),\ T \in \mathscr{A}_k$ для некоторого $k)$ сторон треугольников на топологические окружности типа (3). Итак имея ввиду (i) получим, что E_2 можно разложить на топологические окружности типа (3).

в) Пусть $\aleph_0 \leqq n < 2^{\aleph_0}$. Пусть $M \subset \mathrm{E}_2$ любое множество мощности n. Пусть N такое подмножество положительных вещественных чисел, что $\operatorname{card} N = n$ и мощность пересечения множества N с любим открытым интервалом положительных вещественных чисел равно n. Пусть Σ_1 система всех окружностей имеющих центр в точках из M и радиусы из N. Этих окружностей n. Каждая из них пересекает остальные n окружностей из Σ_1. Упорядочим Σ_1 в последовательность ω_ι, где ω_ι начальное число соответствующее мощности n. Итак $\Sigma_1 = \{k_0, k_1, \ldots$ $\ldots, k_\nu, \ldots\}$ $\nu < \omega_\iota$. Пусть P_0 множество всех точек пересечения окружности k_0 с окружностями $k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots$ Положим $k_0^0 = k_0 - P_0$. Каждой точке $x \in P_0$ сопоставим окружность $k(x) \in \Sigma_1 - \{k_0\}$ таким образом, что $x \in k(x)$. Далее определим $k_\nu^0 = k_\nu - \mathrm{E}(y;\ y \in P_0,\ k_\nu \neq k(y))$, $\nu \geqq 1$. Множество $\mathrm{E}(y; y \in P_0,$ $k_\nu \neq k(y)) \cap k_\nu$ очевидно не более чем двухточечное и $\operatorname{card} P_0 = n$. Пусть $\mu < \omega_\iota$. Предположим, что для каждого $\xi < \mu$ определена последовательность множеств $k_0^\xi, \ldots, k_\nu^\xi, \ldots$ таким образом, что

(ii) 1. $\eta < \xi \Rightarrow k_\nu^\eta \supset k_\nu^\xi$,

2. для $\nu < \xi$ $\operatorname{card}(k_\nu - k_\nu^\xi) = n$,

3. $\nu \geqq \xi$ $\operatorname{card}(k_\nu - k_\nu^\xi) \leqq 2\bar{\mu}$ (где $\bar{\mu}$ мощность соответствующая порядковому числу μ) и $k_\nu - k_\nu^\xi \subset k_\nu \cap \bigcup\limits_{\lambda \leqq \xi} k_\lambda$,

4. $\eta < \xi, \nu \leqq \eta \Rightarrow k_\nu^\eta = k_\nu^\xi$,

5. $\eta < \xi \Rightarrow k_\nu^\xi \cap k_\eta^\xi = \emptyset$, $0 \leqq \nu < \omega_\iota$.

Для предельного μ положим $k_\nu^* = \bigcap\limits_{\xi<\mu} k_\nu^\xi$. Если μ не является предельным, то существует ϱ так, что $\mu = \varrho + 1$. Тогда положим $k_\nu^* = k_\nu^\varrho$. Пусть $P_\mu = k_\mu^* \cap \bigcup\limits_{\nu \neq \mu} k_\nu^*$. Так как $\operatorname{card}\left(\bigcup\limits_{\nu<\mu} k_\nu \cap k_\mu\right) \leqq 2\bar{\mu}$, $\operatorname{card}\left(k_\mu \cap \bigcup\limits_{\nu \neq \mu} k_\nu\right) = n$ и $k_\nu - k_\nu^* \subset k_\nu \cap \bigcup\limits_{\iota<\mu} k_\iota$, то $\operatorname{card} P_\mu = n$.

Каждому $x \in P_\mu$ сопоставим такое $k_\xi^*(\xi > \mu)$, что $x \in k_\xi^*$. Положим $k_\xi^* = k(x)$. Определим

1. для $\eta < \mu$ $k_\eta^\mu = k_\eta^\eta$, 2. $k_\mu^\mu = k_\mu^* - P_\mu$,

3. $k_\eta^\mu = k_\eta^* - \mathrm{E}(y;\ y \in k_\mu^* \cap k_\eta^*,\ k_\eta^* \neq k(y))$ для $\eta > \mu$.

Для последовательности $k_0^\mu, k_1^\mu, k_2^\mu, \ldots, k_\nu^\mu, \ldots$ очевидно имеют место соотношения (ii). Положим $k_\nu^{\omega_\iota} = \bigcap_{\mu < \omega_\iota} k_\nu^\mu$. Итак последовательность $k_0^{\omega_\iota}, \ldots, k_\nu^{\omega_\iota}, \ldots$ образует разложение на $\bigcup_{\nu < \omega_\iota} k_\nu$ и $\operatorname{card}(k_\nu - k_\nu^{\omega_\iota}) = n$.

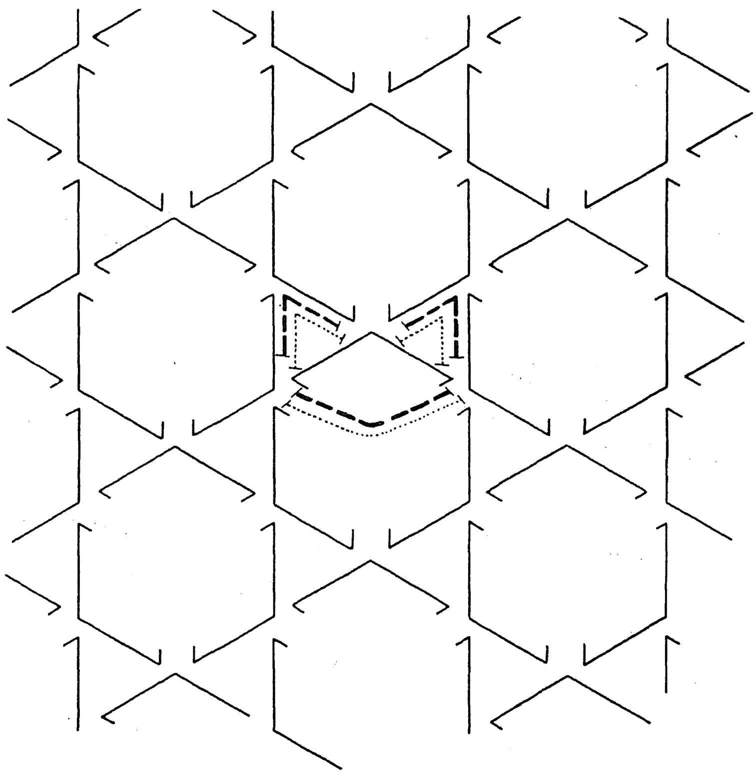

Рис. 4.

Пусть кроме того Σ_2 система всех концентрических окружностей с центром в точке из $\bigcup_{\nu<\omega_\iota} k_\nu$. Пусть $k_r^* \in \Sigma_2$ (индекс r означает радиус окружности), P_r множество всех точек пересечения окружности k_r^* с множеством $\bigcup_{\nu<\omega_\iota} k_\nu$. Множество P_r имеет мощность n. Положим $k_r^\dagger = k_r^* - P_r$. Тогда система $\{k_0^{\omega_\iota}, \ldots, k_\nu^{\omega_\iota}, \ldots\} \cup \cup \mathrm{E}(k_r^\dagger;$ r положительное вещественное число) является требуемым разложением плоскости E_2.

г) Пусть $n = 2^{\aleph_0}$. Так как точка является топологической окружностью типа $(2^{\aleph_0})$ является разложение плоскости E_2 на одноточечные множества требуемым разложением. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. От разложения Σ можно требовать различные свойства. Очевидно, что топологические окружности можно заменить простыми многоугольниками. Возникает вопрос, если из существования разложения Σ на многоугольники типа (n), не вытекает некоторое условие для площади или периметра этих многоугольников. Рисунок 4 показывает, что нет. Здесь образовано разложение Σ на многоугольники типа (3) и заранее дано верхнее и нижнее ограничение для их площади и периметра.

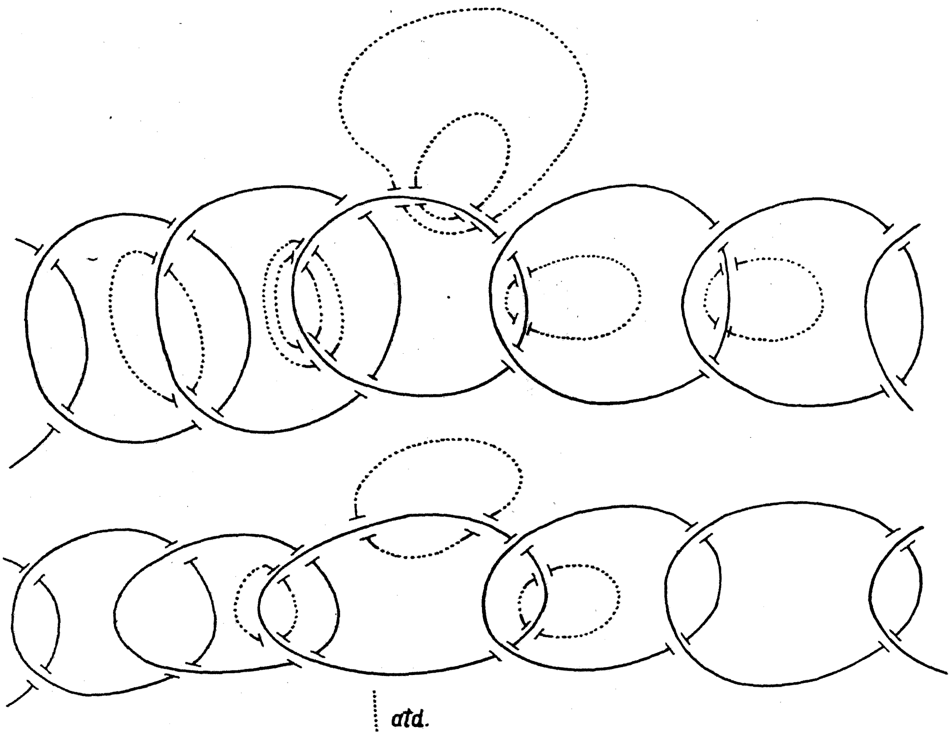

Рис. 5.

Замечание 2. Существует такое разложение Σ на топологические окружности k типа (2), что через каждую точку из E_2 проходит не более чем конечное число топологических окружностей $\bar{k}$, $k \in \Sigma$ (даже не более чем 2, см. рис. 5).

Теорема 3. *Пусть n целое неотрицательное число. Тогда не существует топологическая окружность k типа* (n) *такая, что можно плоскость разложить на множества конгруэнтные с k.*

Доказательство. Допустим, что такая топологическая окружность k существует. Соответствующее разложение обозначим через Σ. Пусть $k_i \in \Sigma$. Положим $I(k_i) = I(\bar{k}_i)$.

a) Сначала покажем, что для никаких двух элементов k_i, k_j разложения Σ не имеет место

(iii) $$\bar{k}_i \cup I(k_i) \supset \bar{k}_j \cup I(k_j) .$$

Допустим сначала, что в (iii) не имеет место равенство. Тогда существует внутренняя точка (т. е. в $I(k_i)$) кривой $\bar{k}_i$, которая не принадлежит $\bar{k}_j \cup I(k_j)$. Допустим, что в (iii) имеет место равенство. Но в этом случае границы обеих множеств $\bar{k}_i \cup I(k_i)$, $\bar{k}_j \cup I(k_j)$ равны т. е. $\bar{k}_i = \bar{k}_j$. Так как число card $(\bar{k}_i - k_i) = $ $=$ card $(\bar{k}_j - k_j)$ конечно, то $k_i \cap k_j \neq \emptyset$ и следовательно необходимо $k_i = k_j$, что и есть противоречие. Итак существует внутренняя точка множества $\bar{k}_i \cup$ $\cup I(k_i)$, которая не принадлежит $\bar{k}_j \cup I(k_j)$. Так как мера (напр. мера Банаха) обеих множеств равна и в силу доказанного получаем, что мера множества $(\bar{k}_i \cup I(k_i)) - (\bar{k}_j \cup I(k_j))$ ненулевая, то мы пришли к противоречию.

б) Докажем, что существует точка x, которая принадлежит пересечению $n + 1$ подходящих множеств $I(k_{i_1}), I(k_{i_2}), \ldots, I(k_{i_{n+1}})$.

Пусть $x' \in I(k_{i_1}) \cap \ldots \cap I(k_{i_m})$, $x' \in k_{i_{m+1}}$. Существует такая круговая окрестность O точки x', что $O \subset I(k_{i_1}) \cap \ldots \cap I(k_{i_m})$. Очевидно $O \cap I(k_{i_{m+1}}) \neq \emptyset$. Итак существует точка $x \in O \cap I(k_{i_{m+1}})$ т. е. $x \in I(k_{i_1}) \cap \ldots \cap I(k_{i_{m+1}})$. Оттуда при помощи индукции вытекает утверждение.

в) Теперь зафиксируем любую точку x, которая принадлежит пересечению $n + 1$ определенных множеств $I(k_{i_1}) \cap \ldots \cap I(k_{i_{n+1}})$. Тогда существует такая круговая окрестность O точки x, что $O \subset I(k_{i_1}) \cap \ldots \cap I(k_{i_{n+1}})$. Определим системы Γ_1, Γ_2 элементов из Σ следующим образом: $\Gamma_1 = \{k_{i_1}, \ldots, k_{i_{n+1}}\}$; $k \in \Sigma$ принадлежит Γ_2 только тогда, когда существует $k' \in \Gamma_1$ и точка $a \in \bar{k}' - k'$ так, что $a \in k$. Положим $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Так как $\bigcup\limits_{k \in \Gamma} k$ является нигде не плотным множеством, то множество $O - \bigcup\limits_{k \in \Gamma} k$ является плотным в O. Каждые две из топологических окружностей $\bar{k}_{i_1}, \ldots, \bar{k}_{i_{n+1}}$ имеют конечное число точек пересечения (максимально $2n$). Множество всех таких точек пересечения обозначим через P. Пусть $\mathfrak{B}$ система всех топологических окружностей $\bar{k}$ для $k \in \Sigma - \Gamma$, которые проходит по крайней мере через две точки из P. Через каждую пару точек из P может проходит максимально $2\binom{n}{2}$ топологических окружностей $k \in \mathfrak{B}$, что и вытекает из того, что эти точки пересечения принадлежит $\bar{k} - k$ (дело в том, что всегда $k \notin \Gamma_2$ и топологические окружности конгруэнтны). Оттуда card $\mathfrak{B} <$ $< \aleph_0$. Итак существует точка $y \in O - \bigcup\limits_{k \in \Gamma \cup \mathfrak{B}} k$. Пусть $k^* \in \Sigma$, $y \in k^*$. В силу а) $\bar{k}^*$ имеет по крайней мере две различные точки общие с каждым из множеств $\bar{k}_{i_m}$ $(m = 1, 2, \ldots, n + 1)$. Так как $k^* \notin \mathfrak{B}$, то $\bar{k}^*$ проходит максимально через одну точку из P. Итак число точек пересечения топологической окружности $\bar{k}^*$ и множеств $\bar{k}_{i_m}$ равно по крайней мере $n + 1$. Так как $k^* \notin \Gamma_2$, то каждая из этих точек пересечения является элементом множества $\bar{k}^* - k^*$. Но это противоречие, так как card $(\bar{k}^* - k^*) = n < n + 1$. Доказательство теоремы 3 завершено.

Проблема 1: Имеет место теорема 3 и для бесконечных $n < 2^{\aleph_0}$?

Проблема 2: При доказательстве теоремы 2 мы построили разложение плоскости на окружности без n точек, $\aleph_0 \leqq n \leqq 2^{\aleph_0}$. На рисунке 1 изображена система окружностей без одной точки, покрывающая плоскость. Существует система окружностей без n точек, $2 \leqq n < \aleph_0$, которая является разложением плоскости?

II

Определение 4. Пусть q прямая и Q ее подмножество мощности n. Тогда множество $p = q - Q$ назовем *прямой типа* (n).

Теорема 4. *Пусть n натуральное число. Тогда не существует разложение плоскости* E_2 *на прямые типа* (n).

Доказательство. Для $n = 1$ теорема доказана в [1]. Пусть $n \geqq 2$. Допустим, что Σ разложение плоскости на прямые типа (n).

Сначала докажем, что через каждую точку плоскости не проходит больше, чем n^6 прямых $\bar{p}$, $p \in \Sigma$ ($\bar{p}$ прямая, для которой $\bar{p} \supset p$). Пусть через точку $x \in E_2$ проходит прямые $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_m$, $m > n^6$, $p_1, \ldots, p_m \in \Sigma$, $x \in p_1$. Тогда очевидно $x \notin p_2$. Пусть $q_1, \ldots, q_n \in \Sigma$, $(q_1 \cup \ldots \cup q_n) \cap \bar{p}_2 = \bar{p}_2 - p_2$. Пусть $l_1, \ldots, l_r \in \Sigma$,

$$(l_1 \cup \ldots \cup l_r) \cap \bigcup_{i=1}^{n} \bar{q}_i = \bigcup_{i=1}^{n} (\bar{q}_i - q_i), \quad l_1 \cap \bigcup_{i=1}^{n} \bar{q}_i \neq \emptyset, \ldots, l_r \cap \bigcup_{i=1}^{n} \bar{q}_i \neq \emptyset .$$

Число прямых $\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_n, l_1, \ldots, l_r \leqq n + n^2 (< n^3)$. Так как $m > n^6 > \binom{n^3}{2} + n^3$, то среди прямых $\bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_m$ существует такая прямая (обозначим ее через $\bar{p}$), что она отлична от прямых $\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_n, l_1, \ldots, l_r$, не проходит через ни одну из точек пересечения этих прямых и не является параллельной никакой из них. Тогда $\bar{p}$ пересекает все прямые $\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_n$ в точках принадлежащих множествам $q_1, \ldots, q_n$. Так как $x \notin p$, то $\operatorname{card}(\bar{p} - p) \geqq n + 1$, что и есть противоречие.

Далее докажем, что существует бесконечное число направлений прямых $\bar{p}$, $p \in \Sigma$. Пусть существует конечное число таких прямых (их число обозначим через m), что каждая прямая $\bar{p}$, $p \in \Sigma$, параллельна некоторой из этих прямых. Тогда между прямыми $\bar{p}$, $p \in \Sigma$, существует бесконечное число параллельных. Обозначим одну такую бесконечную систему всех прямых $\bar{p}$, $p \in \Sigma$, взаимно параллельных через Γ. Итак $\Gamma = \{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots\}$. Пусть $q_1, \ldots, q_n \in \Sigma$, $(q_1 \cup \ldots \cup q_n) \cap \bar{p}_1 = \bar{p}_1 - p_1$. Тогда существует точка $x \in \bar{q}_1$, которая не принадлежит $\bar{q}_2 \cup \ldots \cup \bar{q}_n$ и $x \in \bar{q}_1 - q_1$. Так как $(q_1 \cup \ldots \cup q_n) \cap \bar{p} = \bar{p} - p$ для бесконечного числа $\bar{p} \in \Gamma$ (в силу соотношения $\operatorname{card}(\bar{p} - p) = n$ для $p \in \Sigma$), то для $p^* \in \Sigma$, для которого $x \in p^*$, имеет место $\overline{p^*} \in \Gamma$. Тогда существует такая точка $y \in \overline{p^*} - p^*$, что $y \notin \bar{q}_1 \cup \ldots \cup \bar{q}_n$. Опять в силу уже приведенных соображений $y \in p^{**}$, $\overline{p^{**}} \in \Gamma$. Но тогда $p^{**} \neq p^*$, $\overline{p^{**}} \cap \overline{p^*} \neq \emptyset$, что и есть противоречие.

Теперь выберем $m = n^6(n + 1) + 1$ любых непараллельных прямых $\bar{p}$, $p \in \Sigma$. Обозначим их через $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_m$. Пусть для $q_1, \ldots, q_r \in \Sigma$ имеет место

$$\bigcup_{i=1}^{m} (\bar{p}_i - p_i) = (q_1 \cup \ldots \cup q_r) \cap \bigcup_{i=1}^{m} \bar{p}_i, \quad q_1 \cap \bigcup_{i=1}^{m} \bar{p}_i \neq \emptyset, \ldots, q_r \cap \bigcup_{i=1}^{m} \bar{p}_i \neq \emptyset .$$

Возьмем некоторую прямую $\bar{p}$, $p \in \Sigma$, различную от прямых $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_m, \bar{q}_1, \ldots, \ldots, \bar{q}_r$. Тогда прямая $\bar{p}$ пересекает по меньшей мере $n^6(n+1)$ прямых из семейства $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_m$ а именно в точках принадлежащих $p_1, \ldots, p_m$. При этом различных точек пересечения будет по крайней мере $(n^6(n+1))/n^6 = n+1$. Эти точки пересечения принадлежат $\bar{p} - p$ и это противоречит равенству $\operatorname{card}(\bar{p} - p) = n$, что и мы хотели доказать.

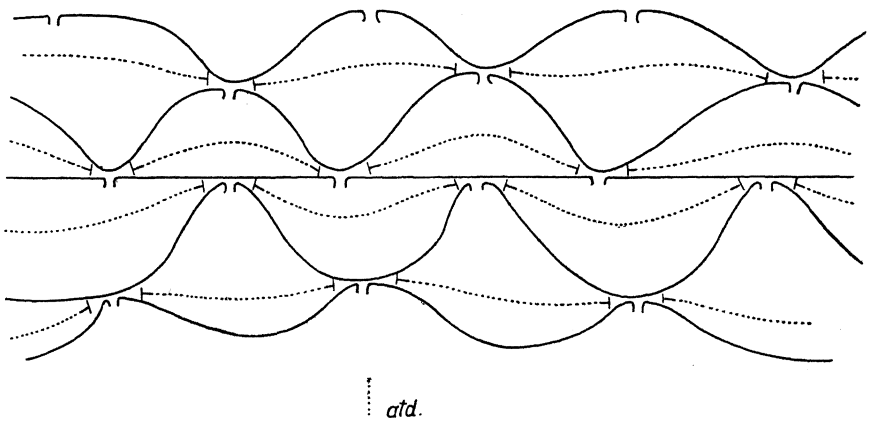

Рис. 6.

Замечание 3. Для $n = 0$ и $n \geqq \aleph_0$ разложения на прямые типа (n) существуют (см. тоже [2]).

Замечание 4. Таким же образом как определялась топологическая окружность, можно ввести понятие топологической прямой в E_2 (в обе стороны бесконечная линия гомеоморфная прямой). Если n любое натуральное число, то существует разложение Σ плоскости E_2 на топологические прямые типа (n). (Построение приведено для $n = 3$ на рис. 6.)

В следующем будем изучать разложения Σ внутренности I зафиксированной окружности k.

Определение 5. Пусть $s \subset I$ любая хорда окружности k (т. е. хорда без своих концовых точек), $S \subset s$ любое ее подмножество мощности n. Тогда множество $t = s - S$ называется *хорда типа* (n). (Пишем $s = \bar{t}$.)

Теорема 5. *Пусть n любое натуральное число. Тогда внутренность окружности нельзя покрыть хордами типа* (n).

Докажем эту теорему от противного, при помощи двух лемм. Пусть в обеих этих утверждениях Σ обозначает покрытие области I, элементами которого являются хорды типа (n). Сначала докажем следующее утверждение:

(iv) *Пусть $a \in I$. Тогда существует по большей мере $n + 1$ различных хорд $\bar{t}_i$, $t_i \in \Sigma$ таких, что $a \in \bar{t}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n + 1)$.*

Доказательство. Пусть существует по крайней мере $n + 2$ таких различных хорд $t_i \in \Sigma$, что $a \in \bar{t}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n + 2)$. Очевидно существует такая круговая открытая ε-окрестность $O(a, \varepsilon)$ точки a, что имеет место

(v) $b \in O(a, \varepsilon)$, t хорда, $b \in t \Rightarrow t$ пересечет по крайней мере $n + 1$ хорд из хорд $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_{n+2}$.

Обозначим $\Gamma_0 = \{t_1, \ldots, t_{n+2}\}$. Очевидно $\Gamma_0 \subset \Sigma$. Положим $\Gamma_1 = \mathrm{E}(t; t \in \Sigma$ и пусть $t \in \Gamma_0$ или $t \cap \bigcup_{i=1}^{n+2} (\bar{t}_i - t_i) \neq \emptyset)$. При помощи матемаяической индукции определим системы Γ_2, Γ_3 итд. Очевидно $\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \ldots \subset \Sigma$. Положим $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$. $\Gamma \subset \Sigma$, множество Γ не более чем счетное и имеет место:

(vi) Точка $c \in \bar{t} - t$ для некоторого $t \in \Gamma \Rightarrow$ существует такое $t' \in \Gamma$, что $c \in t'$.

Очевидно множество $O(a, \varepsilon) - \bigcup_{t \in \Gamma} t$ не является счетным и оно плотное в $O(a, \varepsilon)$. В силу (v), (vi) имеем, что для каждой точки b этого множества $t(a, b) \in \Sigma$ (хорду, соединяющую две различные точки a, b внутренности I обозначаем через $\bar{t}(a, b)$. Также, если некоторая из точек a, b лежит на окружности k. Если существует $s \in \Sigma$ так, что $\bar{s} = \bar{t}(a, b)$, то пишем $s = t(a, b)$). Имеет место более сильное утверждение:

(vii) $$b \in I, \quad b \neq a \Rightarrow t(a, b) \in \Sigma.$$

(Дело в том, что если $t(a, b) \notin \Sigma$, то существует такая точка $c \in O(a, \varepsilon) - \bigcup_{t \in \Gamma} t$, что $c \in t(a, b)$. В силу предшествующего утверждения $t(a, c) \in \Sigma$, но это противоречит, так как $t(a, c) = t(a, b)$.)

Очевидно существует такая $t \in \Sigma$, что $a \notin t$. Пусть x, y концевые точки этой хорды т. е. $\bar{t} = \bar{t}(x, y)$. Так как $t(a, x)$, $t(a, y) \in \Sigma$, то можно предположить $a \notin t(a, x)$. Так как $t(a, x) \in \Sigma$, то существуют такие взаимно различные $l_1, \ldots$ $\ldots, l_n \in \Sigma$, что

$$l_i \cap (\bar{t}(a, x) - t(a, x)) \neq \emptyset \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Очевидно все $l_i \neq t$. Очевидно существует $z \in t$ так, что для каждого u между x, z есть $u \in t$ и card $(\bar{t}(a, u) \cap \bigcup_{i=1}^{n} l_i) = n$ (вытекает из утверждения (vii) — см. рис. 7). Так как $u \in t$, то $u \in (\bar{t}(a, u) - t(a, u))$ и следовательно card $(\bar{t}(a, u) - t(a, u)) \geqq n + 1$ — противоречие. Доказательство утверждения (iv) этим закончилось.

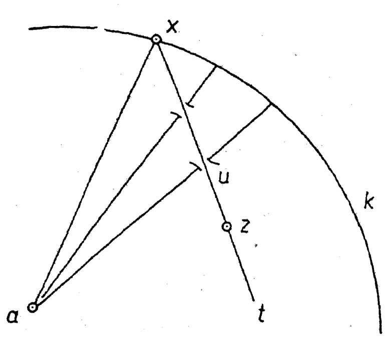

Рис. 7.

(viii) *Существует несчетная система* $\mathscr{S} \subset \Sigma$ *обладающая следующими свойствами:*

(α) $t_1, t_2 \in \mathscr{S}$, $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \bar{t}_1 \cap \bar{t}_2 = \emptyset$, (β) $b \in I \Rightarrow$ *существует* $t \in \mathscr{S}$ *так, что* $b \in \bar{t}$.

Доказательство проведем при помощи построения. Пусть A любое счетное множество плотное в I. Определим $\mathscr{A}_0 = \mathrm{E}(t;\, t \in \Sigma,\, \bar{t}$ содержит по крайней мере одну точку из $A)$. В силу (iv) $\mathscr{A}_0$ счетное множество. Определим $\mathscr{A}_1 = \mathrm{E}(t;\, t \in \Sigma$ и пусть $t \in \mathscr{A}_0$ или $\bar{t} \cap \bigcup_{l \in \mathscr{A}_0} (\bar{l} - l) \neq \emptyset)$. При помощи математической индукции определим системи $\mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3, \ldots$ Очевидно $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}_1 \subset \ldots \subset \Sigma$. Положим $\mathscr{A} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{A}_j$. Система $\mathscr{A} \subset \Sigma$ счетная и обладает следующими свойствами:

(ix) $a \in t \in \Sigma - \mathscr{A}$ (эту систему обозначим через $\mathscr{B}$), $l \in \mathscr{A} \Rightarrow a \notin \bar{l}$.

(x) Точка $a \in \bar{t} - t$, $t \in \mathscr{B}$ существует по большей мере одна $l \in \mathscr{A}$ так, что $a \in \bar{l}$ (если такая l существует, то даже имеет место $a \in l$).

(xi) Множества точек $\bigcup_{t \in \mathscr{A}} t, I - \bigcup_{t \in \mathscr{A}} t$ плотные в I и несчетные.

Кроме того очевидно $\mathscr{B}$ несчетная система элементов из Σ (так как $\mathscr{A}$ счетная). Так как $I - \bigcup_{t \in \mathscr{A}} t = \bigcup_{t \in \mathscr{B}} t$ является в силу (xi) тоже множество $\bigcup_{t \in \mathscr{B}} t$ несчетным и плотным в I. Пусть $t_1, t_2 \in \mathscr{B}, \bar{t}_1 \cap \bar{t}_2 \neq \emptyset, t_1 \neq t_2$. В силу (ix) и (x) существует по большей мере n хорд типа (n) из $\mathscr{A}$, замыкания которых пересекают хорду $\bar{t}_1$. Оттуда и в силу (xi) существует такая последовательность $\{l_i\}_{i=1}^{\infty}$ хорд $l_i \in \mathscr{A}$, что $\lim_{i=\infty} \bar{l}_i = \bar{t}_1$ и всегда $\bar{l}_i \cap \bar{t}_1 = \emptyset$. Не ограничивая общности можно предположить, что все l_i взаимно различны и для всех $\bar{l}_i \cap \bar{t}_2 \neq \emptyset$. В силу (ix) и (x) есть $\bar{t}_2 \cap \bar{l}_i \subset \bar{t}_2 - t_2$. В силу (x) точки $\bar{t}_2 \cap \bar{l}_i, \bar{t}_2 \cap \bar{l}_j$ для $i \neq j$ различны – противоречие, так как $\operatorname{card}(\bar{t}_2 - t_2) = n$. Итак предположение $\bar{t}_1 \cap \bar{t}_2 \neq \emptyset$ привело к противоречию. Следовательно имеют место следующие два утверждения:

(xii) Система $\mathscr{B}$ имеет свойство (α).

(xiii) Множество $\bigcup_{t \in \mathscr{B}} t$ несчетное и плотное в I.

В силу (xii) существуют такие точки $u, v \in k$, что (если обозначить через $\widehat{uv}^1, \widehat{uv}^2$ обе дуги, которые определены на окружности k при помощи точек u, v), для каждой хорды $\bar{t}, t \in \mathscr{B}$, имеет место $t = t(x, y)$, где $x \in \widehat{uv}^1$, $y \in \widehat{uv}^2$ (для $u \equiv v$ имеем $y \equiv u \equiv v$). Пусть, скажем, $\widehat{uv}^1$ дуга ненулевой длины. Тогда концевые точки x хорд $\bar{t}, t \in \mathscr{B}$ образуют множество плотное в $\widehat{uv}^1$ (следствие (xii) и (xiii)).

Пусть $b \in I$ и для каждого $t \in \mathscr{B}$ имеет место $b \notin \bar{t}$. Если система $\mathscr{B}$ такая, что $u \equiv v$, то положим $s = \bar{t}(u, b)$. В силу предположения не существует $l \in \mathscr{B}$ так, что $\bar{l} = s$. Пусть такая l не существует ни в $\mathscr{A}$. В силу свойств системы $\mathscr{A}$ существует такая точка $z \in s$, что $z \notin \bigcup\limits_{t \in \mathscr{A}} t$. Так как $z \in I$ и Σ есть покрытие, то существует такая $t \in \Sigma$, что $z \in t$. Так как $t \notin \mathscr{A}$, то $t \in \mathscr{B}$, и так как каждая хорда типа (n) из $\mathscr{B}$ имеет начало в точке $u \equiv v$, то $\bar{t} = s$ — противоречие, так как b не принадлежит никакому множеству из $\mathscr{B}$. Итак существует $l \in \mathscr{A}$, $\bar{l} = s$. Очевидно $\bar{l} \cap \bigcup\limits_{t \in \mathscr{B}} \bar{t} = \emptyset$.

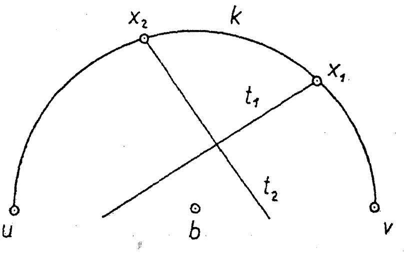

Рис. 8.

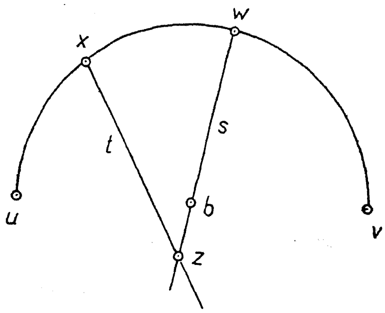

Рис. 9.

В случае $u \neq v$ построим множества $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \subset \mathscr{B}$ при помощи определений: $\mathscr{B}_{1(2)} = \mathrm{E}(t;\ t \in \mathscr{B}$, точки b, v лежат в равных (различных) областях, на которые делит хорда $\bar{t}$ область $I)$. Очевидно $\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2 = \emptyset$, $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 = \mathscr{B}$. Докажем, что имеет место:

(xiv) $t_1, t_2 \in \mathscr{B}$, $t_1 \in \mathscr{B}_1$, x_1, x_2 их концевые точки на дуге $\widehat{uv}^1$, x_2 между u, x_1 на дуге $\widehat{uv}^1 \Rightarrow t_2 \in \mathscr{B}_1$ (см. рис. 8).

(Дело в том, что когда бы было $t_2 \in \mathscr{B}_2$, то $\bar{t}_1 \cap \bar{t}_2 \neq \emptyset$ — противоречие.) Аналогично докажется:

(xv) $t_1, t_2 \in \mathscr{B}$, $t_1 \in \mathscr{B}_2$, x_1, x_2 их концевые точки на дуге $\widehat{uv}^1$, x_2 между v, x_1 на этой дуге $\Rightarrow t_2 \in \mathscr{B}_2$.

Так как множество концевых точек x множеств из $\mathscr{B}$ на дуге $\widehat{uv}^1$ плотное, то вытекает из (xiv) и (xv) существование такой точки $w \in \widehat{uv}^1$, что концевые точки x множеств из $\mathscr{B}_1$ лежат на дуге $\widehat{uw}$ и концевые точки x множеств из $\mathscr{B}_2$ лежат на дуге $\widehat{wv}$. Положим $s = t(b, w)$. В силу предположения не существует $l \in \mathscr{B}$ таким образом, что $\bar{l} = s$. Пусть такая l не существует ни в $\mathscr{A}$. Тогда аналогично предшествующему существует точка $z \in s$ и $t \in \mathscr{B}$ так, что $z \in \bar{t}$. Не ограничивая общности можно предположить, что $t \in \mathscr{B}_1$. Для концовой точки x хорды $\bar{t}$ на дуге $\widehat{uv}^1$ имеет место, что x находится между u, w (см. рис. 9). Итак $s \cap \bar{t} \neq \emptyset$. Очевидно каждая хорда $\bar{t}_1$, $t_1 \in \mathscr{B}_1$, концовая точка x_1 которой достаточно близка точке w пересечет хорду $\bar{t}$, что противоречит свойству (α). Итак существует такая $l \in \mathscr{A}$, что $\bar{l} = s$. Очевидно $\bar{l} \cap \bigcup\limits_{t \in \mathscr{B}} \bar{t} = \emptyset$.

Легко проверить, что хорды $\bar{l}$ (построенные для различных точек $b \notin \bigcup\limits_{t \in \mathscr{B}} \bar{t}$ взаимно не пересекаются.

Пусть $b \in I$ и существует такое $t \in \mathscr{B}$, что $b \in \bar{t}$. В силу (α) такое множество t существует только одно.

Построим систему $\mathscr{S}$ при помощи определения $\mathscr{S} = \mathrm{E}(t$; пусть $t \in \mathscr{B}$ или t некоторое из множеств $l \in \mathscr{A}$ построенных предшествующей конструкцией). Легко проверить что $\mathscr{S}$ обладает свойствами требуемыми утверждением (viii). Этим эта лемма доказана.

Приступим теперь к самому доказательству теоремы 5. К заданному покрытию Σ построим систему $\mathscr{S} \subset \Sigma$ (как это было сделано выше). Доказательство теоремы будет завершенно, если удастся найти множество $l \in \Sigma - \mathscr{S}$ так, что хотя бы одна его концовая точка была отлична от точек u, v. Тогда противоречие легко выведем тем же способом как мы завершили доказательство утверждения (iv). Докажем существование множества l:

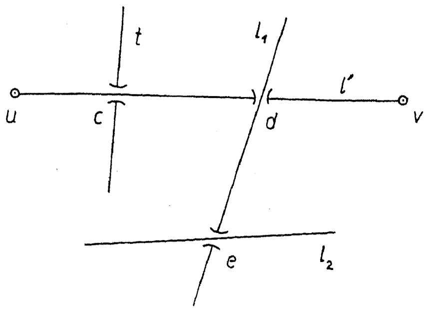

Рис. 10.

Пусть $t \in \mathscr{S}$ любой элемент из $\mathscr{S}$, точка $c \in \bar{t} - t$. Существует такая $l' \in \Sigma$, что $c \in l'$. Очевидно $l' \notin \mathscr{S}$. Если хотя бы одна из концевых точек x, y множества l' отлична от точек u, v, то достаточно положить $l = l'$. Итак пусть $l' = t(u, v)$. Пусть точка $d \in \bar{l}' - l'$ (см. рис. 10). Очевидно $d \notin \bar{t}$. Существует $l_1 \in \Sigma$, $d \in l_1$. Если $l_1 \notin \mathscr{S}$, положим $l = l_1$. Если $l_1 \in \mathscr{S}$, пусть точка $e \in \bar{l}_1 - l_1$. Существует $l_2 \in \Sigma$, $e \in l_2$. Очевидно $l_2 \notin \mathscr{S}$, $l_2 \neq l'$. Положим $l = l_2$ и мы готовы. Теорема 5 доказана.

Замечание 5. *Если $n = 0$ или $\aleph_0 \leqq n \leqq 2^{\aleph_0}$, то покрытие Σ внутренности I окружности хордами типа (n) всегда существует.*

Доказательство. Для $n = 0$ и $n = 2^{\aleph_0}$ утверждение тривиально. Пусть $\aleph_0 \leqq n < 2^{\aleph_0}$. Пусть $a \in k$, $\mathscr{T}$ система хорд $\bar{t}(a, x)$, причем x пробегает такое множество точек на k, что пересечение каждой дуги s с этим множеством имеет мощность n, $\mathscr{L}$ система всех хорд $\bar{l}$ в I параллельных касательной к k в точке a. При помощи элементов из $\mathscr{T}$ построим трансфинитную последовательность $\{\bar{t}_\mu\}$ таким образом, чтобы каждая хорда из $\mathscr{T}$ выступала в этой последовательности точно n раз. Упорядочим элементы из $\mathscr{L}$ в простую трансфинитную последовательность $\{\bar{l}_\nu\}$. Если исключим из $\bar{l}_\nu$ все ее точки пересечения с хордами $\bar{t}$ из $\mathscr{T}$, получим хорды l_ν типа (n). Из хорд системы $\mathscr{T} \cup \mathscr{L}$ построим хорды типа (n) при помощи трансфинитной конструкции:

Пусть $\bar{l}$ хорда с наименьшим индексом в последовательности $\{l_\nu\}$, которая пересечет хорду $\bar{t}_1$. Точку пересечения исключим из хорды $\bar{t}_1$ и прибавим ее к хорде l. Из последовательности $\{\bar{l}_\nu\}$ хорду $\bar{l}$ вычеркнем. Пусть $\bar{s}$ хорда в новой последовательности, имеющая наименьший индекс, пересекающая хорду $\bar{t}_2$. Эту точку пересечения исключим из хорды $\bar{t}_2$ и прибавим к хорде s. Хорду $\bar{s}$ из последовательности вычеркнем. Таким образом продолжаем при помощи трансфинитной индукции, причем для предельного порядкового числа ν последовательность хорд определена как множественное пересечение последовательностей принадлежащих порядковым числам меньшим чем ν. Так как в последовательности $\{\bar{t}_\mu\}$ хорды повторяются каждая точно n раз, $n < 2^{\aleph_0}$, card $\mathscr{L} = 2^{\aleph_0}$ и в последовательности $\{l_\nu\}$ каждая из хорд $\bar{l} \in \mathscr{L}$ выступает точно один раз, то исключим из каждой из хорд $\bar{t} \in \mathscr{T}$ точно n точек, между тем, как к каждому из множеств l, $\bar{l} \in \mathscr{L}$ прибавим только одну точку. Таким образом получим покрытие Σ области I, все элементы которого суть хорды типа (n), что и мы хотели построить.

Замечание 6. Соединением теоремы 4 и 5 получаем следующее утверждение: *Абсолютную плоскость нелзя разложить на прямые типа* (n), $1 \leqq n < \aleph_0$. Авторам не удалось доказать это утверждение для Евклидова и не Евклидова случая одновременно.

Литература

[1] *M. Sekanina*: O rozkladech eukleidovských prostorů. Čas. pro pěst. mat. *83* (1958), 70—79.
[2] *M. Sekanina*: O jistých rozkladových množinách roviny. Čas. pro pěst. mat. *84* (1959), 74—82.

Výtah

O ROZKLADECH ROVINY NA JISTÉ PODMNOŽINY TOPOLOGICKÝCH KRUŽNIC

V. Polák a M. Sekanina, Brno

V práci jsou studovány rozklady roviny E_2 na topologické kružnice, z nichž je odstraněn pevný předem daný počet bodů (který je týž pro všechny topologické kružnice). Dále jsou studovány rozklady, jejichž prvky jsou přímky bez konečného (pevného předem daného) počtu bodů. Poslední věta se týká rozkladu vnitřku kružnice.

Summary

ON DECOMPOSITIONS OF THE PLANE INTO SYSTEMS OF SUBSETS OF TOPOLOGICAL CIRCLES

V. Polák and M. Sekanina, Brno

The questions studied in this paper are, first, decompositions of the Euclidean plane E_2 into topological circles from which a given number — fixed in advance — of points is ommitted; and second, an analogous problem with straight lines instead of circles. A final theorem concerns decompositions of the interior of a circle.