Časopis pro pěstování matematiky

Ilja Černý

Obdoba Fubiniho věty pro plošný integrál přes polyedrální plochu a Gaussova věta s indexem

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 1, 69--83

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108348

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

OBDOBA FUBINIHO VĚTY PRO PLOŠNÝ INTEGRÁL PŘES POLYEDRÁLNÍ PLOCHU A GAUSSOVA VĚTA S INDEXEM

ILJA ČERNÝ, Praha

(Došlo dne 23. srpna 1961)

V článku se převádí integrace přes polyedrální plochu v E_3 na sled integrace přes E_1 a integrace přes systémy orientovaných křivek, které tvoří průniky polyedrální plochy s rovinami, kolmými k dané přímce. Na základě toho a na základě Greenovy věty se odvozuje Gaussova věta pro (libovolně se protínající) polyedrální plochu.

1. V tomto článku budeme užívat definic a symbolů, zavedených v prvních třech odstavcích [3]; jsou obsaženy také v résumé k [3]. Zopakujme je stručně: Je-li $\mathfrak{B} = \{\tau_n\}_{n=1}^p$ (kde $\tau_n = \{a_n, b_n, c_n\}$) triangulace množiny $\mathfrak{B} = \{\mathbf{B}_j\}_{j=1}^l$ a je-li F zobrazení množiny $\mathbf{B} = \bigcup\limits_{j=1}^{l} \mathbf{B}_j$ do E_3, které je lineární na každém z trojúhelníků $T_n = T(\tau_n) = T(a_n, b_n, c_n)$ (jejichž sjednocením je $\mathbf{B}$), říkáme, že F je *polyedrální plocha*. Kompaktní množinu $F(\mathbf{B})$ nazýváme *grafem plochy* F, body a_n, b_n, c_n $(n = 1, \ldots, p)$ *vrcholy triangulace* $\mathfrak{B}$; množinu všech vrcholů triangulace $\mathfrak{B}$ označíme $V(\mathfrak{B})$. Body množiny $F(V(\mathfrak{B}))$, tj. body $A_n = F(a_n)$, $B_n = F(b_n)$, $C_n = F(c_n)$, nazýváme *vrcholy plochy* F.

Ve [3] jsme dokázali toto tvrzení:

Věta. *Buď R rovina v E_3, která neobsahuje žádný vrchol plochy F. Buď $P = E[n; F(T_n) \cap R \neq \emptyset]$. Je-li dána orientace roviny R (tj. kladně orientovaná ortonormální base $\{X_1, X_2, Y\}$ v E_3 zvolená tak, že $\{X_1, X_2\}$ je basí v R), můžeme úsečky, které jsou průniky $F(T_n)$ s R $(n \in P)$, orientovat tak, že označíme-li D_n resp. E_n jejich počáteční resp. koncový bod a φ_n lineární zobrazení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ do E_3, pro něž je $\varphi_n(0) = D_n$, $\varphi_n(1) = E_n$, lze P rozložit na konečně mnoho disjunktních neprázdných množin P_m $(m = 1, \ldots, r)$ s touto vlastností:*

Každé P_m lze cyklicky uspořádat tak, že jsou-li např.

$$n(1) \prec n(2) \prec \ldots \prec n(k) \prec n(1) \prec \ldots$$

všechny prvky P_m, je

$$\psi_m = \varphi_{n(1)} \dotplus \varphi_{n(2)} \dotplus \cdots \dotplus \varphi_{n(k)}$$

(označení viz [3]) *uzavřená křivka. Značí-li* χ *systém všech křivek* ψ_m $(m = 1, \ldots, r)$ *a položíme-li*

$$\operatorname{ind}_\chi w = \sum_{m=1}^{r} \operatorname{ind}_{\psi_m} w$$

pro všechna $w \in R$ *nepatřící do množiny*

$$|\chi| = \bigcup_{m=1}^{r} |\psi_m|$$

(tj. nepatřící do $F(\mathbf{B})$*), je*

$$\operatorname{ind}_F w = \operatorname{ind}_\chi w$$

pro táž w.

2. Buď $\mathbf{B}_j$ některá stěna z $\mathfrak{B}$; označme jako v [3] γ_j vektor, jehož počátečním bodem je střed krychle $\mathbf{A}_i \in \mathfrak{A}$, jejíž stěnou je $\mathbf{B}_j$, a jehož koncovým bodem je střed stěny $\mathbf{B}_j$. Zvolme dále dva vektory α_j, β_j, jejichž společným počátečním bodem je některý vrchol λ_j stěny $\mathbf{B}_j$ a jejichž koncovými body jsou vrcholy μ_j, ν_j téže stěny, a to tak, aby platilo:

(1) $$[\alpha_j, \beta_j, \gamma_j] > 0\,.$$

Každý bod $\xi \in \mathbf{B}_j$ lze napsat jednoznačně ve tvaru

(2) $$\xi = \lambda_j + \xi_1 \alpha_j + \xi_2 \beta_j\,,$$

kde $\xi_1, \xi_2 \in \langle 0, 1 \rangle$. Pravou stranu (2) označme (pro $\xi_1, \xi_2 \in \langle 0, 1 \rangle$) symbolem $\Phi^j(\xi_1, \xi_2)$; funkce Φ^j je pak prosté lineární zobrazení čtverce $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ na $\mathbf{B}_j$. Abychom zjednodušili označení, ztotožníme v dalším body $\xi \in \mathbf{B}_j$ s příslušnými dvojicemi $(\xi_1, \xi_2) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ (tj. budeme místo $\Phi^j(\xi_1, \xi_2)$ psát (ξ_1, ξ_2), jestliže bude patrné, na které stěně $\mathbf{B}_j$ bod $\xi = \Phi^j(\xi_1, \xi_2)$ leží). Čísla ξ_i budeme nazývat souřadnicemi bodu ξ na $\mathbf{B}_j$.

Poznámka. Buď $\tau = \{a, b, c\}$ orientovaný trojúhelník na $\mathfrak{B}$ (viz odst. 2 nebo résumé v [3]), buď $T = T(\tau) \subset \mathbf{B}_j$. Položme

(3) $$[b - a, c - a]_B = \begin{vmatrix} b_1 - a_1, & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1, & c_2 - a_2 \end{vmatrix},$$

kde a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 jsou souřadnice bodů a, b, c na $\mathbf{B}_j$.

Vzhledem k (1) a k podmínce $[b - a, c - a, \gamma_j] > 0$, pomocí níž jsme v [1] i v [3] definovali orientaci trojúhelníka na $\mathfrak{B}$, jsou base $\{\alpha_j, \beta_j\} = \{\mu_j - \lambda_j, \nu_j - \lambda_j\}$ a $\{b - a, c - a\}$ v rovině obsahující stěnu $\mathbf{B}_j$ souhlasně orientované. Odtud plyne, že

(4) $$[b - a, c - a]_B > 0\,.$$

3. Buď g reálná funkce definovaná na $\mathbf{B}$; je-li $M \subset \mathbf{B}_j$, definujme:

(5) $$\int_M g \, \mathrm{d}p = \iint_{\Phi^{j}{}_{-1}(M)} g(\Phi^j(\xi_1, \xi_2)) \, \mathrm{d}\xi_1 \, \mathrm{d}\xi_2\,,$$

jestliže Lebesgueův integrál vpravo má smysl; dále položme

$$\int_B g \, \mathrm{d}p = \sum_{j=1}^{l} \int_{B_j} g \, \mathrm{d}p \,, \tag{6}$$

jestliže má smysl součet vpravo.

Poznámka 1. Je ovšem také

$$\int_B g \, \mathrm{d}p = \sum_{n=1}^{p} \int_{T_n} g \, \mathrm{d}p \,, \tag{7}$$

má-li součet vpravo smysl.

Poznámka 2. Jestliže užijeme úmluvy z odst. 2 o ztotožnění bodů $\xi \in \mathbf{B}_j$ s příslušnými dvojicemi (ξ_1, ξ_2), můžeme (5) napsat ve tvaru

$$\int_M g \, \mathrm{d}p = \iint_M g(\xi_1, \xi_2) \, \mathrm{d}\xi_1 \, \mathrm{d}\xi_2 \,; \tag{8}$$

integrál $\int_M g \, \mathrm{d}p$ se ničím podstatným neliší od „obyčejného" Lebesgueova integrálu a má všechny jeho vlastnosti. V dalším jej budeme často transformovat podle věty o substituci.

Při uvedeném ztotožnění odpadá zřejmě nutnost užívat zobrazení Φ^j, což zjednodušuje zápis některých vzorců. K nedorozumění nemůže dojít.

Snadno lze ukázat, že ani existence ani hodnota integrálu (5) nezávisí na tom, kterou ze čtyř možností volby vrcholů λ_j, μ_j, ν_j stěny $\mathbf{B}_j$ (s podmínkou (1)) jsme vybrali – tedy jak jsme zvolili zobrazení Φ^j; v důkazu této nezávislosti jde pouze o jednoduchou aplikaci věty o substituci (pro případ transformace, která znamená otočení buď o $\pm\pi/2$ nebo o π).

4. F nechť je jako nahoře polyedrální plocha; pro body $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, neležící na straně žádného trojúhelníka T_n, definujeme:

$$N(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial F(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial F(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} \,. \tag{9}$$ [1]

Vektor N (definovaný na sjednocení vnitřků všech T_n) nazýváme vektorem normály k F. Položíme ještě

$$\nu = \frac{N}{\|N\|}, \quad \text{je-li} \quad N \neq 0 \,, \quad \nu = 0 \quad \text{jinak} \,. \tag{10}$$

Lemma. *Je-li $\tau = \{a, b, c\}$ některý z trojúhelníků triangulace $\mathfrak{B}$ (pro jednoduchost vynecháváme index n), platí uvnitř $T = T(\tau)$ rovnost*

$$\nu = \kappa((F(b) - F(a)) \times (F(c) - F(a))) \,, \tag{11}$$

kde κ je jisté kladné číslo.

---

[1]) Znak $\times$ užíváme pro vektorový součin. Skalární součin dvou vektorů X, Y značíme (X, Y), $\|X\|$ je délka vektoru X.

Důkaz. Buď $T \subset \mathbf{B}_j$; zobrazení $F(\xi_1, \xi_2)$ je lineární na T, takže existují tři vektory W^1, W^2, W^3 tak, že pro $(\xi_1, \xi_2) \in T$ je

$$F(\xi_1, \xi_2) = W^1\xi_1 + W^2\xi_2 + W^3 . \tag{12}$$

Odtud plyne, že

$$\frac{\partial F(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} = W^1 , \quad \frac{\partial F(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} = W^2 , \tag{13}$$

takže

$$N = v\|N\| = W^1 \times W^2 . \tag{14}$$

Znamenají-li a_1, a_2 atd. souřadnice bodu a atd. na $\mathbf{B}_j$, je

$$F(a) = F(a_1, a_2) = W^1a_1 + W^2a_2 + W^3 , \quad \text{atd.}, \tag{15}$$

odkud snadno plyne, že

$$(F(b) - F(a)) \times (F(c) - F(a)) = (W^1 \times W^2)\,[b - a, c - a]_{\mathbf{B}} . \tag{16}$$

Naše tvrzení je důsledkem (14), (16) a (4).

5. Je-li V vektorová funkce definovaná na $F(\mathbf{B})$, definujme

$$\int_F {}^{v_i}V \, dP = \int_{\mathbf{B}} (V_i * F)\, v_i \, \|N\| \, dp \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, 3 , \tag{17}$$

[2]

$$\int_F {}^{v}V \, dP = \int_{\mathbf{B}} (V * F, v)\, \|N\| \, dp , \tag{18}$$

mají-li integrály vpravo smysl.

Pro poslední integrál, který můžeme nazvat *plošným integrálem normální složky vektoru V přes plochu F, platí*:

$$\int_F {}^{v}V \, dP = \sum_{i=1}^{3} \int_F {}^{v_i}V \, dP = \sum_{i=1}^{3} \sum_{n=1}^{p} \int_{T_n} (V_i * F)\, v_i \|N\| \, dp . \tag{19}$$

6. V odst. 6–8 bude pevně dán jeden z trojúhelníků triangulace $\mathfrak{B}$; pro jednoduchost jej označíme (podobně jako v lemmatu z odst. 4) $\tau = \{a, b, c\}^{\circ}$ (bez indexu); položíme též $T = T(\tau)$. Kromě toho bude dána rovina R kolmá k ose x_3, probíhající v (orientované) vzdálenosti z od počátku. Rovina R nechť protíná trojúhelník $F(T)$, ale nechť neobsahuje žádný z jeho vrcholů

$$A = F(a) , \quad B = F(b) , \quad C = F(c) .$$

V R zvolme basi složenou z vektorů $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$ (v tomto pořadí), kterou lze vektorem $(0, 0, 1)$ doplnit na kladně orientovanou basi v E_3. Otevřené poloprostory určené rovinou R v E_3 označíme E_3^+, E_3^-; E_3^+ nechť je přitom ten poloprostor, který obsahuje body, jejichž třetí souřadnice je větší než z.

---

[2] Znak * užíváme pro složené zobrazení.

Jako v odst. 4 v [3] sestrojíme body D a E: Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že vrchol $F(T)$, který leží v příslušném poloprostoru sám, je A. D a E jsou pak krajními body úsečky, která je průnikem $F(T)$ s R, přičemž je-li $A \in E_3^+$, je $D \in S(A, B)$, je-li $A \in E_3^-$, je $D \in S(A, C)$. Jako v [3] označíme písmenem φ lineární zobrazení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ do E_3, pro něž je $\varphi(0) = D$, $\varphi(1) = E$.

Zaveďme tato další označení: ω buď zobrazení, přiřazující každému bodu z $F(T)$ jeho kolmý průmět do roviny $x_2 x_3$. Je-li $v_1 \neq 0$ na T, je ω prosté; v tom případě označíme Ω zobrazení inversní k ω (je-li $v_1 = 0$, zobrazení Ω nedefinujeme). Buď dále $W = \omega(F(T))$, $\sigma = \operatorname{sgn} v_1$ na T.

7. Dokážeme především toto tvrzení:

Věta. *Integrál*

$$\int_T (f * F)\, v_1 \|N\| \,\mathrm{d}p \tag{20}$$

je roven integrálu

$$\sigma \,.\, \iint_W (f * \Omega)\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3 \tag{21}$$

pro každou funkci f, která je spojitá na $F(T)$ (více nebudeme v dalším potřebovat).

Důkaz. Buď nejdříve $v_1 = 0$ na T; pak je integrál (20) roven 0, neboť integrand je nulový. W je v tomto případě úsečka, tedy množina dvojrozměrné míry 0, takže integrál (21) je též roven 0 — nevadí, že integrand není vůbec definován.

V dalším předpokládejme, že $v_1 \neq 0$ na T. Označme H lineární zobrazení převádějící rovinu $x_2 x_3$ na rovinu S, v níž leží stěna $\boldsymbol{B}_j \supset T$, při kterém

$$\text{body } \omega(A), \omega(B), \omega(C) \text{ přecházejí v body } a, b, c\,. \tag{22}$$

Jest

$$\Omega = F * H \text{ na } W, \tag{23}$$

takže

$$F = \Omega * H_{-1} \text{ na } T = H(W)\,. \tag{24}$$

Odtud plyne, že

$$\begin{aligned}\int_T (f * F)\, v_1 \|N\| \,\mathrm{d}p &= \int_T (f * \Omega * H_{-1})\, v_1 \|N\| \,\mathrm{d}p = \\ &= \iint_W (f * \Omega)(v_1 * H)\, \|N * H\| \,.\, |D| \,.\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3\,,\end{aligned} \tag{25}$$

kde D je Jacobiho determinant transformace H.

Vypočtěme pomocí (23) derivace Ω podle proměnných x_2, x_3; jest

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_j} = \frac{\partial (F * H)}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_1} * H\right) \frac{\partial H_1}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_2} * H\right) \frac{\partial H_2}{\partial x_j} \quad \text{pro} \quad j = 2, 3\,. \tag{26}$$

Vektorovým vynásobením z toho dostaneme

$$(27) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \times \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} = (N * H) \,.\, D\,,$$

takže

$$(28) \qquad \|N * H\| \,.\, |D| = \left\| \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \times \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} \right\| .$$

Z (25) tedy plyne rovnost

$$(29) \qquad \int_T (f * F)\, v_1 \|N\| \,\mathrm{d}p = \iint_W (f * \Omega)\,(v_1 * H) \left\| \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \times \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} \right\| \mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_3 \,.$$

Protože Ω „zachovává poslední dvě souřadnice", tj. protože

$$(30) \qquad \Omega(x_2, x_3) = (\Omega_1(x_2, x_3), x_2, x_3)\,,$$

má vektor $(\partial \Omega / \partial x_2) \times (\partial \Omega / \partial x_3)$ (konstantní uvnitř W a kolmý k trojúhelníku $F(T) = \Omega(W)$) první složku rovnou 1. Jednotkový vektor v je také kolmý k $F(T)$, takže

$$(31) \qquad (v_1 * H) \left\| \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \times \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} \right\| = \operatorname{sgn}(v_1 * H) \text{ na } W = \sigma\,.$$

Z (29) a (31) plyne ihned rovnost (20) a (21).

8. V dalším budeme studovat souvislost integrálů (20), (21) a integrálu

$$(32) \qquad \int_\varphi f \,\mathrm{d}x_2 = \int_0^1 (f * \varphi)\,\mathrm{d}\varphi_2$$

(integrál vlevo je integrál křivkový, integrál vpravo Stieltjesův). K tomu budeme potřebovat mimo jiné i rovnost

$$(33) \qquad \sigma = \operatorname{sgn}(\omega_2(E) - \omega_2(D))\,.$$

D ů k a z (33). Z lemmatu v odst. 4 plyne, že

$$(34) \qquad v_1 = \kappa((B_2 - A_2)(C_3 - A_3) - (B_3 - A_3)(C_2 - A_2))\,,$$

kde $\kappa > 0$. Předpokládejme nejdříve, že $A \in E_3^+$; pak je $D \in S(A, B)$, $E \in S(A, C)$ a existují tedy $\lambda, \mu \in (0, 1)$ tak, že

$$(35) \qquad D = A + \lambda(B - A)\,, \quad E = A + \mu(C - A)\,.$$

Body úsečky $S(D, E)$ lze popsat vztahem

$$(36) \qquad x = \varphi(t) = D + t(E - D)\,, \quad \text{kde} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle\,.$$

Je ovšem

$$(37) \qquad \varphi_k(0) = \omega_k(D)\,, \quad \varphi_k(1) = \omega_k(E) \quad \text{pro} \quad k = 2, 3\,.$$

Z (35), (36), (37) ihned plyne, že

$$(38) \qquad \omega_2(E) - \omega_2(D) = \mu(C_2 - A_2) - \lambda(B_2 - A_2)$$

a že

$$(39)\qquad 0 = \omega_3(E) - \omega_3(D) = \mu(C_3 - A_3) - \lambda(B_3 - A_3)$$

(oba body $\omega(D)$, $\omega(E)$ leží v R, takže mají touž třetí souřadnici).

Dosaďme pomocí (39) za $C_3 - A_3$ do (34) a užijme (38); dostaneme:

$$(40)\qquad \nu_1 = \kappa \frac{A_3 - B_3}{\mu} (\omega_2(E) - \omega_2(D)) .$$

V našem případě, kdy $A \in E_3^+$, je $A_3 > B_3$, takže konstanta před závorkou vpravo je kladná. Z toho plyne ihned (33).

Je-li $A \in E_3^-$, bude $A_3 - B_3 < 0$, ale zároveň $D \in S(A, C)$, $E \in S(A, B)$, což má za následek, že po analogickém výpočtu vyjde v závorce na pravé straně (40) $\omega_2(D) - \omega_2(E)$. Platí tedy (33) i v tomto případě.

9. Protože nyní budeme měnit rovinu R a trojúhelník T, je třeba zavést podrobnější označení.

Rovinu kolmou k ose x_3, procházející v (orientované) vzdálenosti z od počátku, označme $R(z)$. Neprochází-li $R(z)$ žádným vrcholem trojúhelníka $F(T_n)$ a je-li $R(z) \cap F(T_n) \neq \emptyset$, můžeme definovat příslušné body D, E a lineární funkci φ (viz odst. 6): označíme je podrobněji $D_n(z)$, $E_n(z)$, $\varphi(n, z)$.

Buď dále $\omega_n = (\omega_{n1}, \omega_{n2}, \omega_{n3})$ zobrazení, které bodům $F(T_n)$ přiřazuje jejich kolmé průměty do roviny x_2x_3; je-li $\nu_1 \neq 0$ na T_n, je ω_n prosté a můžeme definovat $\Omega_n = (\Omega_{n1}, \Omega_{n2}, \Omega_{n3})$ jako zobrazení inversní k ω_n (je-li $\nu_1 = 0$ na T_n, zobrazení Ω_n nedefinujeme). Nechť dále $W_n = \omega_n(F(T_n))$, nechť Q_n znamená průmět W_n do osy x_3, Q průmět $F(\mathbf{B})$ do téže osy. Označme konečně $\sigma_n = \operatorname{sgn} \nu_1$ na T_n.

Podle výsledků v [3], které jsou stručně formulovány v odst. 1, můžeme pro každé $z \in Q$, pro něž $R(z) \cap F(V(\mathfrak{B})) = \emptyset$, utvořit ze získaných $\varphi(n, z)$ systém křivek $\chi(z)$; platí přitom:

$$(41)\qquad \operatorname{ind}_F x = \operatorname{ind}_{\chi(z)} x \quad \text{pro všechna} \quad x \in R(z) - F(B) .$$

Symbol $\int_{\chi(z)} f \, dx_2$ nechť znamená součet křivkových integrálů $\int_{\varphi(n,z)} f \, dx_2$ (přes všechna $\varphi(n, z)$, z nichž se skládá $\chi(z)$).

Jedním z hlavních výsledků této práce je tvrzení, které můžeme nazvat Fubiniho větou pro plošný integrál přes polyedrální plochu:

Věta. *Je-li V vektorová funkce spojitá na grafu $F(\mathbf{B})$ polyedrální plochy F, je*

$$(42)\qquad \int_F {}^{\nu_1}V \, dP = \int_Q \left(\int_{\chi(z)} V_1 \, dx_2 \right) dz .$$

Poznámka. Platí ovšem ještě dvě analogické rovnosti, které dostaneme z (42) cyklickou záměnou souřadnic x_1, x_2 a $x_3 = z$. Nevyslovujeme je proto, že by to vyžadovalo další nová označení. (Další tři analogické rovnosti, které lze dostat necyklickou permutací souřadnic, se liší od předcházejících pouze tím, že na jedné straně rovnosti přibude znaménko minus.)

Lemma. *Pro všechna $n = 1, \ldots, p$ je*

$$\sigma_n \,.\, \iint_{W_n} (V_1 * \Omega_n)\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}z = \int_{Q_n} \left(\int_{\varphi(n,z)} V_1\, \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}z \,. \tag{43}$$

Důkaz lemmatu. Je-li $v_1 = 0$ na T_n, je integrál vlevo roven 0, neboť W_n má dvojrozměrnou míru 0. Funkce $\varphi(n, z)$ jsou v tomto případě konstantní, takže i vpravo je 0.

Můžeme tedy předpokládat, že $v_1 \neq 0$ na T_n. Aplikujme na integrál vlevo Fubiniho větu a to tak, že uvnitř se bude integrovat podle x_2, vně podle z. Vnější integrace bude tedy probíhat přes průmět Q_n trojúhelníka W_n do osy x_3. Vnitřní integrace bude probíhat přes „řezy" W_n rovinami kolmými k ose x_3; meze budou $\omega_2(D)$, $\omega_2(E)$, při čemž dolní mez bude menší z těchto čísel. Podle rovnosti analogické (33) se vnitřní integrál vynásobený číslem σ_n rovná křivkovému integrálu

$$\int_{h(n,z)} (V_1 * \Omega_n)\, \mathrm{d}x_2 \,, \tag{44}$$

kde $h(n, z) = \omega_n * \varphi(n, z)$; protože $\Omega_{n2} * h(n, z) = h_2(n, z)$ a $\varphi(n, z) = \Omega_n * h(n, z)$, je integrál (44) dále roven

$$\int_0^1 (V_1 * \Omega_n * h(n, z))\, \mathrm{d}h_2(n, z) =$$

$$= \int_0^1 (V_1 * \Omega_n * h(n, z))\, \mathrm{d}(\Omega_{n2} * h(n, z)) = \int_{\varphi(n,z)} V_1\, \mathrm{d}x_2 \,.$$

Tím je lemma dokázáno. Obraťme se k důkazu věty. Podle (17), podle věty z odst. 7 a podle lemmatu z tohoto odstavce je

$$\int_F {}^{v_1}V \mathrm{d}P = \sum_{n=1}^{p} \int_{T_n} (V_1 * F)\, v_1 \|N\|\, \mathrm{d}p = \tag{45}$$

$$= \sum_{n=1}^{p} \sigma_n \,.\, \iint_{W_n} (V_1 * \Omega_n)\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{p} \int_{Q_n} \left(\int_{\varphi(n,z)} V_1\, \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}z \,.$$

Poslední integrál je však zřejmě roven

$$\int_Q \left(\sum \int_{\varphi(n,z)} V_1\, \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}z \,, \tag{46}$$

kde sčítání probíhá přes ta n, pro něž (při pevném z) je $F(T_n) \cap R(z) \neq \emptyset$. (Vnitřní integrál nemá smysl pro konečně mnoho z, totiž pro ta z, pro něž $R(z) \cap F(V(\mathfrak{B})) \neq \emptyset$, ale to při integrování podle z nevadí.) Vnitřní součet je tedy roven integrálu $\int_{\chi(z)} V_1\, \mathrm{d}x_2$, čímž je důkaz věty dokončen.

10. Druhým hlavním výsledkem této práce je Gaussova věta pro polyedrální plochu. Důkaz je založen na „Fubiniho větě", kterou jsme právě dokázali a na větě Greenově. Předpoklady Gaussovy věty lze upravit podle toho, které znění Greenovy věty užíváme; vybrali jsme znění z [2], které lze též najít v [4]. Před aplikací Greenovy věty je však třeba poněkud ji modifikovat.

Věta. *Buďte* ψ_m $(m = 1, \ldots, r)$ *uzavřené křivky s konečnou délkou, definované v* $\langle \alpha_m, \beta_m \rangle$; *nechť* $|\psi_m| \subset E_2$. *Systém těchto křivek označme* χ *a položme*

$$\operatorname{ind}_\chi w = \sum_{m=1}^{r} \operatorname{ind}_{\psi_m} w \tag{47}$$

pro všechna w *nepatřící do množiny*

$$|\chi| = \bigcup_{m=1}^{r} |\psi_m| \,. \tag{48}$$

Označme

$$G = E[w \in E_2; \operatorname{ind}_\chi w \neq 0] \,. \tag{49}$$

Buď f *funkce spojitá na* $G \cup |\chi|$. *Nechť existuje množina* $H \subset G$, *kterou skoro každá přímka rovnoběžná s první osou souřadnou protíná ve spočetné množině, přičemž konečná derivace* $\partial f / \partial w_1$ *existuje všude v* $G - H$. *Nechť existuje konečný Lebesgueův integrál*

$$I = \iint_G \operatorname{ind}_\chi \cdot \frac{\partial f}{\partial w_1} \cdot \mathrm{d}w_1 \, \mathrm{d}w_2 \,. \tag{50}$$

Položíme-li

$$\int_\chi f \, \mathrm{d}w_2 = \sum_{m=1}^{r} \int_{\psi_m} f \, \mathrm{d}w_2 \,, \tag{51}$$

je

$$I = \int_\chi f \, \mathrm{d}w_2 \,. \tag{52}$$

Důkaz. Větu snadno odvodíme z Greenovy věty, vyslovené a dokázané v [2]. Označme u_m, v_m $(m = 1, \ldots, r - 1)$ funkce lineární na $\langle 0, 1 \rangle$, pro něž je

$$u_m(0) = v_m(1) = \psi_m(\beta_m) \,, \quad u_m(1) = v_m(0) = \psi_{m+1}(\alpha_{m+1}) \,,$$

a definujme

$$\Phi = \psi_1 \dotplus u_1 \dotplus \psi_2 \dotplus u_2 \dotplus \ldots \dotplus u_{m-1} \dotplus \psi_m \dotplus v_{m-1} \dotplus \ldots \dotplus v_1 \,. \tag{53}$$

Pak je Φ uzavřená křivka s konečnou délkou a zřejmě

$$\operatorname{ind}_\Phi w = \operatorname{ind}_\chi w \tag{54}$$

pro všechna w nepatřící do množiny

$$|\Phi| = |\chi| \cup \bigcup_{m=1}^{r-1} |u_m| \,. \tag{55}$$

Z toho plyne, že

$$\tilde{G} = E[w; \operatorname{ind}_\Phi w \neq 0] = G - \bigcup_{m=1}^{r-1} |u_m| \subset G \,. \tag{56}$$

Spojitou funkci f lze z uzavřené množiny $G \cup |\chi|$ rozšířit spojitě na celou rovinu E_2, tím spíše na $\tilde{G} \cup |\Phi| = G \cup |\Phi|$, a její derivace $\partial f/\partial w_1$ splňuje v $\tilde{G}$ podmínky analogické jako v G. Vzhledem k (56) se $\tilde{G}$ liší od G pouze o množinu míry nula, takže

$$\iint_{\tilde{G}} \operatorname{ind}_\Phi . \frac{\partial f}{\partial w_1} . \mathrm{d}w_1 \, \mathrm{d}w_2 = \iint_G \operatorname{ind}_\chi . \frac{\partial f}{\partial w_1} . \mathrm{d}w_1 \, \mathrm{d}w_2 \tag{57}$$

je konečný.

Všechny předpoklady Greenovy věty z [2] jsou tedy splněny, takže

$$\iint_{\tilde{G}} \operatorname{ind}_\Phi . \frac{\partial f}{\partial w_1} . \mathrm{d}w_1 \, \mathrm{d}w_2 = \int_\Phi f \, \mathrm{d}w_2 = \tag{58}$$

$$= \int_\chi f \, \mathrm{d}w_2 + \sum_{m=1}^{r-1} \left(\int_{u_m} f \, \mathrm{d}w_2 + \int_{v_m} f \, \mathrm{d}w_2 \right) = \int_\chi f \, \mathrm{d}w_2 \, .$$

Z (57) a (58) plyne ihned naše tvrzení.

11. Věta. *Buď F jako obvykle daná polyedrální plocha; položme*

$$G = E[x \in E_3; \ \operatorname{ind}_F w \neq 0] \, . \tag{59}$$

Buď V vektorová funkce spojitá na $G \cup F(\mathbf{B})$, pro niž dále platí: Existuje množina $H \subset G$ tak, že průnik H se skoro každou rovinou $R(z)$ (rovnoběžnou s rovinou x_1x_2 a mající (orientovanou) vzdálenost z od počátku) je množina, kterou skoro každá přímka rovnoběžná s osou x_1 protíná ve spočetné množině, přičemž všude v $G - H$ existuje konečná derivace $\partial V_1/\partial x_1$.

Nechť existuje konečný Lebesgueův integrál

$$I = \iiint_G \operatorname{ind}_F . \frac{\partial V_1}{\partial x_1} . \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3 \, . \tag{60}$$

Pak je

$$I = \int_F {}^{v_1}V \, \mathrm{d}P \, . \tag{61}$$

Důkaz. Pišme $z = x_3$; podle Fubiniho věty je – vzhledem k tomu, že průmět Q množiny $F(B)$ do osy x_3 obsahuje průměr G do téže osy –

$$I = \int_Q \left(\iint_{G(z)} \operatorname{ind}_F . \frac{\partial V_1}{\partial x_1} . \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}z \, , \tag{62}$$

kde

$$G(z) = E[(x_1, x_2); \ (x_1, x_2, z) \in G] \tag{63}$$

($G(z)$ je ovšem prázdná, jestliže z nepatří do průmětu G do osy x_3, ale to v dalším nikde nevadí).

Vnitřní (dvojný) integrál v (62) existuje a je konečný pro skoro všechna z; z toho a z předpokladů o množině H plyne, že existuje množina $M \subset E_1$ nulové míry tak, že platí:

Je-li $z \in Q - M$, je 1) průnik $H(z) = H \cap R(z)$ množina, kterou skoro každá přímka rovnoběžná s osou x_1 protíná ve spočetné množině; 2) existuje konečný integrál

$$I(z) = \iint_{G(z)} \mathrm{ind}_F \cdot \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \cdot \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\,; \tag{64}$$

3) $R(z)$ neobsahuje žádný vrchol plochy F.

Je-li tedy $z \in Q - M$, můžeme sestrojit systém křivek $\chi(z)$ (jako v odst. 9), pro který je

$$\mathrm{ind}_{\chi(z)}\, x = \mathrm{ind}_F\, x \tag{65}$$

pro všechna $x \in R(z) - F(B)$. Pro tato z je tedy

$$I(z) = \iint_{G(z)} \mathrm{ind}_{\chi(z)} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \cdot \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\,. \tag{66}$$

Funkce $V_1(x_1, x_2, z)$ je ovšem spojitá pro $(x_1, x_2) \in G(z) \cup |X(z)|$, kde $X(z)$ je „průmět" $\chi(z)$ do roviny x_1x_2, a podle (65)

$$G(z) = E[(x_1, x_2); \mathrm{ind}_{\chi(z)}\,(x_1, x_2) \neq 0]\,. \tag{67}$$

Skoro každá přímka rovnoběžná s osou x_1 má s množinou $H(z)$ spočetný průnik a $\partial V_1(x_1, x_2, z)/\partial x_1$ je konečná všude v $G(z) - H(z)$.

Jsou tedy splněny všechny předpoklady Greenovy věty z odst. 10 a platí:

$$I(z) = \int_{\chi(z)} V_1\, \mathrm{d}x_2 \quad \text{pro} \quad z \in Q - M\,, \tag{68}$$

takže podle (62) je

$$I = \int_Q \left(\int_{\chi(z)} V_1\, \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}z\,. \tag{69}$$

Integrál vpravo je podle věty z odst. 9 roven integrálu

$$\int_F {}^{\nu_1}V\, \mathrm{d}P\,, \tag{70}$$

čímž je naše tvrzení dokázáno.

12. Snadným důsledkem věty z odst. 11 je druhé hlavní tvrzení této práce:

Gaussova věta. *Za předpokladů, které vzniknou z předpokladů věty odst. 11 všemi cyklickými permutacemi souřadnic $x_1, x_2, x_3 = z$, je*

$$\iiint_G \mathrm{ind}_F \cdot \mathrm{div}\, V \cdot \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3 = \int_F {}^{\nu}V\, \mathrm{d}P\,. \tag{71}$$

Důkaz. Stačí pouze sečíst tři vzorce, které vzniknou z (60)–(61) cyklickými permutacemi souřadnic.

Literatura

[1] *I. Černý*: Elementární zavedení indexu bodu vzhledem k ploše. Časopis pro pěst. mat. *86* (1961), 7—31.

[2] *J. Král, J. Mařík*: Der Greensche Satz. Čech. mat. žurnal, *7* (82), 1957, 235—247.

[3] *I. Černý*: Index bodu vzhledem k polyedrální ploše a jejímu průniku s rovinou (v tomto čísle).

[4] *I. Černý*: Úvod do theorie funkcí komplexní proměnné. Praha 1960.

Резюме

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ФУБИНИ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА ПО МНОГОГРАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ТЕОРЕМА ГАУССА С ИНДЕКСОМ

ИЛЬЯ ЧЕРНЫЙ (Ilja Černý), Прага

Мы будем пользоваться определениями и символами, введенными в первых трех параграфах [3]; они приводятся также в резюме к [3]. Пусть F — многогранная поверхность, т. е. отображение множества $\mathbf{B} = \bigcup_{j=1}^{l} \mathbf{B}_j$ в E_3, линейное на каждом из треугольников $T_n = T(\tau_n)$, где $\mathfrak{B} = \{\tau_n\}_{n=1}^{p}$ $(\tau_n = \{a_n, b_n, c_n\})$ — данная триангуляция множества $\mathfrak{B}$.

Интеграл по $\mathbf{B}_j$ мы определим так: Бозьмем два вектора α_j, β_j, общей начальной точкой которых является одна из вершин λ_j квадрата $\mathbf{B}_j$, а концевые точки — вершины $\mathbf{B}_j$ выбраны так, что если γ_j означает вектор, начальной точкой которого является центр куба (грань которого — $\mathbf{B}$), а концевая точка — центр грани $\mathbf{B}_j$, то внешнее произведение $[\alpha_j, \beta_j, \gamma_j] > 0$. Каждую точку $\xi \in \mathbf{B}_j$ тогда можно записать в виде

$$(*) \qquad \xi = \lambda_j + \xi_1\alpha_j + \xi_2\beta_j\,,$$

где $\xi_1, \xi_2 \in \langle 0, 1\rangle$. Если g определена на $\mathbf{B}_j$, то пусть $\int_{\mathbf{B}_j} g\, \mathrm{d}p$ означает интеграл Лебега от функции g по квадрату $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, который пробегают ξ_1, ξ_2, если точка ξ пробегает $\mathbf{B}_j$.

Если g определена на $\mathbf{B}$, то положим

$$\int_{\mathbf{B}} g\, \mathrm{d}p = \sum_{j=1}^{l} \int_{\mathbf{B}_j} g\, \mathrm{d}p\,,$$

если сумма вправо имеет смысл. Если V — векторная функция, определенная на $F(\mathbf{B})$, то мы еще положим

$$\int_F {}^{v_i}V\, \mathrm{d}P = \int_{\mathbf{B}} (V_i * F)\, v_i \|N\|\, \mathrm{d}p \quad \text{для} \quad i = 1, 2, 3\,,$$

$$\int_F {}^{v}V\, \mathrm{d}P = \int_{\mathbf{B}} (V * F, v) \|N\|\, \mathrm{d}p\,,$$

где N – вектор нормали к поверхности F (определенный в тех точках $\mathbf{B}$, которые не лежат ни на одной стороне какого-либо T_n, как векторное произведение $\partial F/\partial \xi_1 \times \partial F/\partial \xi_2$), $\nu = N/\|N\|$, если $N \neq 0$, $\nu = 0$ в противном случае).

Одним из главных результатов статьи является следующее утверждение:

Пусть $R(z)$ – плоскость, перпендикулярная к оси x_3 и проходящая на ориентированном расстоянии z от начала координат. Если $R(z)$ не содержит ни одной вершины поверхности F (см. напр., резюме к [3]), то мы образуем согласно [3] семейство $\chi(z)$ кривых $\psi_m(z)$ (которое является, грубо говоря, семейством всех отрезков, лежащих в пересечении $R(z) \cap F(\mathbf{B})$ и надлежащих образом ориентированных).

Если Q означает проекцию $F(\mathbf{B})$ на ось x_3, то будет

$$\int_F {}^{\nu_1}V \,\mathrm{d}P = \int_Q \left(\int_{\chi(z)} V_1 \,\mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}z$$

для каждой векторной функции V, непрерывной на $F(\mathbf{B})$.

(Интеграл $\int_{\chi(z)}$ определен как сумма криволинейных интегралов по отдельным $\psi_m(z)$, из которых оставлено $\chi(z)$.)

Справедливы, конечно, два аналогичных уравнения для $\int_F^{\nu_i} V \mathrm{d}P$, $i = 2, 3$.

Вторым из главных результатов статьи является вывод формулы

$$(^{**}) \qquad \iiint_G \mathrm{ind}_F \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \,\mathrm{d}z_1 \,\mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_3 = \int_F {}^{\nu_1}V \,\mathrm{d}P$$

при следующих условиях: 1. F – многогранная поверхность, $G = E[x; \mathrm{ind}_F x \neq 0]$; 2. векторная функция V непрерывна на $G \cup F(\mathbf{B})$ и обладает конечной производной $\partial V_1/\partial x_1$ на множестве $G - H$, где пересечением H почти с каждой плоскостью, перпендикулярной к оси x_3, является множество, пересечение которого почти с каждой прямой, параллельной с осью x_1, счетно; 3. Интеграл в левой части (**) существует и является конечным.

Доказательство формулы (**) основано на теореме Грина и на первом из главных результатов стати, который представляет собой своего рода „теорему Фубини“ для интеграла по поверхности.

При выполнении всех условий, возникающих из только что сформулированных условий (при которых было выведено соотношение (**)) путем всех циклических перестановок координат $x_1, x_2, x_3 = z$, из (**) и из двух дальнейших аналогичных соотношений легко следует равенство

$$\iiint_G \mathrm{ind}_F \operatorname{div} V \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_3 = \int_F {}^{\nu}V \,\mathrm{d}P\,.$$

Summary

AN ANALOGUE OF FUBINI'S THEOREM FOR THE SURFACE INTEGRAL OVER A POLYHEDRAL SURFACE AND GAUSS' THEOREM WITH THE INDEX

ILJA ČERNÝ, Praha

Let us use the definitions and symbols defined in the first three paragraphs of [3]; they are also contained in the summary to [3]. Let F be a polyhedral surface, *i. e.* a mapping of the set $\mathbf{B} = \bigcup_{j=1}^{l} \mathbf{B}_j$ into E_3, which is linear on each of the triangles $T_n = T(\tau_n)$, where $\mathfrak{B} = \{\tau_n\}_{n=1}^{p}$ ($\tau_n = \{a_n, b_n, c_n\}$) is a given triangulation of the set $\mathfrak{B}$.

We define the integral over $\mathbf{B}_j$ in the following way: If $\mathbf{B}_j \in \mathfrak{B}$ is the face of the cube $\mathbf{A}_i \in \mathfrak{A}$ nad if γ_j is the vector with origin in the centre of the cube $\mathbf{A}_i$ and terminal point in the centre of $\mathbf{B}_j$, let us choose two vectors α_i, β_j the common origin of which is an (arbitrary) vertex λ_j of the square $\mathbf{B}_j$ and the termini of which are vertices of $\mathbf{B}_j$ chosen so that the outer product $[\alpha_j, \beta_j, \gamma_j]$ is positive. Then each point $\xi \in \mathbf{B}_j$ can be written in the form

$$(*) \qquad \xi = \lambda_j + \xi_1\alpha_j + \xi_2\beta_j\,,$$

where $\xi_1, \xi_2 \in \langle 0, 1\rangle$. If g is a function defined on $\mathbf{B}_j$, let us denote the Lebesgue integral of the function g over the square $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, over which ξ_1, ξ_2 vary when the point ξ varies over $\mathbf{B}_j$, by the symbol $\int_{\mathbf{B}_j} g\, \mathrm{d}p$.

If g is defined on $\mathbf{B}$, we put

$$\int_{\mathbf{B}} g\, \mathrm{d}p = \sum_{j=1}^{l} \int_{\mathbf{B}_j} g\, \mathrm{d}p\,,$$

if the sum on the right side of the equation is meaningful. If V is a vector function defined on $F(\mathbf{B})$, put

$$\int_F {}^{v_i}V \mathrm{d}P = \int_{\mathbf{B}} (V_i * F)\, v_i \|N\|\, \mathrm{d}p \quad \text{for} \quad i = 1, 2, 3\,,$$

$$\int_F {}^{v}V \mathrm{d}P = \int_{\mathbf{B}} (V * F, v)\, \|N\|\, \mathrm{d}p\,,$$

where N is the normal vector of the surface F (defined in those points of $\mathbf{B}$, (which do not lie on any side of any T_n, as the vector product $\partial F/\partial\xi_1 \times \partial F/\partial\xi_2$), $v = N/\|N\|$ if $N \neq 0$ and $v = 0$ otherwise).

One of the main results of the present article is the following theorem:

Let $R(z)$ be the plane perpendicular to the axis x_3, whose intersection with this axis has third coordinate z. If $R(z)$ does not contain any vertex of the surface F

(see for instance the Summary of [3]), *let us construct (according to* [3]) *the system* $\chi(z)$ *of the curves* $\psi_m(z)$ *(which is — roughly speaking — the system of all segments lying in* $R(z) \cap F(\mathbf{B})$ *and oriented in a suitable manner).*

If Q *is the projection of* $F(\mathbf{B})$ *into the axis* x_3*, then*

$$\int_F {}^{\nu_1}V\,\mathrm{d}P = \int_Q \left(\int_{\chi(z)} V_1\,\mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}z$$

for every vector function V *continuous on* $F(\mathbf{B})$. ($\int_{\chi(z)}$ *is defined as the sum of the curvilinear integrals over the curves* $\psi_m(z)$ *of which* $\chi(z)$ *is composed.*)

Of course, there hold another two analogous equations for $\int_F {}^{\nu_i}V\,\mathrm{d}P$, $i = 2, 3$.

The second main result of the present article is the *derivation of the relation*

$$(**) \qquad \iiint_G \operatorname{ind}_F \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \int_F {}^{\nu_1}V\,\mathrm{d}P\,,$$

if the following assumptions hold: 1) F is a polyhedral surface, $G = E[x; \operatorname{ind}_F x \neq 0]$; 2) the vector function V is continuous on $G \cup F(\mathbf{B})$ and has a finite partial $\partial V_1/\partial x_1$ in the set $G - H$, where the intersection of H with almost every plane perpendicular to the axis x_3 is a set which has a countable intersection with almost every straight line parallel to the axis x_1; 3) the integral on the left side of (**) exists and is finite.

The proof of the equation (**) is based on Green's theorem and on the first of the results of the present paper (which is an analogue to Fubini's theorem for the surface integral).

If all assumption which are obtained from the assumptions 1)–3) by all cyclic permutations of the coordinates $x_1, x_2, x_3 = z$, hold, it follows easily from (**) and from the corresponding equations that

$$\iiint_G \operatorname{ind}_F \operatorname{div} V\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \int_F {}^{\nu}V\,\mathrm{d}P\,.$$